Chapitre 2-1
Champ et potentiel électrique
Distribution discrète de charge

1. Champ électrostatique
2. Potentiel électrostatique
3. Energie potentielle

Champ électrostatique

- *Une charge électrique q_1 (source) modifie les propriétés électriques de l'espace environnant. On dit que la charge q_1 (source) crée un champ électrique*
- *Si l'on place une charge électrique q_2 (test) au voisinage, cette charge est soumise à une force (de Coulomb) telle que*

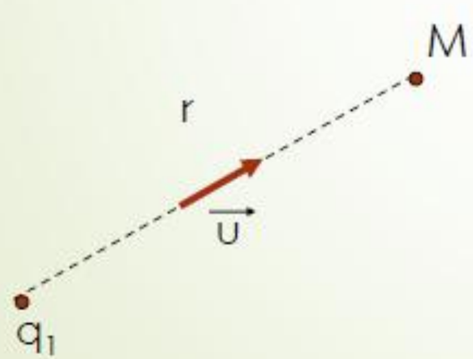
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q_1 . q_2}{r^2}\vec{u}_{12} = q_2 \underbrace{\frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{u}_{12}}_{\vec{E}} = q_2 . \vec{E}$$

- La charge q_1 (source) perturbe son environnement.
- Le champ $\overrightarrow{E}$ caractérise cette perturbation.

Source de champ

$$\vec{F} = q.\overrightarrow{E} \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{\mathbf{q}} = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{u}}$$



- *direction* **radiale**
- *sens* $\begin{cases} \vec{u} \quad si\ q_1 > 0 \\ -\vec{u} \quad si\ q_1 < 0 \end{cases}$
- *intensité* $\dfrac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\dfrac{|\mathbf{q}_1|}{\mathbf{r}^2}$

- ***champ électrique n'est pas défini en r =0***

- **Dans le système SI l'unité du champ et le Volts/mètre (V/m)**

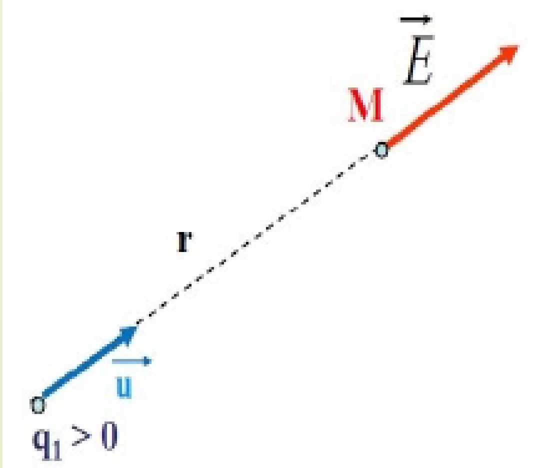
Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u} \qquad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} \text{ vecteur unitaire}$$

Si q > 0

le champ fuit q

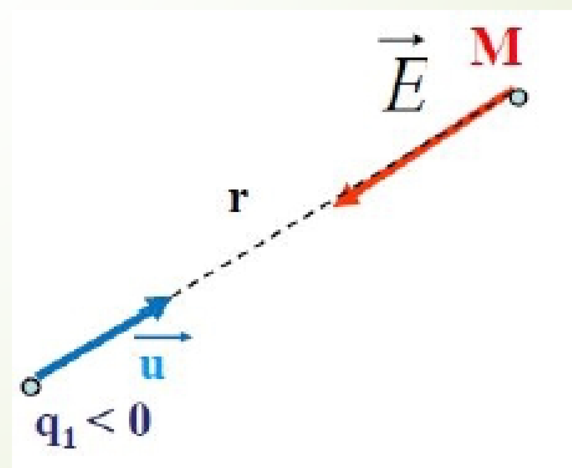
Il est sortant



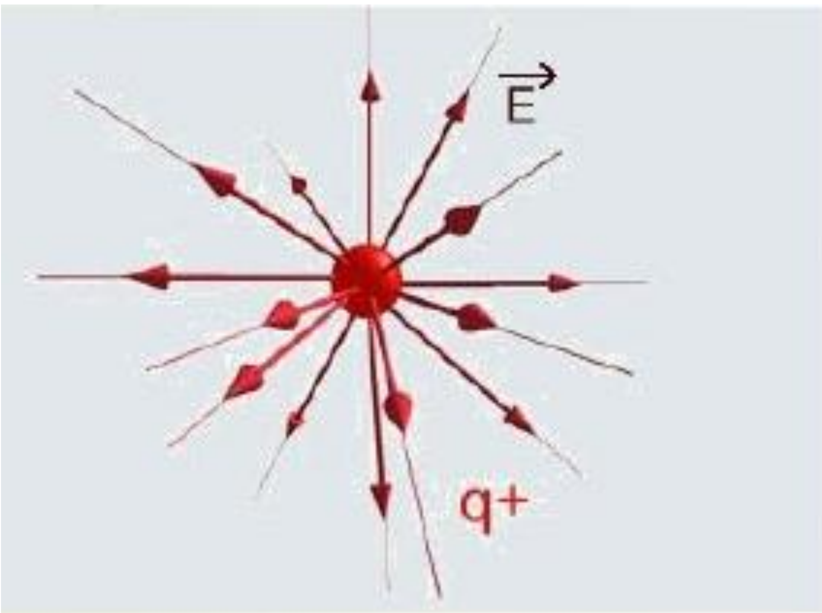
Si q < 0

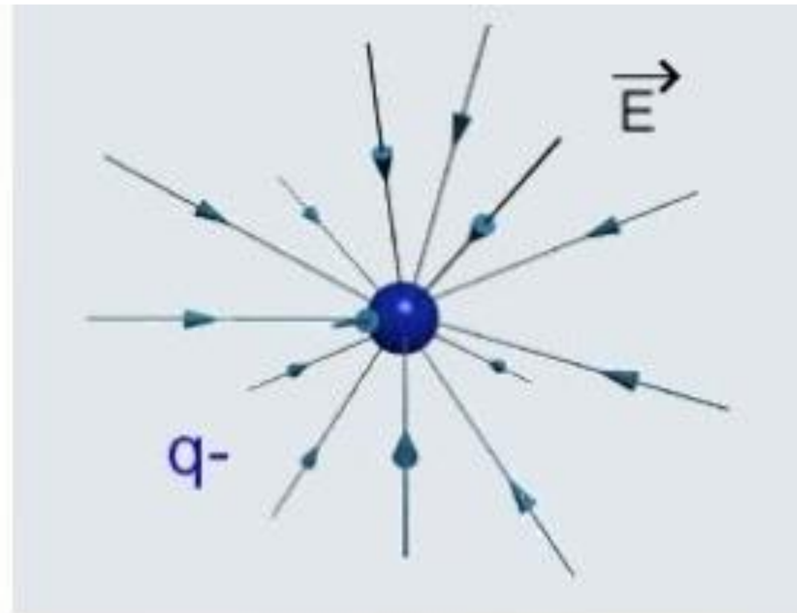
le champ est dirigé vers q

Il est entrant



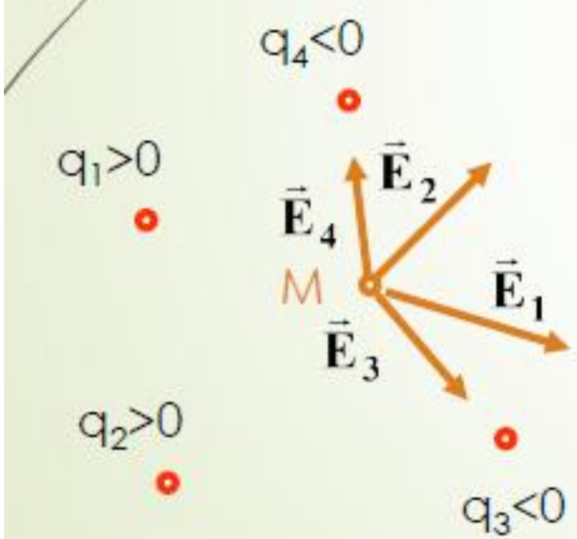
Champ sortant **champ entrant**





Champ créé par une distribution discrète de charge

Le champ résultant en un point M est la somme des champs créés par chaque charge **c'est le Principe de superposition**



$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$$

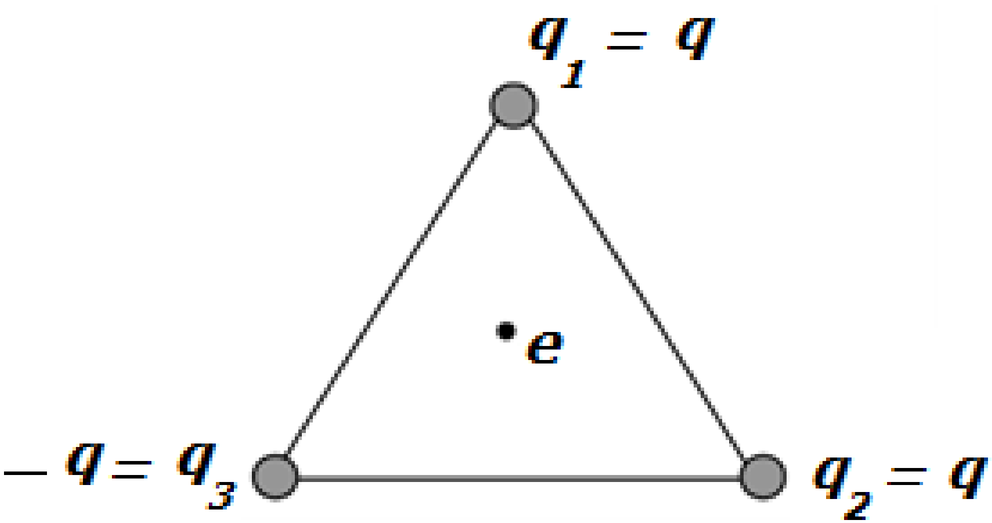
$$\vec{E} = \sum \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i}}$$

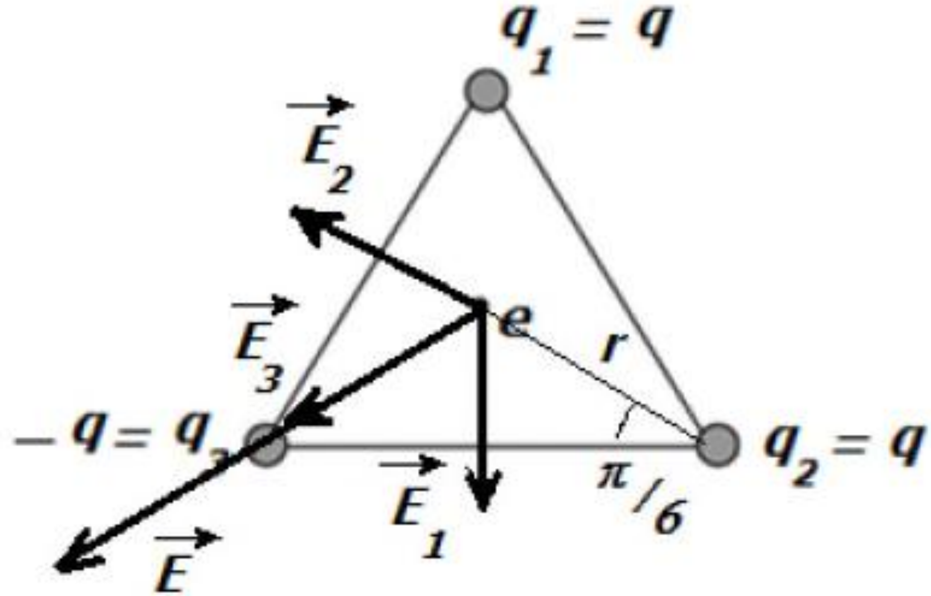
exercice

Trois charges sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de coté *a*, comme représenté sur la figure ci-contre *(q > 0)*. Un électron *e* est placé au centre du triangle.

1. Représenter puis déterminer les champs électriques appliqués sur l'électron?
2. Déduire la force appliquée sur l'électron?



Solution



1) $\overrightarrow{E_1} = K\frac{|q_1|}{r^2}\,(-\vec{j}\,) = -K\frac{q}{r^2}\,\vec{j}$

$$\overrightarrow{E_2} = K\frac{|q_2|}{r^2}\left(-\cos\frac{\pi}{6}\vec{i} + \sin\frac{\pi}{6}\vec{j}\right) = K\frac{q}{r^2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{E_3} = K\frac{|q_3|}{r^2}\left(-\cos\frac{\pi}{6}\vec{i} - \sin\frac{\pi}{6}\vec{j}\right) = -K\frac{q}{r^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

Le champ total est

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_3} \Rightarrow \vec{E} = K\frac{q}{r^2}\,(-\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j}\,)$$

Comme $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$ alors $\vec{E} = -K\frac{3q}{a^2}\,(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\,)$

2) $\vec{F} = -e\,\vec{E} \Rightarrow \vec{F} = K\frac{3\,e\,q}{a^2}\,(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\,)$

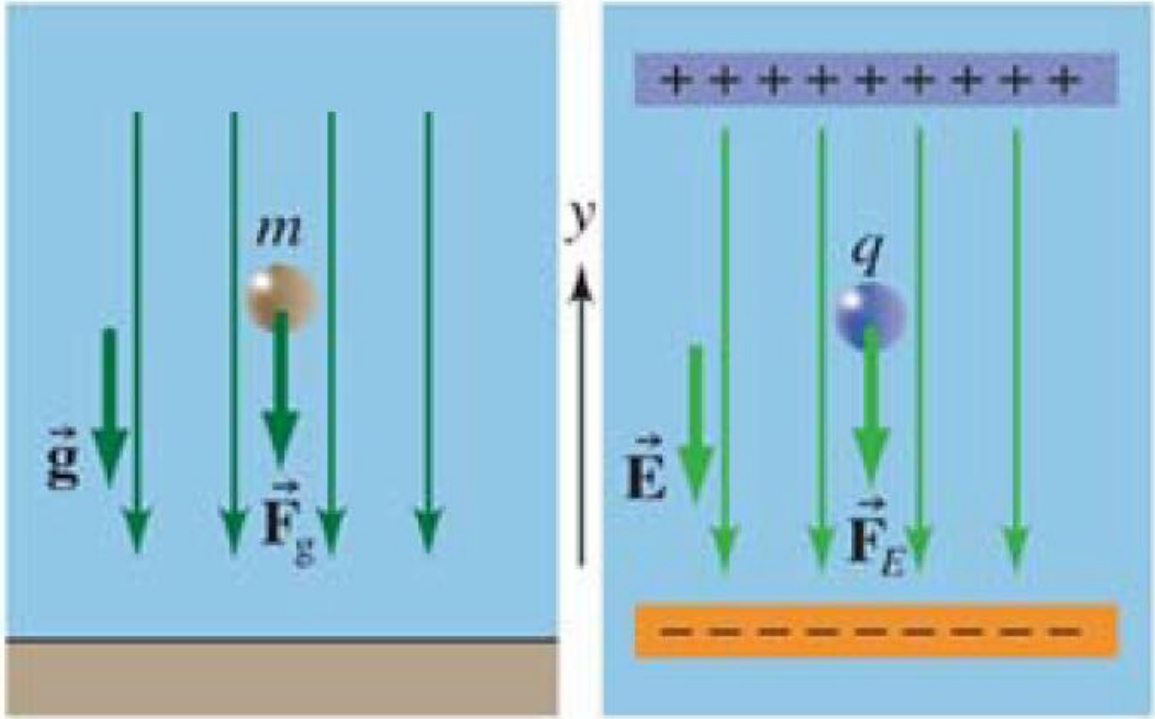
Potentiel électrostatique

Définition

On considère une charge q placée dans un espace où reigne un champ électrostatique

Elle est donc sous l'action d'une force $\vec{F} = q.\vec{E}$. En laissant la charge libre, la force $\vec{F}$ déplace la charge d'un point à un autre en effectuant ainsi un travail W. Cependant, point de vue énergétique, la charge q a « tendance » à se déplacer soit même. On dit qu'elle jouit d'une energie potentielle.

De la même façon, nous avons vue en mécanique que la force d'attraction entre deux masses et conservative donc dérive d'un potentiel. Nous avons pu définir un potentiel gravitationnel et une énergie potentielle associés a cette force



Mécanique			Électricité
Force gravitationnelle	$\mathbf{F}_g = GMm / \mathbf{r}^2 = m\mathbf{g}$	$\mathbf{F}_E = kQq / \mathbf{r}^2 = q\mathbf{E}$	Force électrique
Champ gravitationnel	$\mathbf{g} = GM / \mathbf{r}^2$	$\mathbf{E} = kQ / \mathbf{r}^2$	Champ électrique
Énergie potentielle gravitationnelle	$U_g = mgy$	$U_E = qEy$	Énergie potentielle électrique
Potentiel gravitationnel	$V_g = U_g / m = gy$	$V_E = U_E / q = Ey$	Potentiel électrique

De la même façon qu'on relie la force électrostatique au champ créé par une charge source *q* appliqué sur une charge *q'* qui le subit

$$\vec{F}_{q/q'} = q'.\left(\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon}.\frac{q}{r^2}\,\overrightarrow{U_r}\right) = q'.\vec{E}$$

On relie l'énergie potentielle que va acquérir une charge *q* placée en un point de l'espace au potentiel électrostatique qui existe en ce point

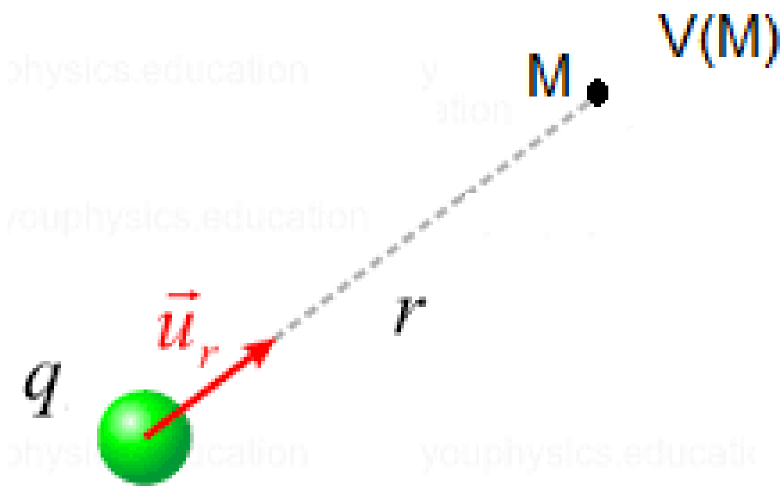
$$V = \frac{E_P}{q} \quad \text{ou} \quad E_p = q.V$$

- **Dans le système SI l'unité du potentiel et le Volts (V)**

Potentiel créé par une charge ponctuelle

Le potentiel créé par une charge pnctuelle q au point M est :

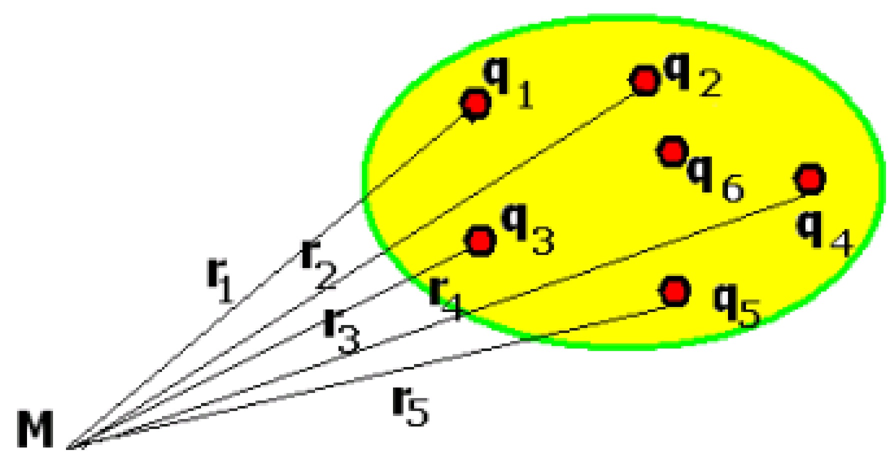
$$V_q(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}$$



Potentiel créé par une distribution discrète de charges

De même, le potentiel total créé par toutes les charges en M est la somme de tous les potentiels individuels.

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_{q_i}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$



Energie potentielle interne d'une paire de charges

- Nous avons déjà vu brièvement la définition de l'énergie potentielle E_p associée à une charge q soumise à un potentiel V

$$E_\mathrm{p} = q\ V$$

Si ce potentiel est créé par une autre charge *q'* situé à une distance *r* de la première charge *q* il aura pour valeur

$$V = kq' / r$$

Soit donc une énergie potentielle pour la paire des deux charges

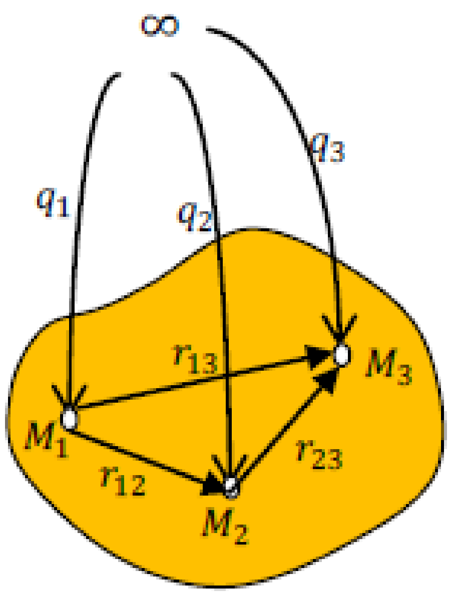
$$E_\mathrm{p} = \mathrm{U}_{12} = q\ V = k\ q\ q' / r$$

- Cette énergie est égale au travail fourni pour ramener la charge *q* de l'infini à une distance *r* de *q'* pour former la paire

Energie potentielle interne d'un système de charges

- Pour calculer cette énergie, il convient d'amener une à une les charges q_i et d'évaluer à chaque fois l'énergie nécessaire à cette opération, l'énergie étant la somme de toutes ces contributions.

- Elle correspond donc a la somme de l'énergie interne
  De chaque paire considérée séparément



$$E_p = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

$$= k(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1 q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2 q_3}{r_{23}})$$

L'énergie électrostatique d'un ensemble de n charges ponctuelles est donc :

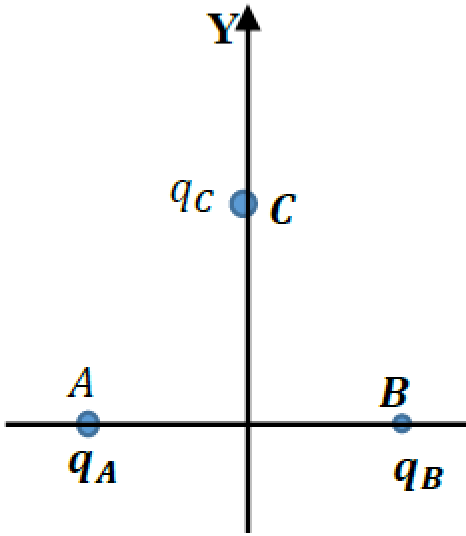
$$E_p = k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$E_p = \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$E_p = \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{n}q_i V_i(M_i)$$

Exercice 1

On considère trois charges ponctuelles $q_A = q, q_B = q \; et \; q_C = q$ $(q > 0)$ placées aux points $A(-a/2{,}0)$, $B(a/2{,}0)$ et $C(0, a)$ respectivement.



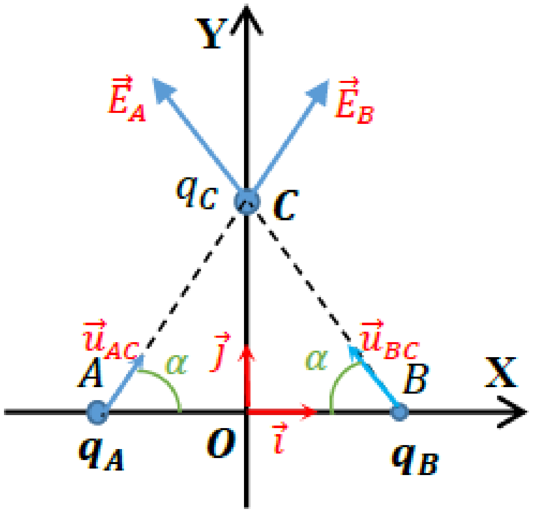
1. Déterminer le champ et le potentiel électrostatique créé au point C.
2. En déduire l'énergie potentiel de la charge q_C et la force qu'elle subit.

3. Calculer l'énergie interne du système.

4. Quelle est la valeur de la charge q_0 qu'il faut placer au point O pour que q_C ne subit a aucune force.

Solution :

1. $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(a/2)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

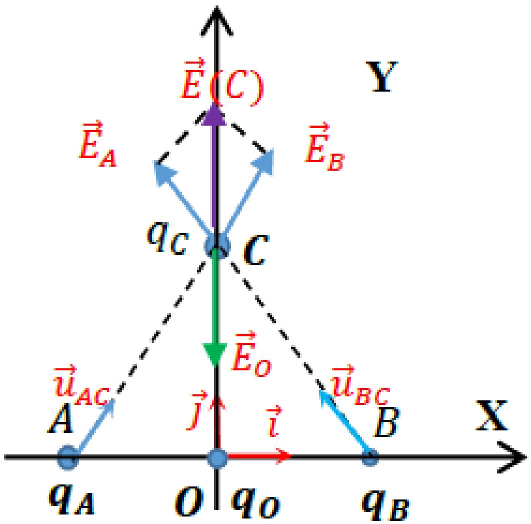


- $\vec{E}_A = \frac{Kq_A.}{\|\overrightarrow{AC}\|^2}\vec{u}_{AC} = \frac{4Kq}{5a^2}(-\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\,)$
- $\vec{E}_B = \frac{Kq_B.}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}\vec{u}_{BC} = \frac{4Kq}{5a^2}(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\,)$

$$\vec{E}(C) = \vec{E}_A + \vec{E}_B = 2\frac{4Kq}{5a^2}\sin\alpha\,\vec{j}$$

$\sin\alpha = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\vec{E}(C) = \frac{16Kq}{5\sqrt{5}a^2}\,\vec{j}$$



$V(C) = V_{q_A} + V_{q_B} = K\frac{q_A}{AC} + K\frac{q_B}{BC} = \frac{4Kq}{\sqrt{5}a}$

2. $E_P(C) = q_A V(C) = \frac{4Kq^2}{\sqrt{5}a}$

$\vec{F} = q_C.\vec{E}(C) = \frac{16Kq^2}{5\sqrt{5}a^2}\,\vec{j}$

3. Energie du système

$$E_i = K\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{2Kq^2}{\sqrt{5}a} + \frac{2Kq^2}{\sqrt{5}a} + \frac{Kq^2}{a} = \frac{Kq^2}{a}\left(1 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

4. Pour que la force au point C soit nul il faut que le champ au point C soit nul

$$\vec{E}'(C) = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_O = \vec{0} \rightarrow \vec{E}'(C) = \vec{E}\ \ (C) + \vec{E}_O = \vec{0}$$

$$\vec{E}_O = \frac{kq_O}{\left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2}\vec{u}_{OC}$$

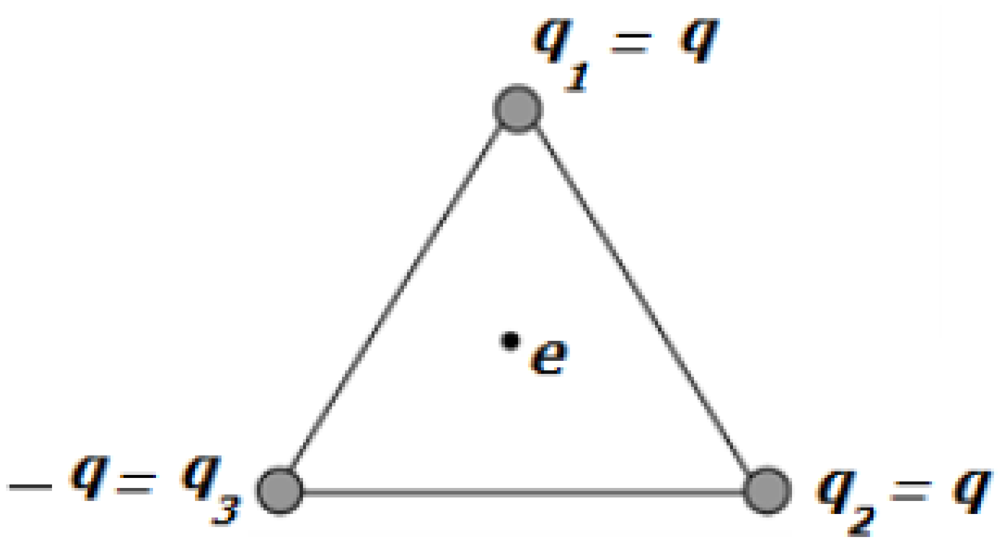
$$\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = a, \quad \vec{u}_{OC} = \vec{j}$$

$$\vec{E}'(C) = \vec{E}(C) = \frac{16Kq}{5\sqrt{5}a^2}\,\vec{j} + \frac{Kq_0}{a^2}\,\vec{j} = \vec{0} \rightarrow \frac{16Kq}{5\sqrt{5}a^2} = -\frac{Kq_0}{a^2} \rightarrow q_0 = -\frac{16q}{5\sqrt{5}}$$

Exercice 2

On reprend l'exemple précédent ou trois charges sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de coté *a*, Un électron *e* est placé au centre du triangle.

1. Calculer le potentiel électrique appliqué sur l'électron?
2. Déduire son énergie potentielle
3. Calculer l'énergie interne du système formé par les trois charges sans l'électron



1. Le potentiel total appliqué sur l'électron est

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad \Rightarrow \quad V = K\frac{q_1}{r} + K\frac{q_2}{r} + K\frac{q_3}{r}$$

Comme $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$ alors $V = \frac{\sqrt{3}}{a} K(q_1 + q_2 + q_3)$

Donc $V = \sqrt{3}\, K\frac{q}{a} \quad (Volts)$

2. Energie potentielle de l'électron

$$E_p = e\,V \quad \Rightarrow \quad E_p = \sqrt{3}\, K\frac{e\,q}{a} \quad (joules)$$

3. Energie interne des trois charges

$$U_{int} = U_{12} + U_{13} + U_{23} \quad \Rightarrow \quad U_{int} = K\frac{q_1\,q_2}{a} + K\frac{q_1\,q_3}{a} + K\frac{q_2\,q_3}{a}$$

$$U_{int} = K\frac{q^2}{a} - K\frac{q^2}{a} - K\frac{q^2}{a}$$

On aura finalement

$$U_{int} = -K\frac{q^2}{a} \qquad (Joules)$$