

Corrigé de la série de T.D. N 2 : Equations différentielles

Exercice n° 1. Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

1.

$$(1 + x^2)^2 \frac{dy}{dx} + 2x + 2xy^2 = 0 \dots\dots (1)$$

Solution :

$$\begin{aligned} (1) \implies (1 + x^2)^2 \frac{dy}{dx} &= -2x(1 + y^2) \\ \implies \frac{1}{1+y^2} dy &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx \text{ (cette équation est à variables séparées)} \\ \implies \int \frac{1}{1+y^2} dy &= \int \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx = - \int 2x(1 + x^2)^{-2} dx \\ \implies \arctan y &= -\frac{1}{-2+1} (1 + x^2)^{-2+1} + c, c \in \mathbb{R} \\ \implies \arctan y &= \frac{1}{1+x^2} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = \tan \left(\frac{1}{1+x^2} + c \right), c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (1).

2.

$$\begin{cases} (x^2 + y^2) dx - xydy = 0 \dots\dots (2) \\ y(1) = 2 \end{cases} \dots\dots (I)$$

Solution :

- On va résoudre d'abord l'équation (2)

$$\begin{aligned} (2) \implies (x^2 + y^2) dx &= xydy \\ \implies \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2+y^2}{xy} \\ \implies y' &= \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \\ \implies y' &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ \implies y' &= \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)} + \left(\frac{y}{x}\right) \dots\dots (2') \end{aligned}$$

Cette équation (2') est homogène car elle est de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, avec $f(v) = \frac{1}{v} + v$.

On pose le changement d'inconnue suivant : $v = \frac{y}{x}$. On a

$$\begin{aligned} v = \frac{y}{x} &\implies y = xv \\ &\implies y' = v + xv'. \end{aligned}$$

Puis, on remplace y' dans (2') et on obtient

$$\begin{aligned} (2') \implies v + xv' &= \frac{1}{v} + v \\ \implies xv' &= \frac{1}{v} \\ \implies v \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{x} \\ \implies v dv &= \frac{1}{x} dx \text{ (cette équation est à variables séparées d'inconnue)} \\ \implies \int v dv &= \int \frac{1}{x} dx \\ \implies \frac{1}{2} v^2 &= \ln |x| + c, c \in \mathbb{R} \\ \implies v^2 &= 2 \ln |x| + 2c, c \in \mathbb{R} \\ \implies v &= \pm \sqrt{2 \ln |x| + C}, C = 2c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Mais on a posé $y = xv$, alors

$$y(x) = \pm x \sqrt{2 \ln |x| + C}, C \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (2)

On a $y(1) = 2$ donc $y(1) = \pm 1 \sqrt{2 \ln |1| + C} = 2 \Rightarrow \sqrt{C} = 2 \Rightarrow C = 4$. Finalement,

$$y(x) = \pm x \sqrt{2 \ln |x| + 4}$$

est la solution du problème (I).

3.

$$y' + y = x^2 \dots\dots (3)$$

Solution :

(3) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée à (3) est

$$y' + y = 0 \dots (E.H)$$

Résolution de l'équation homogène (E.H) : On a

$$(E.H) \Leftrightarrow y' = -y$$

Pour $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = -1 &\implies \frac{dy}{y} = -dx \\ &\implies \int \frac{dy}{y} = \int -dx \\ &\implies \ln |y| = -x + c, c \in \mathbb{R} \\ &\implies |y| = e^{-x+c}, c \in \mathbb{R} \\ &\implies y = C_1 e^{-x}, C_1 = \pm e^c \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

$y = 0$ est une solution évidente de (E.H). Finalement, la solution générale de (E.H) est

$$y(x) = k e^{-x}, k \in \mathbb{R}.$$

Variation de la constante : On fait varier la constante k et la solution générale de (3) sera

$$y(x) = k(x) e^{-x}.$$

On a $y'(x) = k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x}$. Par suite

$$\begin{aligned} y' + y = x^2 &\implies k'(x) e^{-x} = x^2 \\ &\implies k'(x) = x^2 e^x \\ &\implies k(x) = \int x^2 e^x dx. \end{aligned}$$

On peut utiliser l'intégration par parties deux fois pour calculer $\int x^2 e^x dx$. Il est souvent préférable d'utiliser la méthode de coefficients indéterminés, et on cherche une primitive de $x \mapsto x^2 e^x$ sous la forme $(ax^2 + bx + c) e^x$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\int x^2 e^x dx = (ax^2 + bx + c) e^x, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\begin{aligned} [(ax^2 + bx + c) e^x]' = x^2 e^x &\implies (2ax + b) e^x + (ax^2 + bx + c) e^x = x^2 e^x \\ &\implies (ax^2 + (2a + b)x + b + c) e^x = x^2 e^x. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2. \end{cases}$$

D'où

$$k(x) = \int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x + c, c \in \mathbb{R}$$

On a $y(x) = k(x) e^{-x}$, donc

$$y(x) = ((x^2 - 2x + 2) e^x + c) e^{-x}, c \in \mathbb{R}.$$

Finalement,

$$y(x) = x^2 - 2x + 2 + ce^{-x}, c \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (3).

Exercice n° 2. Résoudre les équations différentielles non linéaires du premier ordre suivantes :

1.

$$xy' + 6y - 3xy^{\frac{4}{3}} = 0 \dots\dots (E)$$

Solution :

L'équation différentielle (E) est de Bernoulli.

$$(E) \iff \frac{xy'}{y^{\frac{4}{3}}} + 6 \left(\frac{y}{y^{\frac{4}{3}}} \right) - 3x = 0, \text{ pour } y \neq 0.$$

Considérons le changement d'inconnue $z = \frac{y}{y^{\frac{4}{3}}} = y^{-\frac{1}{3}}$. Alors, on aura

$$z' = -\frac{1}{3} y^{-\frac{4}{3}} y'.$$

D'où

$$y' = -3y^{\frac{4}{3}} z'.$$

En substituant dans l'équation (E) les expressions de y et de y' , on obtient

$$\begin{aligned} (E) &\iff \frac{xy'}{y^{\frac{4}{3}}} + 6 \left(\frac{y}{y^{\frac{4}{3}}} \right) - 3x = 0 \\ &\iff -3xz' + 6z - 3x = 0. \end{aligned}$$

D'où, pour $x \neq 0$

$$z' - \frac{2}{x}z = -1 \dots\dots (E').$$

L'équation (E') est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z .

L'équation homogène associée à (E') est

$$z' - \frac{2}{x}z = 0 \dots\dots (E'.h)$$

Résolution de l'équation (E'.h) : Pour $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} (E'.h) &\Rightarrow \frac{z'}{z} = \frac{2}{x}, \\ &\Rightarrow \ln |z| = 2 \ln |x| + k, k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow |z| = e^{\ln x^2 + k}, k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow z = \pm e^k x^2, k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow z = C_1 x^2, C_1 = \pm e^k, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$z = 0$ est une solution évidente de $(E'.h)$. Finalement la solution générale de $(E'.h)$ est

$$z_h(x) = cx^2, c \in \mathbb{R},$$

Variation de la constante : On fait varier la constante c et la solution générale de (E') sera

$$z(x) = c(x)x^2.$$

On a $z'(x) = c'(x)x^2 + 2xc(x)$. Par suite,

$$\begin{aligned} z' - \frac{2}{x}z &= -1 \implies c'(x) = \frac{-1}{x^2} \\ &\implies c(x) = \int \frac{-1}{x^2} dx \\ &\implies c(x) = \frac{1}{x} + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où

$$z(x) = \left(\frac{1}{x} + \lambda\right)x^2, \lambda \in \mathbb{R},$$

ou d'une manière équivalente,

$$z(x) = x + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (E') . Mais on a

$$z = y^{\frac{-1}{3}}$$

Par suite,

$$y = \frac{1}{z^3}$$

D'où

$$y(x) = \frac{1}{(x + \lambda x^2)^3}, \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle de Bernoulli (E) .

2.

$$y' = x^2 + 1 - 2xy + y^2 \dots\dots\dots (E)$$

$(y_1 = x)$ est une solution particulière)

Solution :

L'équation (E) est une équation différentielle de Riccati. Considérons le changement d'inconnue

$$y = x + z.$$

Alors,

$$y' = 1 + z'.$$

En remplaçant y et y' dans (E) on obtient

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow 1 + z' = x^2 + 1 - 2x(x + z) + (x + z)^2, \\ &\Leftrightarrow z' = z^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{z'}{z^2} = 1 \dots\dots\dots (E')$$

L'équation (E') est à variables séparées. Donc

$$\begin{aligned} (E') &\Rightarrow \frac{dz}{z^2} = dx. \\ &\Rightarrow \int \frac{dz}{z^2} = \int dx, \\ &\Rightarrow \frac{-1}{z} = x + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$z(x) = \frac{-1}{x+c}, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (E') . Mais

$$y = x + z,$$

donc

$$y = \frac{-1}{x+c} + x, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (E) .

Exercice n° 3. Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes :

1.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \dots\dots (E_1)$$

Solution :

L'équation caractéristique de (E_1) est

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \dots\dots (E_1.C)$$

Cette équation $(E_1.C)$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de (E) est

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x}, A, B \in \mathbb{R}.$$

2.

$$y'' + 2y' + y = 0 \dots\dots (E_2)$$

Solution :

L'équation caractéristique de (E_2) est

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \dots\dots (E_2.C)$$

Cette équation $(E_2.C)$ admet la racine réelle double $r = -1$. Ainsi, la solution générale de (E_2) est

$$y(x) = (A + Bx)e^{-x}, A, B \in \mathbb{R}.$$

3.

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \dots\dots (E_3)$$

Solution :

L'équation caractéristique de (E_3) est

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \dots\dots (E_3.C)$$

Cette équation $(E_3.C)$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$. Ainsi, la solution générale de (E_3) est

$$y(x) = (A \sin x + B \cos x) e^x, A, B \in \mathbb{R}.$$

4.

$$y'' - 2\alpha y' + y = 0 \dots (E_4)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution :

L'équation caractéristique de (E_4) est

$$r^2 - 2\alpha r + 1 = 0 \dots (E_4.C)$$

On a $\Delta = 4\alpha^2 - 4$.

Dans l'étude des racines de l'équation caractéristique $(E_4.C)$, trois cas peuvent se présenter selon le signe du discriminant Δ .

$$\begin{aligned} \Delta > 0 & \text{ si } \alpha \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[; \\ \Delta = 0 & \text{ si } \alpha \in \{-1, 1\}; \\ \Delta < 0 & \text{ si } \alpha \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

Premier cas : Si $\alpha \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, on a : $\Delta > 0$ et l'équation $(E_4.C)$ admet deux racines réelles distinctes

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 - 4}}{2} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}, \\ r_2 &= \frac{2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 - 4}}{2} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E_4) est

$$y(x) = Ae^{(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})x} + Be^{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Deuxième cas : Si $\alpha \in \{-1, 1\}$, on a $\Delta = 0$ et l'équation $(E_4.C)$ admet une racine réelle double $r = \alpha$. Donc, la solution générale de (E_4) est

$$y(x) = (A + Bx)e^{\alpha x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Troisième cas : Si $\alpha \in]-1, 1[$ on a $\Delta < 0$ et l'équation $(E_4.C)$ admet deux racines complexes conjuguées

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2\alpha + i\sqrt{4 - 4\alpha^2}}{2} = \alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2} \\ r_2 &= \frac{2\alpha - i\sqrt{4 - 4\alpha^2}}{2} = \alpha - i\sqrt{1 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de (E_4) est

$$y(x) = \left(A \sin\left(\sqrt{1 - \alpha^2}\right)x + B \cos\left(\sqrt{1 - \alpha^2}\right)x \right) e^{\alpha x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice n° 4. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1.

$$y'' - y = x^2 + x + 1 \dots (E_1)$$

Solution :

L'équation homogène associée à (E_1) est

$$y'' - y = 0 \dots (E_1.H)$$

L'équation caractéristique de $(E_1.H)$ est

$$r^2 - 1 = 0 \dots (E_1.C)$$

Les racines de l'équation $(E_1.C)$ sont : $r_1 = -1, r_2 = 1$. Ainsi, la solution générale de $(E_1.H)$ est

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_1) :

On a le second membre de l'équation (E_1) est

$$f(x) = x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1) e^{0x}.$$

Comme 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_1.C)$, donc on cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c) e^{0x} = ax^2 + bx + c,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a

$$y_p'(x) = 2ax + b \quad \text{et} \quad y_p''(x) = 2a.$$

En substituant dans l'équation (E_1) les expressions de y_p et de y_p'' , on obtient

$$(E_1) \Rightarrow 2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow -ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + x + 1.$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a = 1, \\ -b = 1, \\ 2a - c = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = -1, \\ c = -3. \end{cases}$$

D'où, une solution particulière y_p de (E_1) est

$$y_p(x) = -x^2 - x - 3.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= -x^2 - x - 3 + Ae^{-x} + Be^x, \quad A, B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_1) .

2.

$$y'' - 2y' - 8y = e^x \dots (E_2)$$

Solution :

L'équation homogène associée à (E_2) est

$$y'' - 2y' - 8y = 0 \dots (E_2.H)$$

L'équation caractéristique de $(E_2.H)$ est

$$r^2 - 2r - 8 = 0 \dots (E_2.C)$$

Les racines de l'équation $(E_2.C)$ sont : $r_1 = -2, r_2 = 4$. Ainsi, la solution générale de $(E_2.H)$ est

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{4x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_2) :

On a le second membre de l'équation (E_2) est

$$f(x) = e^x = e^{1x}.$$

Comme 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_2.C)$, donc on cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme : $y_p(x) = ae^x$ où $a \in \mathbb{R}$. On a

$$y_p'(x) = ae^x \quad \text{et} \quad y_p''(x) = ae^x.$$

En substituant dans l'équation (E_2) les expressions de y_p , y_p' et de y_p'' , on obtient

$$(E_2) \Rightarrow ae^x - 2ae^x - 8ae^x = e^x,$$

Par identification, on obtient

$$\begin{aligned} \Rightarrow -9a &= 1 \\ \Rightarrow a &= \frac{-1}{9}. \end{aligned}$$

Donc, une solution particulière y_p de (E_2) est

$$y_p(x) = \frac{-1}{9}e^x.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= \frac{-1}{9}e^x + Ae^{-2x} + Be^{4x}, \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_2) .

3.

$$y'' - 2y' = \sin x \dots (E_3)$$

Solution :

L'équation homogène associée à (E_3) est

$$y'' - 2y' = 0 \dots (E_3.H)$$

L'équation caractéristique de $(E_3.H)$ est

$$r^2 - 2r = 0 \dots (E_3.C)$$

Les racines de l'équation $(E_3.C)$ sont : $r_1 = 0$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de $(E_3.H)$ est

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{0x} + Be^{2x}, \\ &= A + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_3) :

On a le second membre de l'équation (E_3) est

$$f(x) = \sin x = \sin(1x) e^{0x}.$$

Comme $0 + 1i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_3.C)$, donc on cherche une solution particulière y_p de l'équation (E_3) sous la forme

$$y_p(x) = a \sin x + b \cos x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

On a

$$y_p'(x) = a \cos x - b \sin x \text{ et } y_p''(x) = -a \sin x - b \cos x.$$

En substituant dans l'équation (E_3) les expressions de y_p, y_p' et de y_p'' , on obtient

$$\begin{aligned}(E_3) &\Rightarrow -a \sin x - b \cos x - 2(a \cos x - b \sin x) = \sin x, \\ &\Rightarrow (-a + 2b) \sin x + (-b - 2a) \cos x = \sin x.\end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a + 2b = 1, \\ -b - 2a = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5}, \\ b = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Donc une solution particulière y_p de l'équation (E_3) est

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A + Be^{2x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x, \quad A, B \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

est la solution générale de (E_3) .

4.

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x} \dots\dots (E_4) \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases} \dots\dots (I)$$

Solution :

- On va résoudre d'abord l'équation (E_4) :

L'équation homogène associée à (E_4) est

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \dots\dots (E_4.H)$$

L'équation caractéristique de $(E_4.H)$ est

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \dots\dots (E_4.C)$$

Les racines de l'équation $(E_4.C)$ sont : $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Ainsi, la solution générale de $(E_4.H)$ est

$$y(x) = Ae^x + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_4) :

On a le second membre de l'équation (E_4) est

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x}.$$

Comme -1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique $(E_4.C)$, donc on cherche une solution particulière de (E_4) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax + b)e^{-x}, \text{ où } a, b \in \mathbb{R}.$$

On a

$$y_p'(x) = (-ax + a - b)e^{-x} \text{ et } y_p''(x) = (ax - 2a + b)e^{-x}.$$

En substituant dans l'équation (E_4) les expressions de y_p, y'_p et de y''_p , on obtient

$$(E_4) \Rightarrow (ax - 2a + b)e^{-x} - 4(-ax + a - b)e^{-x} + 3(ax + b)e^{-x} = (2x + 1)e^{-x},$$
$$\Rightarrow 8ax - 6a + 8b = 2x + 1.$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 8a = 2, \\ -6a + 8b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{5}{16}. \end{cases}$$

Donc, une solution particulière y_p de (E_4) est

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x}.$$

Par suite,

$$Y(x) = y_p(x) + y(x)$$
$$= \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + Ae^x + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation (E_4) .

Pour le problème de Cauchy (I) , on a

$$Y(0) = 0 \Rightarrow \frac{5}{16} + A + B = 0 \dots (1)$$

On a aussi

$$Y'(x) = \left(\frac{-1}{4}x + \frac{-1}{16}\right)e^{-x} + Ae^x + 3Be^{3x}.$$

D'où

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{16} + A + 3B = 0 \dots (2)$$

De (1) et (2), on a

$$\begin{cases} \frac{5}{16} + A + B = 0 \\ \frac{-1}{16} + A + 3B = 0, \end{cases} \text{ d'où : } \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, \\ B = \frac{3}{16}. \end{cases}$$

Finalement,

$$Y(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{16}e^{3x},$$

est la solution de problème du Cauchy (I) .

Exercice n° 5. (Exercice supplémentaire) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $x \frac{dy}{dx} - (x + 1)y = 0$. (Réponse : $y(x) = \lambda x e^x, \lambda \in \mathbb{R}$).
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$. (Réponse : $y(x) = \lambda x + x \ln|x|, \lambda \in \mathbb{R}$).
3. $xy' - 2y = \frac{1}{2}x^3$. (Réponse : $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}$).
4. $y' - \frac{1}{x}y - xy^2 = 0$. (Réponse : $y(x) = \frac{1}{-\frac{x^2}{3} + \frac{\lambda}{x}}, \lambda \in \mathbb{R}$).
5. $y' = \frac{1}{x}y^2 - (2 + \frac{1}{x})y + x + 2$, ($y_1 = x$ est une solution particulière). (Réponse : $y(x) = x + \frac{1}{\lambda x + 1}, \lambda \in \mathbb{R}$).
6. $y'' - 5y' + 6y = 0$. (Réponse : $y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}, A, B \in \mathbb{R}$).

7. $4y'' + 4y' + y = 0$. (Réponse : $y(x) = (A + Bx)e^{-\frac{1}{2}x}$, $A, B \in \mathbb{R}$).

8. $y'' + y' + y = 0$. (Réponse : $y(x) = \left(A \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + B \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) e^{-\frac{1}{2}x}$, $A, B \in \mathbb{R}$).

9. $y'' - 2y' + my = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Réponse :

Si $m \in]-\infty, 1[$, $y(x) = Ae^{(1+\sqrt{1-m})x} + Be^{(1-\sqrt{1-m})x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Si $m \in]1, +\infty[$, $y(x) = (A \sin(\sqrt{m-1})x + B \cos(\sqrt{m-1})x) e^x$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Si $m = 1$, $y(x) = (Ax + B)e^x$, $A, B \in \mathbb{R}$.

10. $y'' - y' = 12x - 10$. (Réponse : $y(x) = A + Be^x - 6x^2 - 2x$, $A, B \in \mathbb{R}$).

11. $4y'' + 4y' + y = e^{-\frac{1}{2}x}$. (Réponse : $y(x) = (A + Bx + \frac{1}{8}x^2) e^{-\frac{1}{2}x}$, $A, B \in \mathbb{R}$).

12. $y'' + 4y = \cos x$. (Réponse : $y(x) = A \sin 2x + B \cos 2x + \frac{1}{3} \cos x$, $A, B \in \mathbb{R}$).

13. $y'' - 2y' + y = (x + 2)e^x$. (Réponse : $y(x) = (\frac{1}{6}x^3 + x^2 + Ax + B) e^x$, $A, B \in \mathbb{R}$).