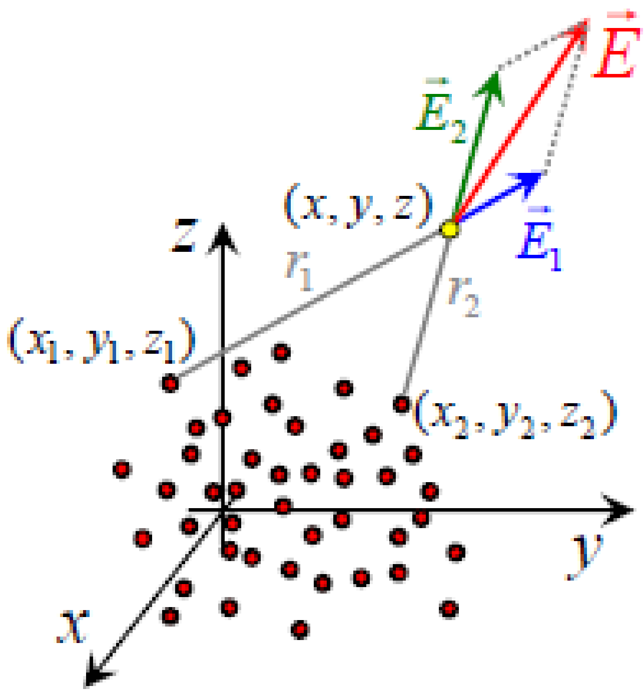
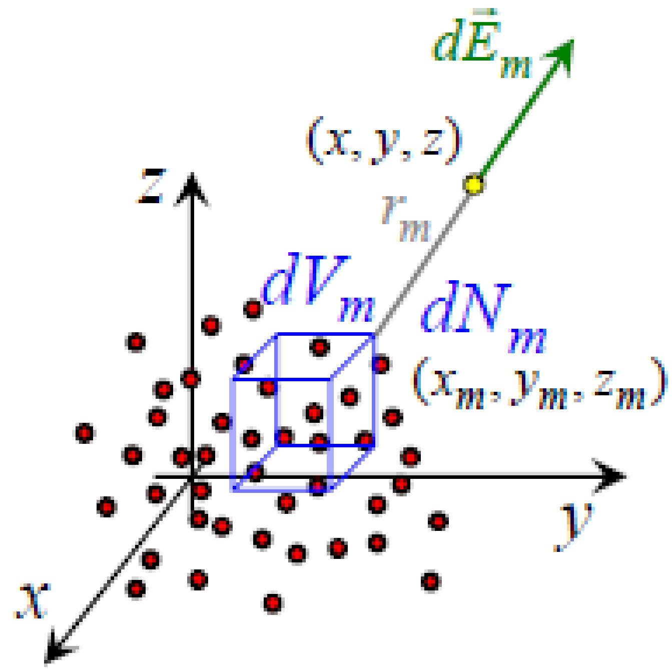
Chapitre 2-2
Champ et potentiel électrique
Distribution continue de charge

1. Distribution linéique de charge
2. Exemple du fil infini
3. Distribution surfacique de charge
4. Distribution volumique de charge
5. Relations champ - potentiel

Passage d'une distribution discrète de charge à une distribution continue

Dès que le nombre de charges augmente, les calculs du champ par une somme discrète deviennent trop complexes. Dans beaucoup de cas on pourra faire l'approximation que la charge électrique est répartie de manière continue dans l'espace.





Pour calculer le champ électrique, en un point P, dû à une distribution de charge uniformément répartie dans une certaine région de l'espace, on divise l'espace en petits morceaux contenant chacun une charge dq, distants de r du point P

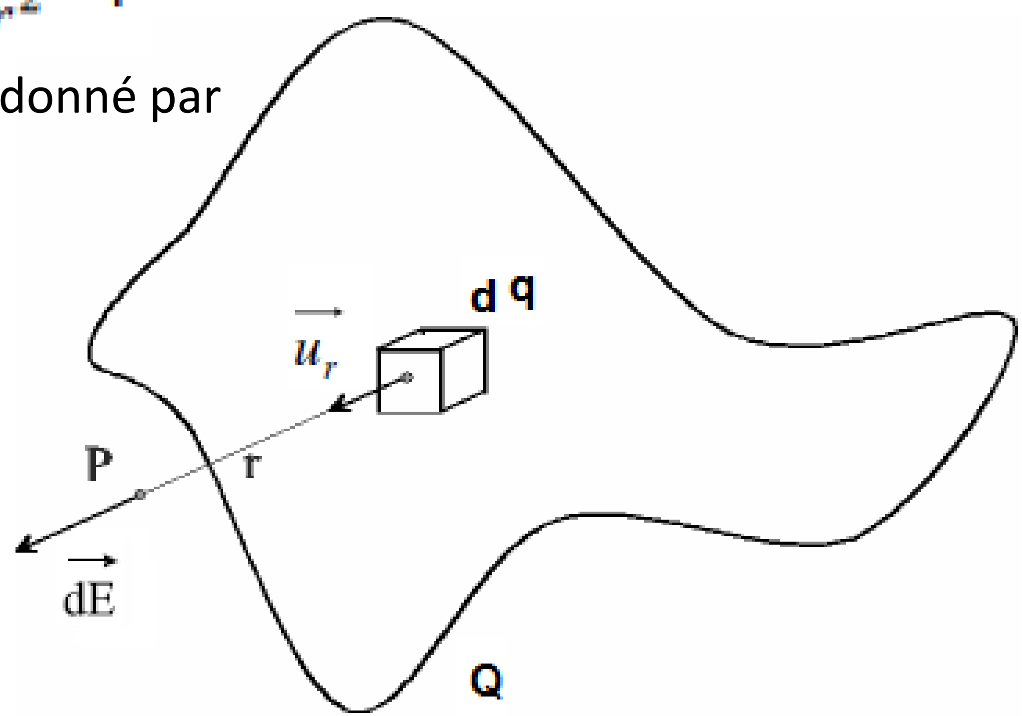
La charge dq a été choisie suffisamment petite pour pouvoir être considérée comme ponctuelle. Dès lors le champ électrique dE en P dû à dq est donné par la loi de Coulomb :

$$\overrightarrow{dE}\,(\mathrm{p}) = k\,\frac{dq}{r^2}\,\vec{u}_{\mathrm{r}}$$

Le champ résultant en P est alors donné par

$$\vec{E}(P) = \int d\vec{E}(P)$$

$$\vec{E} = k\int \frac{dq}{r^2}\,\vec{u}_{\mathrm{r}}$$



Distribution linéique de charge

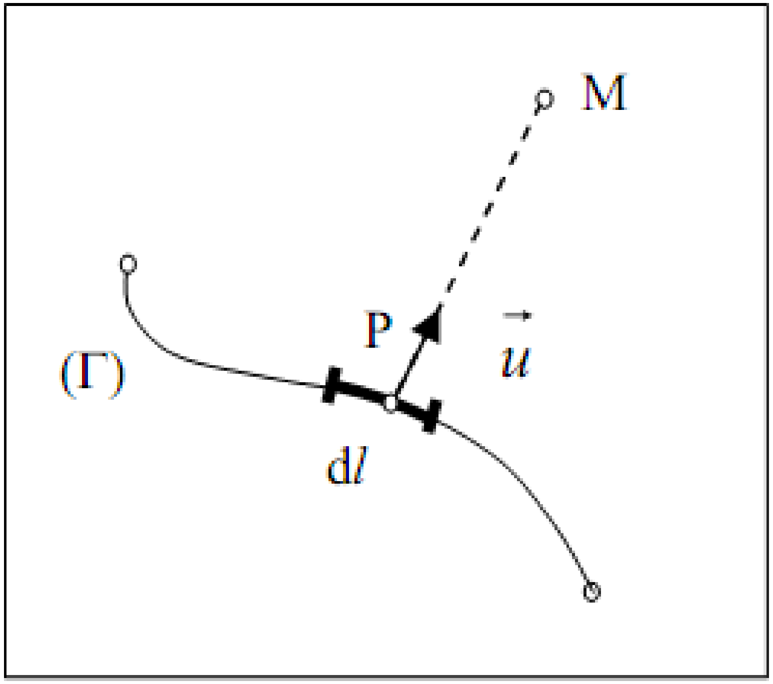
On défini la densité linéique de charge par

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \qquad (Coulomb/m)$$

$$dq = \lambda \, dl$$

$$\overrightarrow{dE}\,(\mathrm{p}) = \frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{E} = k\int \frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}$$



Champ créé par un fil infini

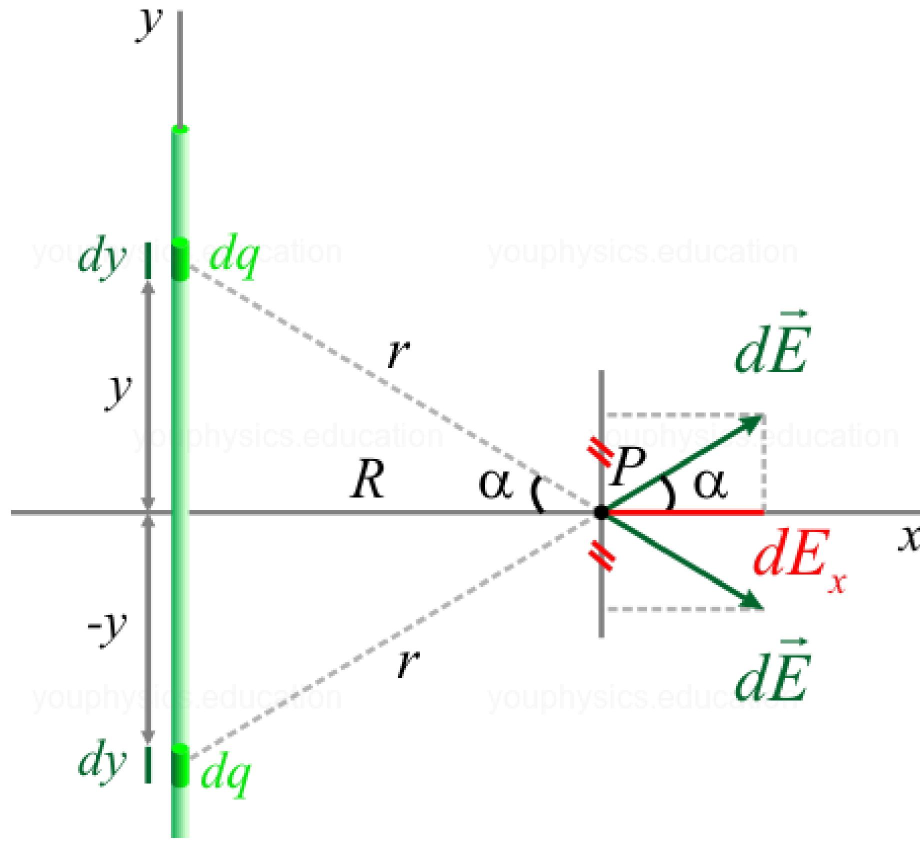
Soit une ligne droite infinie de section négligeable, et portant une charge linéique uniforme λ. Le but de l'exercice est de calculer le champ électrique en tout point *M* de l'espace.

Comme nous l'avons indiqué dans le cours, il faut découper la ligne en petits éléments de longueur *dl ,* chacun de ces éléments portant une charge *dq. On calcul le* champ créé par cette charge *au point M :*

Dans un premier temps, nous calculerons le champ créé en un point P par un élément du fil de charge dq et de longueur dy. Cet élément de charge se trouve à une distance r du point P. dq peut être considéré comme étant une charge ponctuelle, le champ qu'il crée au point P est donc:

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r$$

Lorsque l'on fait la somme vectorielle des deux champs ***dE*** créés par deux éléments symétriques, la composante verticale du champ s'annule. Ce même argument est valable pour tous les éléments de charge et leurs symétriques. La norme du champ total sera donc l'intégrale des projections sur l'axe horizontal de ***dE***. La norme du champ électrostatique créé par le fil au point P est par conséquent:



$$E=\int_{-\infty}^{+\infty} dE_x=\int_{-\infty}^{+\infty} dE\cos\alpha$$

Nous pouvons écrire l'intégrale précédente en fonction de l'angle α en écrivant *r* et *y* de la façon suivante:

$$y=R\tan\alpha;\quad dy=\frac{R}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$r=\frac{R}{\cos\alpha}$$

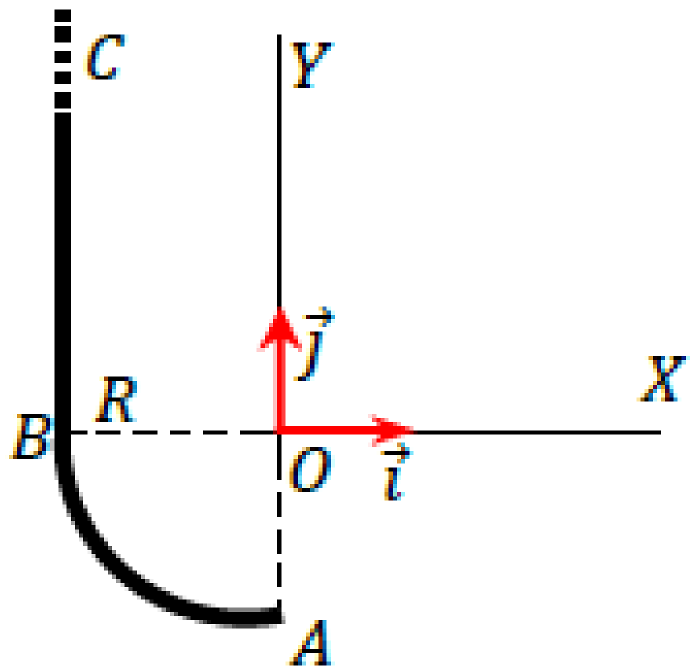
$$E=\int_{-\infty}^{+\infty} k\frac{\lambda\,dy}{r^2}\frac{R}{r}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\alpha\,d\alpha$$

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

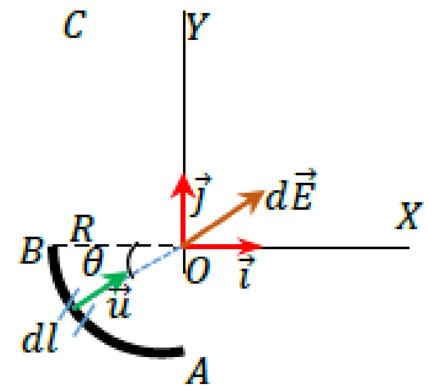
Exercice 02:

Soit un fil non conducteur chargé uniformément avec une densité linéique λ positive, formé par deux segments. Un segment AB courbé sous forme d'un quart de cercle de rayon R et un segment BC droit sous forme d'un fil semi-infini.

1- Déterminer les deux composantes du champ électrique crées par le fil au point O.



Solution :



Le champ électrique total $\vec{E}(O)$ créé au point O est la contribution des deux champs électrique $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ créés par les segments de fil AB et BC respectivement.

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

1- Calcul du champ électrique $\vec{E}_1$ du segment AB

Soit un élément de longueur dl de segment AB. Cet élément porte une charge élémentaire dq, génère un champ électrique $d\vec{E}_1$ au point O donnée par la relation :

$$d\vec{E}_1 = \frac{kdq}{r^2}\vec{u}$$

On a : $r = R$ et $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$

$\vec{u} = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$

On a : $r = R$ et $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$

$\vec{u} = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$

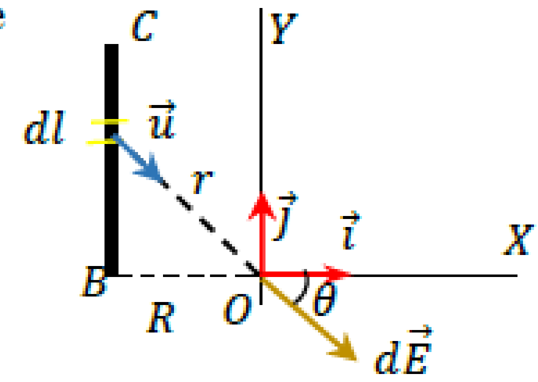
$$\Rightarrow d\vec{E}_1 = \begin{cases} dE_x = dE_1 \cos\theta = \dfrac{k\lambda R \cos\theta d\theta}{R^2} = \dfrac{k\lambda \cos\theta d\theta}{R} \\ dE_y = dE_1 \sin\theta = \dfrac{k\lambda R \sin\theta d\theta}{R^2} = \dfrac{k\lambda \sin\theta d\theta}{R} \end{cases}$$

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} E_x = \displaystyle\int dE_1 \cos\theta = \frac{k\lambda}{R}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{R}\ \sin\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{k\lambda}{R} \\ E_y = \displaystyle\int dE_1 \sin\theta = \frac{k\lambda}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{R}\ (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{k\lambda}{R} \end{cases}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{k\lambda}{R}\,\vec{i} + \frac{k\lambda}{R}\,\vec{j} = \frac{k\lambda}{R}\,(\vec{i} + \vec{j})$$

1- Calcul du champ électrique $\vec{E}_2$ du segment BC

Soit un élément de longueur dl d'ordonnée y porte une charge élémentaire charge élémentaire dq, génère un champ électrique $d\vec{E}_1$ au point O donnée par la relation :



$$d\vec{E}_2 = \frac{kdq}{r^2}\vec{u}$$

On a : $dq = \lambda dl = \lambda dy$

$\vec{u} = \cos\theta\ \vec{i} - \sin\theta\ \vec{j}$

$$\Longrightarrow d\vec{E}_2 = \begin{cases} dE_x = dE_2\cos\theta = \dfrac{k\lambda\cos\theta\, dy}{r^2} \\ dE_y = -dE_2\sin\theta = -\dfrac{k\lambda\sin\theta\, dy}{r^2} \end{cases}$$

On exprime tout en fonction de téta (θ):

$$\cos\theta = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\cos\theta}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R\operatorname{tg}\theta \Rightarrow dy = \frac{R}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

Donc

$$\Rightarrow \begin{cases} dE_x = dE\cos\theta = \dfrac{k\lambda dy}{r^2}\cos\theta = \dfrac{k\lambda \dfrac{R}{\cos^2\theta}\,d\theta}{(\dfrac{R}{\cos\theta})^2}\cos\theta = \dfrac{k\lambda}{R}\cos\theta\,d\theta \\ dE_y = -dE\sin\theta = -\dfrac{k\lambda dy}{r^2}\sin\theta = -\dfrac{k\lambda \dfrac{R}{\cos^2\theta}\,d\theta}{\left(\dfrac{R}{\cos\theta}\right)^2}\sin\theta = -\dfrac{k\lambda}{R}\sin\theta\,d\theta \end{cases}$$

En intégrant entre 0 et $\pi/2$:

$$E_x = \int_0^{\pi/2} \frac{k\lambda}{R}\cos\theta\,d\theta = \frac{k\lambda}{R}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{k\lambda}{R}$$

$$E_y = -\int_0^{\pi/2} \frac{k\lambda dy}{R^2}\sin\theta = \frac{k\lambda}{R}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -\frac{k\lambda}{R}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{k\lambda}{R}(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{k\lambda}{R}(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{k\lambda}{R}(\vec{i} - \vec{j}) = \frac{2k\lambda}{R}\vec{i}$$

Distribution surfacique de charge

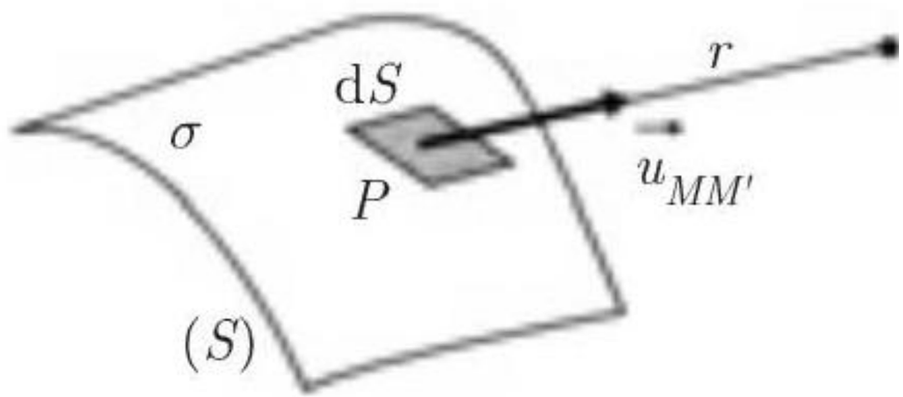
On défini la densité surfacique de charge par

$$\sigma = \frac{dq}{ds} \qquad (Coulomb/m^2)$$

$$dq = \sigma\, ds$$

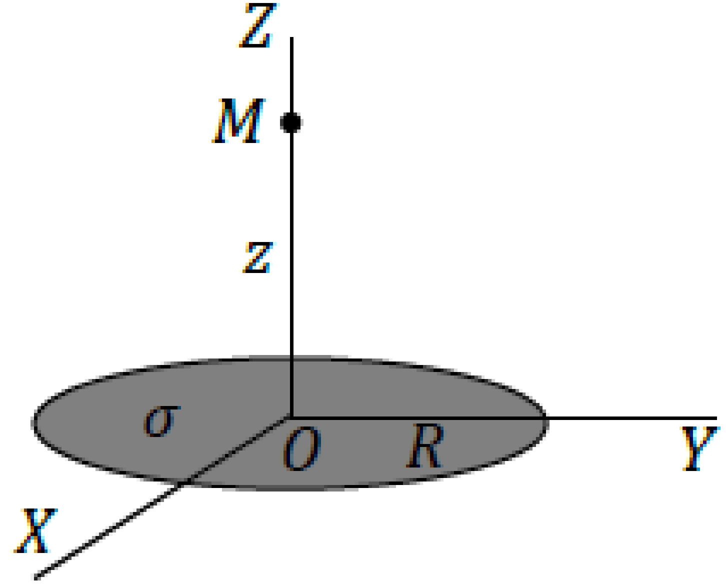
$$\overrightarrow{dE} = K\frac{\sigma\, ds}{r^2}\,\vec{u}$$

$$\vec{E} = K\int \frac{\sigma\, ds}{r^2}\,\vec{u}$$



Exercice

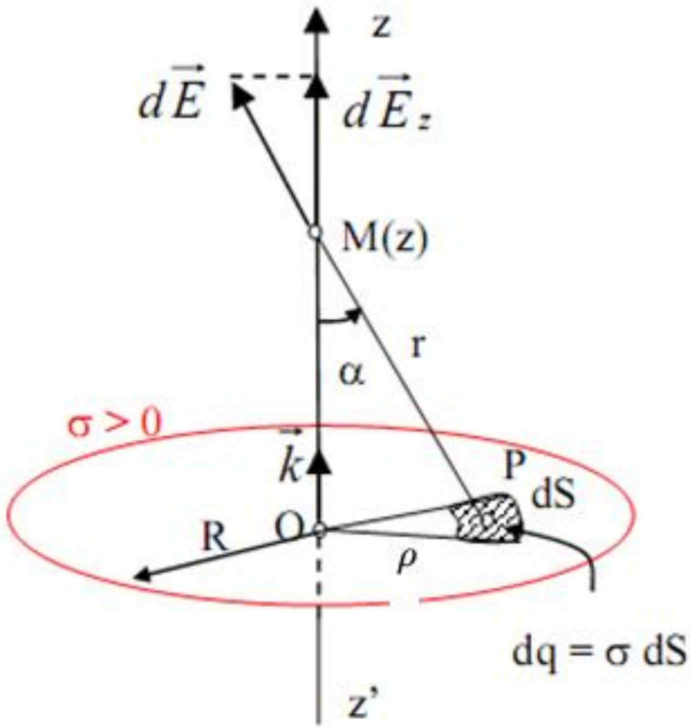
Un disque de rayon R est centré en O dans le plan (XOY). Il porte une densité superficielle de charge uniforme $\sigma > 0$ (Figure ci-contre). Calculer le champ électrique créé par ce disque en un point M de son axe $Z'Z$, tel que $OM = z > 0$. Que devient ce champ dans les cas suivants : $a)$ $R \to +\infty$, $b)$ $z < 0$

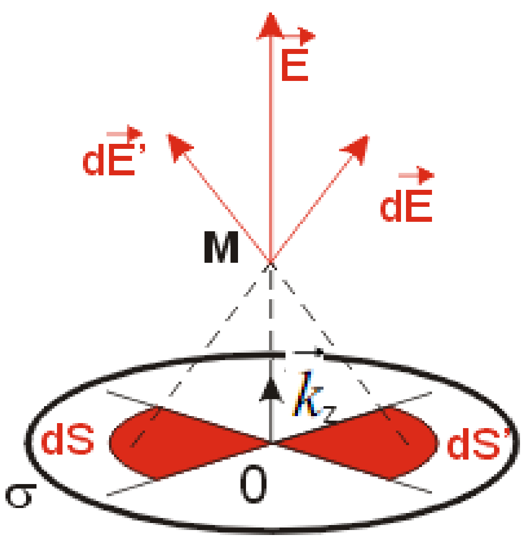


Solution

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}$$

$$E = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$





En faisant composition vectorielle des champs élémentaires $d\vec{E}$ et $d\overrightarrow{E'}$ crées par les éléments de surface dS et dS' symétriques par rapport à O, on voit que le champ est porté par $\vec{k}$

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E \cos\alpha$$

Le champ total E est la somme des projections des champs élémentaires $d\vec{E}$ sur l'axe Oz :

$$E = \iint_{\text{disque}} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\alpha$$

Tous les éléments de surface $dS_1, dS_2 \ldots$ appartenant à un même anneau

apporte la même contribution au champ total (s, α, r identiques)

$$E = \iint_{\text{disque}} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\alpha (dS_1 + dS_2 + \ldots) = \int_0^R \frac{\sigma \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 2\pi.\, \rho d\rho$$

où $2\pi\rho d\rho$ est la surface d'un anneau de rayon ρ et de largeur $d\rho$.

$$r = \frac{z}{\cos\alpha} \qquad \rho = z tg\alpha \qquad d\rho = z\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$\alpha_{\max}$ étant l'angle sous lequel on voit de M la périphérie du disque.

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\alpha_{\max}} \sin\alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [-\cos\alpha]_0^{\alpha_{\max}}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos\alpha_{\max})$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

Distribution volumique de charge

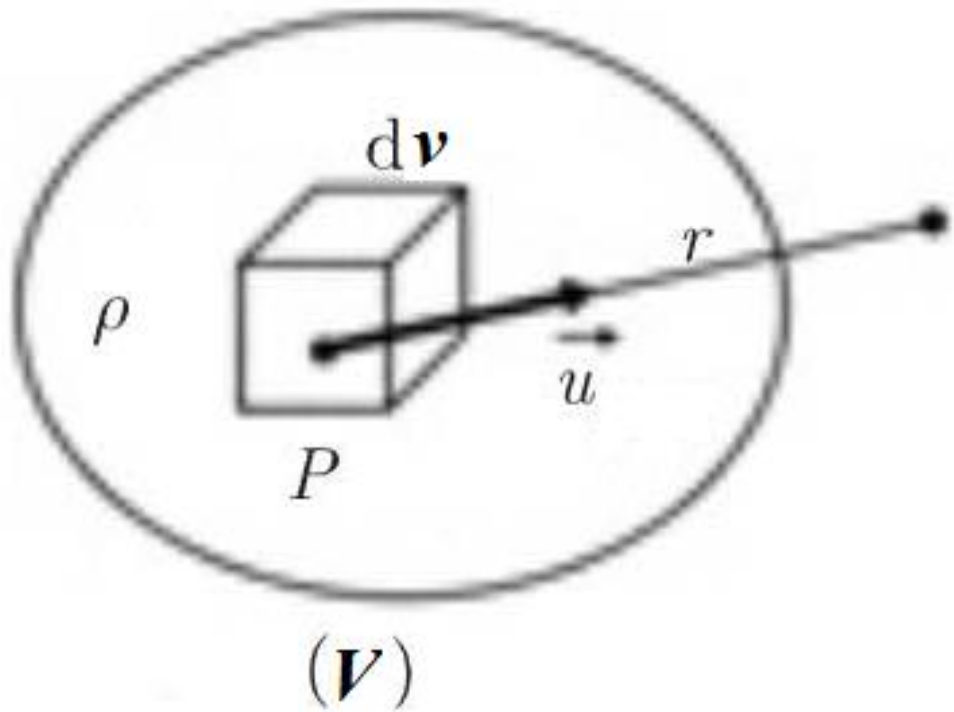
On défini la densité volumique de charge par

$$\rho = \frac{dq}{dv} \qquad (Coulomb/m^3)$$

$$dq = \rho\, dv$$

$$\overrightarrow{dE} = K \frac{\rho\, dv}{r^2}\, \vec{u}$$

$$\vec{E} = K \int \frac{\rho\, dv}{r^2}\, \vec{u}$$



Relations de passage entre le champ et le potentiel électrostatique

De façon générale, la présence d'une charge q en un point M où le champ est $\vec{E}$ se traduit par une interaction caractérisée par deux propriétés :

– une propriété vectorielle, la force exercée sur la charge q (en particulier l'expression de la loi de Coulomb) :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$$

– une propriété scalaire, l'énergie potentielle définie à une constante près comme le potentiel :

$$\boxed{E_{\mathrm{p}} = qV_M}$$

– et une relation entre les deux propriétés :

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_{\mathrm{p}}}$$

En divisant cette dernière équation de part et d'autre par la charge *q* on obtient :

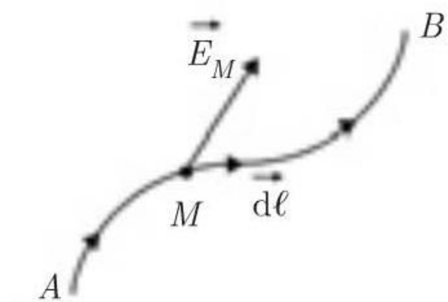
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

La loi $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ permet de déterminer $\vec{E}$ en un point quelconque si V est connu en ce point (ou l'inverse). Elle présente un caractère général, libéré de toute considération de symétrie susceptible d'apparaître à l'échelle globale.

Circulation du champ électrique

Soit un parcours AB orienté de A vers B. La circulation du champ $\vec{E}_M$ sur un élément de parcours $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,\mathscr{C} &= \vec{E}_M \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_M \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\mathrm{d}V_M \end{aligned}$$



On en déduit les relations :

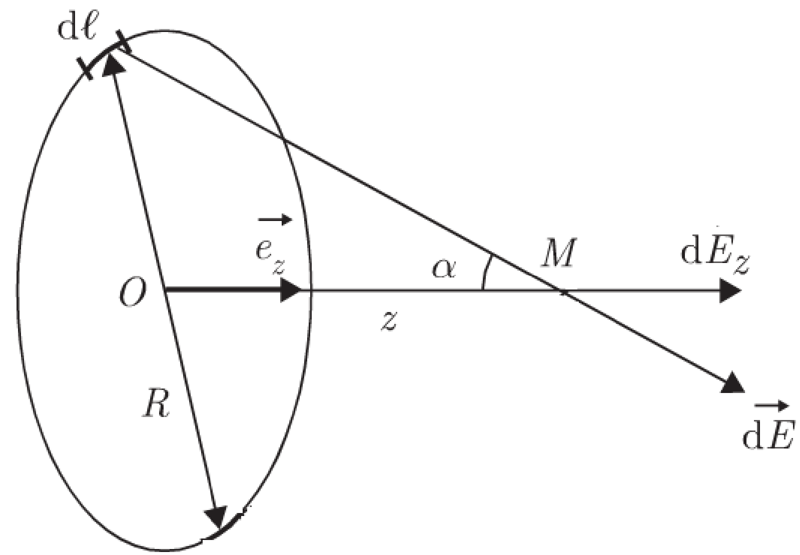
$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\mathrm{d}V$$

$$\boxed{\int_{\widehat{AB}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = V_A - V_B}$$

Exemple *Champ créé par un fil circulaire portant une densité de charge uniforme* λ*, en un point M de son axe* ($\overline{OM} = z$).

1) Calcul direct du champ $\vec{E}$

Par raison de symétrie, seule la composante de $\overrightarrow{\mathrm{d}E}$ sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$ intervient : $\vec{E}$ est porté par $\vec{e}_z$.



On a successivement :

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E \cos\alpha$$
$$= \frac{K\,\mathrm{d}q}{z^2 + R^2} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$

avec $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}\ell$

$$E_z = \frac{K\lambda z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} \mathrm{d}\ell$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda\,Rz}{2\varepsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

2) Calcul direct du potentiel

$$dV = \frac{K\,dq}{(z^2+R^2)^{1/2}} = \frac{K\lambda\,d\ell}{(z^2+R^2)^{1/2}}$$

$$V = \frac{K\lambda}{(z^2+R^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi R} d\ell$$ On trouve : $$V(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}}$$

3) Calcul du champ à partir du potentiel

$$V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}} + \text{Cte} \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$$

On a successivement :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_{(z)} = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$