CHAPITRE 4

ENERGIE ELECTROSTATIQUE

1. DEFINITION

L'énergie électrostatique W d'un système de charges, supposées initialement éloignées les unes des autres, correspond au travail qu'il faut fournir pour amener ces charges à leurs positions finales.

2. TRAVAIL DES FORCES ELECTROSTATIQUES

2.1 Energie d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique $\vec{E}$

Rappelons d'abord qu'une charge ponctuelle isolée ne peut avoir une énergie potentielle. En effet, cette charge crée autour d'elle un champ et un potentiel, mais c'est en interagissant avec le champ d'une autre charge ou d'une distribution de charges qu'elle va acquérir une énergie potentielle E_p engendrant une force d'interaction $\vec{F}$.

Le travail élémentaire de la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$, lors d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}$ de la charge q est :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dr} = q\vec{E}.\overrightarrow{dr} = -q\,\overrightarrow{grad}V\,.\overrightarrow{dr} = -qdV$$

Lorsque la charge se déplace de A à B, le travail total est :

$$W_{AB} = \int_A^B \delta W = -q\int_A^B dV = -q(V_B - V_A) = q(V_A - V_B)$$

Notons que le champ électrostatique $\vec{E}$ est crée par une autre distribution de charges.

On peut dire aussi que l'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasistatique cette particule de l'infini à sa position actuelle.

En effet, pour la déplacer de l'infini vers un point A, un opérateur extérieur doit fournir une force qui s'oppose à la force de Coulomb. Si ce déplacement est fait suffisamment lentement, la particule n'acquiert aucune énergie cinétique. Cela n'est possible que si, à tout instant $\vec{F}_{ext} = -\vec{F} = -q\vec{E}$. Le travail fourni par l'opérateur sera donc :

$$w = \int_{-\infty}^{M} dW = \int_{-\infty}^{M} \vec{F}_{ext}.\overrightarrow{dr} = -q\int_{-\infty}^{M} \vec{E}.\overrightarrow{dr}. \;= q[V(M) - V(\infty)]$$

Puisqu'on peut toujours définir le potentiel nul à l'infini, on obtient l'expression suivante pour l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle située en M :

$$W = E_p = qV(M)$$

On voit donc que le potentiel électrostatique est une mesure de l'énergie électrostatique (à un facteur q prés) : c'est dû au fait que V est lié à la circulation du champ. Autre remarque importante : le travail est indépendant du chemin suivi, donc la force électrostatique est une force conservative et dérive d'une énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$$

$$E_p = W$$

2.2 Energie électrostatique d'un système de charges ponctuelles

Lorsqu'on a affaire à un ensemble de N charges ponctuelle q_i, chacune d'entre elles va crée sur les autres un champ électrostatique et ainsi mettre en jeu une énergie d'interaction électrostatique. Initialement, toutes les charges étaient éloignées les unes des autres et à l'infini.

- On amène q_1 de l'infini à A_1: $W_1 = 0$ car $E = 0$.
- La charge q_1 est en A_1. On amène q_2 de l'infini à A_2. En A_2, le potentiel V_2 crée par q_1 est :

$$V_2 = V_1(A_2) = K\frac{q_1}{r_{12}}$$

Où $r_{12} = \|\overrightarrow{A_1A_2}\|$ est la distance entre les charges q_1 et q_2. Le travail fourni est :

$$W_2 = q_2V_2 = K\frac{q_1q_2}{r_{12}} = q_1V_1$$

Où $V_1 = V_2(A_1)$. C'est-à-dire identique au travail qu'il fallait fournir pour amener q_1 de l'infini en A_1, en présence de q_2 déjà située en A_2. Cela signifie que ce système constitué de deux charges possède une énergie électrostatique :

$$W = E_p = W_1 + W_2 = K\frac{q_1q_2}{r_{12}} = \frac{1}{2}\big(q_1V_2(A_1) + q_2V_1(A_2)\big)$$

Ainsi, cette énergie potentielle peut être vue comme :

- L'énergie de q_1 dans le champ de q_2.
- L'énergie de q_2 dans le champ de q_1.
- L'énergie potentielle du système isolé, constitué par les deux charges q_1 et q_2.

- On a donc q_1 fixe en A_1 et q_2 fixe en A_2. On amène q_3 de l'infini à A_3. En A_3, le potentiel sera :

$$V_3 = V_1(A_3) + V_2(A_3) = K\frac{q_1}{r_{13}} + K\frac{q_2}{r_{23}}$$

Où $r_{13} = \|\overrightarrow{A_1A_3}\|$, $r_{23} = \|\overrightarrow{A_2A_3}\|$, $V_1(A_3)$ est le potentiel crée q_1 par en A_3 et $V_2(A_3)$ est le potentiel crée par q_2 en A_3. L'énergie potentielle de la charge q_3 est donc :

$$W_3 = q_3V_3 = K\frac{q_1q_3}{r_{13}} + K\frac{q_2q_3}{r_{23}}$$

Correspondant à une énergie électrostatique de ce système de 3 charges :

$$W = E_p = W_1 + W_2 + W_3 = K\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right)$$

Ainsi, on voit qu'à chaque couple q_iq_j est associé une énergie potentielle d'interaction. En continuant cette procédure, c'est-à-dire, en amenant de l'infini les charges restantes $(q_4, q_5, \ldots\ldots, q_i, \ldots\ldots, q_n)$ à leurs positions finales $(A_4, A_5, \ldots\ldots, A_i, \ldots\ldots, A_n)$, on montre que l'énergie totale de ce système de N charges ponctuelles sera :

$$W = E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_iV_i(A_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} K\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N} K\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

Où, il est évident que :

$$V_i(A_i) = K\sum_{j\neq i}^{N}\frac{q_j}{r_{ij}}$$

Qui représente le potentiel électrostatique crée par toutes les autres charges $q_j (j \neq i)$ au point A_i(où se trouve la charge q_i). La quantité r_{ij} représente la distance entre les charges q_i et q_j $\left(r_{ij} = \|\overrightarrow{A_iA_j}\|\right)$.

Le terme $1/2$ provient du fait que dans l'interaction entre les charges q_i et q_j, l'énergie de ce couple est comptée deux fois.

Notons que l'énergie potentielle électrostatique d'une distribution de charges correspond à l'énergie de constitution (cohésion, interne) ou la dissociation de cette distribution. Si cette énergie est positive, cela signifie que la distribution de charges absorbe de l'énergie en se constituant (ou dissociant). Par contre, si elle négative, cela signifie qu'elle dégage de l'énergie en se constituant (ou dissociant).

2.3 Energie d'une distribution continue de charges

Comme pour le champ et le potentiel électrostatiques, on se ramène à un ensemble de charges ponctuelles en divisant la charge totale en charges élémentaires dq. Donc, dans l'expression donnant l'énergie d'un ensemble de charges ponctuelles, il suffit de remplacer q_i par dq et la somme discrète par une intégrale.

$$W = E_p = \int_{distribution} dq\, V(A)$$

Où A est la position de l'élément de charge dq.

Distribution volumique :

$$W = E_p = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\, V dv$$

Distribution surfacique :

$$W = E_p = \frac{1}{2}\iint_S \sigma\, V ds$$

Distribution linéique :

$$W = E_p = \int_C \lambda\, V dl$$

3. EXEMPLES D'APPLICATION

- Donner l'expression générale de l'énergie électrostatique d'un ensemble de 04 charges ponctuelles (q_1, q_2, q_3, q_4).

- Soit un ensemble de 5 charges ponctuelles identique de même valeur $(+q)$, placées aux sommets et au centre d'un carré de coté a. Donner l'expression de l'énergie potentielle électrostatique de ce système.
- Soit une sphère de rayon R chargée en volume, de densité uniforme ρ. La charge totale de la sphère est Q. Le champ à l'intérieur est $\left(E = {}^{\rho r}/_{3\varepsilon_0}\right)$, et le potentiel a pour expression $V = \left[{}^{-\rho(r^2 - 3R^2)}/_{6\varepsilon_0}\right]$(ces résultats seront vus au chapitre suivant). Calculer l'énergie électrostatique de cette sphère.