Calcul matriciel

Dernière mise à jour : 9 Septembre 2008

I. Définitions

II. Opérations sur les matrices

A. Addition, soustraction
B. Multiplication par un nombre
C. Transposition
D. Multiplication des matrices
E. Inversion des matrices carrées
F. Déterminant d'une matrice carrée

III. Application aux systèmes d'équations linéaires

A. Formulation matricielle
B. Cas d'une matrice régulière
C. Cas d'une matrice singulière

I. Définitions

Une matrice n × m est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes :

Exemple avec n = 2, m = 3 : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

n et m sont les *dimensions* de la matrice.

Une matrice est symbolisée par une lettre en caractères gras, par exemple **A**. On note A_{ij} l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (la ligne est toujours nommée en premier).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

On note $[A_{ij}]$ la matrice d'élément général A_{ij}. On a donc : $\mathbf{A} = [A_{ij}]$

Si m = 1, la matrice est appelée *vecteur* (plus précisément *vecteur-colonne*) :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

N.B. : Dans ce chapitre, nous utiliserons des lettres majuscules pour les matrices et des lettres minuscules pour les vecteurs, mais ce n'est pas obligatoire.

Si n = m, la matrice est appelée *matrice carrée*.

Quelques matrices carrées particulières (Exemples avec n = 4)

Matrice unité	$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Parfois notée $\mathbf{I}_n$ n est la dimension de la matrice (soit $\mathbf{I}_4$ dans cet exemple)
Matrice diagonale		notée $\mathrm{diag}(D_{ii})$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure
(*Upper triangular matrix*, **U**)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure
(*Lower triangular matrix*, **L**)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$$

Une matrice carrée **A** est dite *symétrique* si :

$$A_{ji} = A_{ij}$$

pour tout i différent de j

II. Opérations sur les matrices

II.A. Addition, soustraction

L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

II.B. Multiplication par un nombre

Chaque terme de la matrice est multiplié par le nombre :

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

II.C. Transposition

La transposée $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ (aussi notée **A'**) d'une matrice **A** est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de **A** :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La transposée d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

II.D. Multiplication des matrices

Définissons tout d'abord le produit d'un vecteur-ligne $\mathbf{x}^T$ par un vecteur-colonne $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Ce produit est appelé *produit scalaire* des vecteurs **x** et **y**, noté **x** · **y**. Les vecteurs doivent avoir la même dimension.

Le produit matriciel s'en d�duit : le produit de la matrice **A** (n × m) par la matrice **B** (m × p) est la matrice **C** (n × p) telle que l'élément C_{ij} est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice **A** par la colonne j de la matrice **B**.

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj} \qquad i = 1..n \qquad j = 1..p$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 9 \end{bmatrix}$$

On a en effet, en effectuant les produits ligne par colonne :

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2\\3\end{bmatrix} = 1\times5+2\times2+0\times3=9 \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = 1\times1+2\times3+0\times4=7$$

$$\begin{bmatrix}4 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2\\3\end{bmatrix} = 4\times5+3\times2-1\times3=23 \qquad \begin{bmatrix}4 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = 4\times1+3\times3-1\times4=9$$

Propriétés :

- Le produit matriciel est :
  - *associatif* : **ABC** = (**AB**)**C** = **A**(**BC**)
  - *distributif par rapport à l'addition* : **A**(**B** + **C**) = **AB** + **AC**
  - *non commutatif* : **AB** n'est pas égal à **BA** en général.

- La matrice unité **I** est *élément neutre* pour la multiplication : $\mathbf{AI}_m = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$, si la matrice **A** est de dimensions n × m.

- Transposée d'un produit : $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (Attention au changement d'ordre !).

Quelques produits particuliers :

(**x** et **y** sont des vecteurs-colonnes, **A** est une matrice)

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Carré scalaire.
Sa racine carrée $(\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{1/2}$ est appelée *norme* du vecteur (notée $\|\mathbf{x}\|$)

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^T = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \left[x_i y_j\right]$$

Produit extérieur des vecteurs **x** et **y**
(Matrice d'élément général $x_i y_j$)

Ne pas confondre avec le produit scalaire.

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_i x_j$$ Forme quadratique (si **A** est symétrique)

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_i y_j$$ Forme bilinéaire (dite symétrique si **A** est symétrique)

II.E. Inversion des matrices carrées

Une matrice carrée **A** est dite *inversible* ou *régulière* s'il existe une matrice carrée $\mathbf{A}^{-1}$ (appelée *matrice inverse*) telle que :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Si $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe pas, la matrice **A** est dite *singulière*

Propriétés :

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (Attention au changement d'ordre !)
- $[\mathrm{diag}(D_{ii})]^{-1} = \mathrm{diag}(1/D_{ii})$
- La matrice **A** est dite *orthogonale* si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$

II.F. Déterminant d'une matrice carrée

Pour une matrice 2×2, on montre que la matrice inverse est donnée par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Le nombre *ad* - *bc* est appelé *déterminant* de la matrice **A**, noté :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| = \mathbf{det}(\mathbf{A})$$

La matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe donc que si det **A** est différent de zéro.

La matrice **A** est singulière si det **A** = 0, régulière dans le cas contraire. Ce résultat se généralise à une matrice de dimension quelconque.

Propriétés des déterminants :

- $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{B})$
- Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments diagonaux. En particulier, det(**I**) = 1 (si **I** est la matrice unité)
- Si **A** est régulière, $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 / \det(\mathbf{A})$
  puisque $\det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{I}) = 1$
- Si **A** est orthogonale, $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$
  puisque $\det(\mathbf{AA}^T) = [\det(\mathbf{A})]^2 = \det(\mathbf{I}) = 1$

III. Application aux systèmes d'équations linéaires

III.A. Formulation matricielle

Un système de n équations linéaires à n inconnues est de la forme :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

où les a_{ij} sont les coefficients du système, les x_i les inconnues et les b_i les termes constants.

Un tel système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

III.B. Cas d'une matrice régulière

Si la matrice **A** est régulière, on a, en multipliant à gauche par $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Soit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Exemple :

Soit le système de 2 équations à 2 inconnues :

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &= 9 \\
x_1 - x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

On a successivement :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 2 \times (-1) - 3 \times 1 = -5$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -15 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soit : $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

III.C. Cas d'une matrice singulière

Lorsque la matrice est singulière, deux cas sont à envisager :

- **Système indéterminé**

  S'il est possible d'exprimer p équations en fonction des autres, le système admet une infinité de solutions. On peut retenir le vecteur **x** qui a la plus faible norme.

  L'ensemble des solutions forme un sous-espace de dimension r = n - p dans l'espace de dimension n. Le nombre r est le *rang* de la matrice.

  Exemple :

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 2x_2 = 6$$

Le déterminant vaut : 1 × 2 - 1 × 2 = 0. La matrice est bien singulière.

La deuxième équation est égale à la première multipliée par 2. Il n'y a en fait qu'une seule équation : $x_1 + x_2 = 3$. C'est l'équation d'une droite (espace de dimension 1) dans le plan (x_1, x_2). La matrice est de rang 1.

- **Système impossible**

  Si les équations ne peuvent pas être exprimées les unes en fonction des autres, le système n'admet aucune solution. On peut cependant calculer un vecteur **x** tel que la norme du vecteur **Ax** - **b** soit minimale (bien que non nulle). Ce vecteur constitue la meilleure approximation de la solution au sens des moindres carrés (voir le cours sur la régression linéaire).

  Exemple :

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 2x_2 = 8$$

  La deuxième équation divisée par 2 donnerait $x_1 + x_2 = 4$, ce qui est incompatible avec la première équation. Le système n'a pas de solution.