Chapitre 4
Théorème de Gauss

1. Représentation d'une surface
2. Angle solide
3. Flux du champ
   à travers une surface
4. Théorème de Gauss
5. Applications

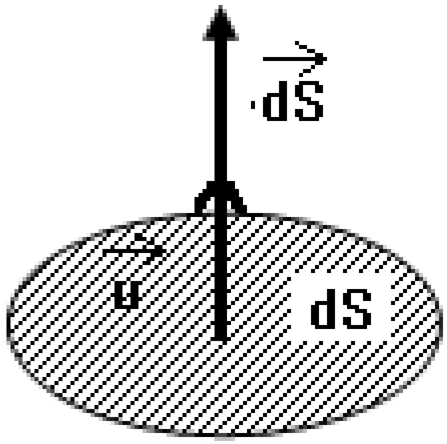
Johann Carl Friedrich Gauss

(30 avril 1777 – 23 février 1855)

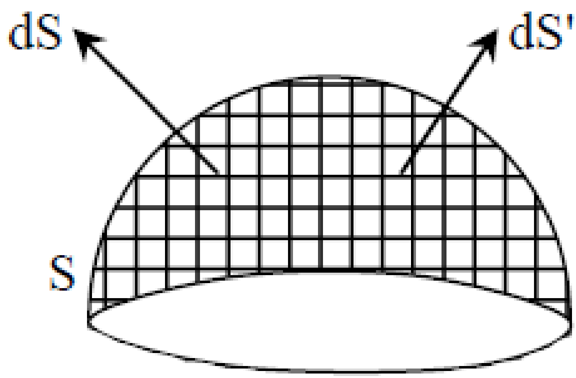
Représentation d'une surface

On représente une surface par un vecteur qui est perpendiculaire à cette surface et dont le module est égal à son l'aire.

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{u}$$



Une surface *S* quelconque est décomposée en surfaces élémentaires *ds*



Pour une surface fermée, les vecteurs sont orientés par convention vers l’extérieur

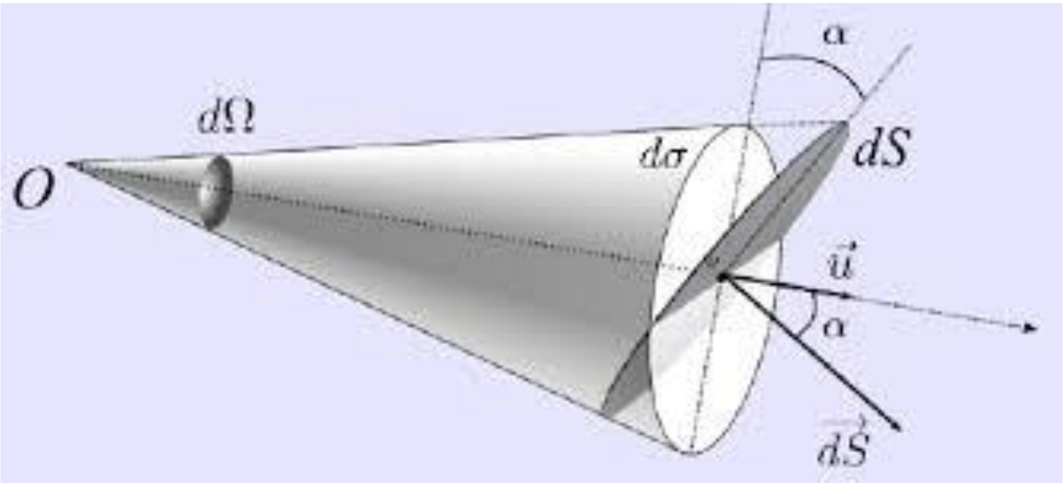
Angle solide

On définit l'angle solide dΩ sous lequel on voit une surface S d'orientation normale par :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \qquad [\Omega] = st\acute{e}radian : \mathrm{st}$$

Pour une surface d'orientation quelconque on aura

$$d\Omega = \overrightarrow{u}.\frac{d\vec{S}}{r^2} = \frac{dS.\cos\alpha}{r^2}$$

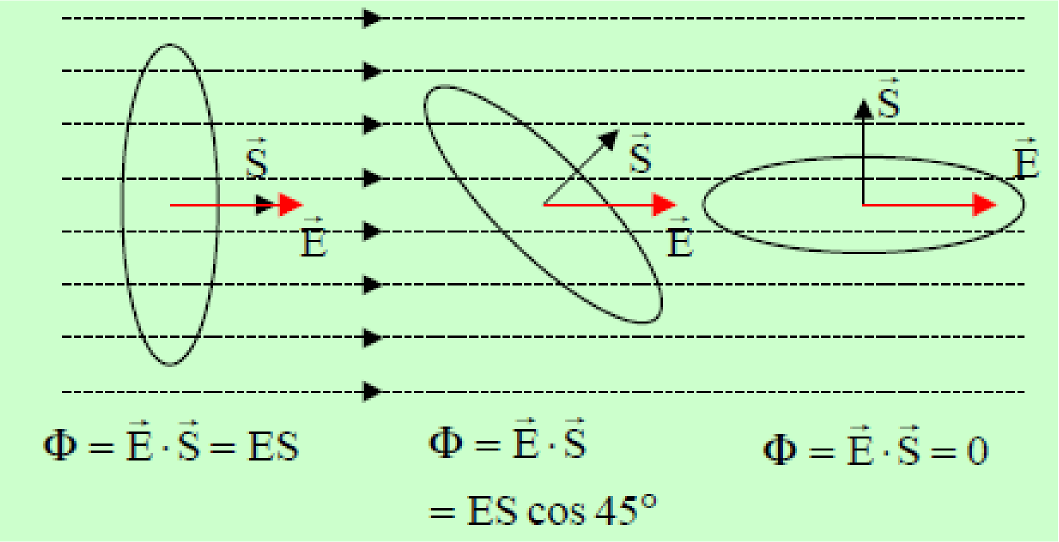


Cette définition conduit au résultat suivant :

- pour tout l'espace : $\Omega = \frac{S}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \ \ st$

Flux du champ à travers une surface

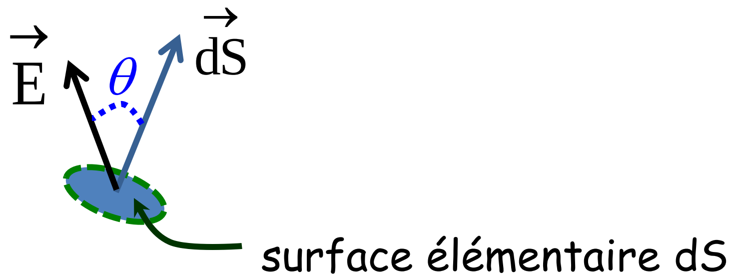
Flux d'un champ uniforme à travers une surface plane



Remarques : $\Phi = ES$ quand $\mathbf{E} \perp$ surface

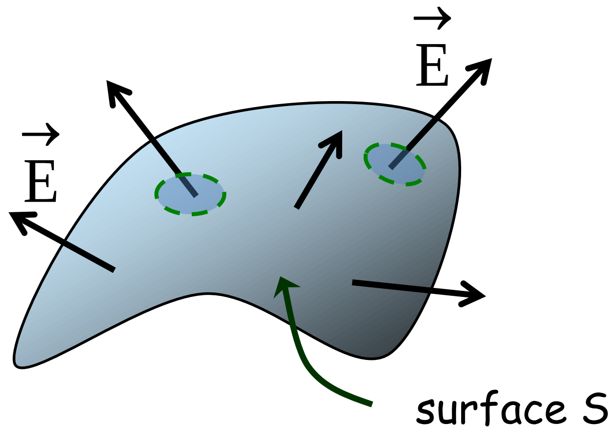
$\Phi = 0$ quand $\mathbf{E}$ // surface

Flux élémentaire du champ à travers une surface élémentaire:



$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = \left\|\vec{E}\right\| \left\|\vec{dS}\right\| \cos\theta$$

Flux du champ à travers une surface finie



$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Flux à travers une surface fermée
Cas d'une charge ponctuelle

Soit une surface fermée (S) à l'intérieur de laquelle se trouve une charge Q_i.

Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ (qui est un vecteur)

à travers la surface $\overrightarrow{dS}$ est :

$$d\Phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.dS.cos\theta$$

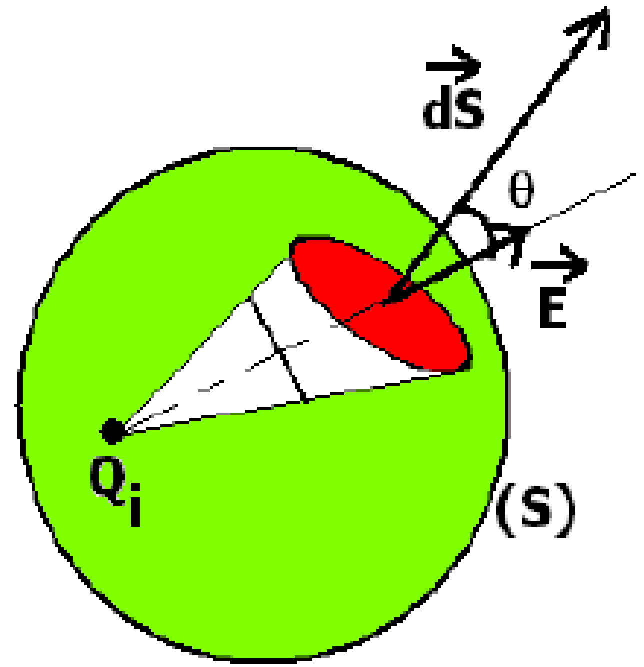
Or : $E = \frac{kQ_i}{r^2}$

Donc: $d\Phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{kQ_i}{r^2}.dS.cos\theta = kQ_i\, d\Omega$

$$\Longrightarrow \Phi = \int k\, Q_i\, d\Omega = kQ_i \int d\Omega$$

Or : $\int d\Omega = 4\pi$ (*pour tout l'espace*),

Donc : $\Phi = kQ_i \int d\Omega = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$



Théorème de Gauss

flux de $\vec{E}$ à travers la surface **fermée** de Gauss S_G

champ en un point **quelconque** M de S_G

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

charge électrique **à l'intérieur** de S_G

S_G: surface **fermée** de Gauss

vecteur surface élémentaire au point M

Cette relation permet de calculer aisément le champ lorsque la distribution des charges présente une symétrie élevée.

METHODE DE CALCUL DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

Pour déterminer le champ à partir du théorème de Gauss, il faudra suivre la démarche suivante :

1. Déterminer **la direction du champ E** à partir des considérations de **symétries** (radiale pour des géométries cylindriques et sphériques, normale pour des géométrie planes)

2. Choisir une **surface de Gauss imaginaire** dans la région où l'on souhaite déterminer E. Il faudra que la surface de Gauss possède les mêmes propriétés de symétrie que le champ électrostatique.

3. Calculer le **flux** du champ électrostatique à travers la surface de Gauss choisie

4. Calculer la **charge intérieure** à la surface de Gauss Q_{int}

5. Appliquer le **théorème de Gauss**

APPLICATIONS

1. Champ électrostatique produit par un plan infini uniformément chargé:

Problème : Que vaut le champ électrostatique E créé par un plan infini de densité de charges uniforme $\sigma > 0$ *?*

2. Champ électrostatique produit par un cylindre infini uniformément chargé:

Problème : Que vaut le champ électrostatique E créé par un cylindre infini de densité de charges uniforme $\rho > 0$ *?*