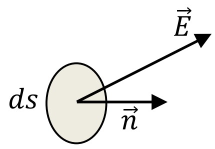
CHAPITRE 5

THEOREME DE GAUSS

1. FLUX DU CHAMP ELCTROSTATIQUE

Considérons un élément de surface ds traversé par un champ électrostatique $\vec{E}$. Par définition, le flux élémentaire de $\vec{E}$ à travers ds est donné par :

$$d\phi = \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \vec{E}.\vec{n}ds$$



Où $\overrightarrow{ds} = \vec{n}\,ds$ et $\vec{n}$ est la normale à l'élément de surface ds.

A travers la surface entière S :

$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iint_S \vec{E}\,.\vec{n}\,ds$$

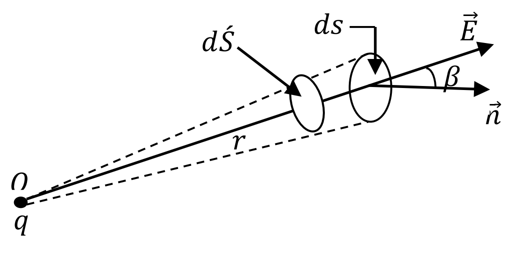
2. FLUX DU CHAMP ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

2.1 Flux du champ électrostatique à travers un élément de surface

$$d\phi = \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \vec{E}.\vec{n}\,ds = E\,ds\,\cos\theta$$

En remplaçant l'expression de E (champ électrostatique crée par une charge ponctuelle), il vient que :

$$d\phi = Kq\frac{ds\cos\beta}{r^2} = Kqd\Omega$$



Par définition, la quantité

$$d\Omega = \frac{ds\cos\beta}{r^2} = \frac{d\acute{S}}{r^2}$$

est appelé « angle solide » élémentaire sous lequel, depuis le point O, on voit la surface ds. La quantité $d\acute{s} = ds\ \cos\beta$ est dit surface effective (qui par exemple, qui serait vu par un observateur situé en O).

La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini dans le plan. Par définition, c'est l'angle délimité par un cône coupant un élément de surface $\overrightarrow{ds}$. Un exemple concret de l'angle solide est le cône de lumière construit par l'ensemble des rayons lumineux issus d'une lampe torche. Cet angle solide est toujours positif et indépendant de la distance r. Son unité est le stéradian de symbole « sr ».

En coordonnées sphériques (r, θ, φ), une surface élémentaire vaut $ds = r^2 \sin\theta\ d\theta d\varphi$. L'angle solide élémentaire s'écrit alors $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. L'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle au sommet α vaut :

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

Ainsi, le demi-espace, engendré avec $\alpha = {}^{\pi}/_{2}\, rd$, correspond à un angle solide de $2\pi\ sr$, tandis que l'espace entier correspond à un angle solide de $4\pi\ (\alpha = \pi)$.

Enfin, on voit bien que ce flux dépend directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de la distance r.

Remarque :

Si ds appartient à une surface S fermée, $\vec{n}$ est orienté vers l'extérieur de cette surface et le flux est dit sortant et il est positif. Par contre, si $\vec{n}$ est orienté en sens inverse, le flux est dit entrant et il est négatif. Nous aurons dans ce cas :

$$d\phi = -Kq\ d\Omega$$

2.2 Flux du champ électrostatique à travers une surface fermée

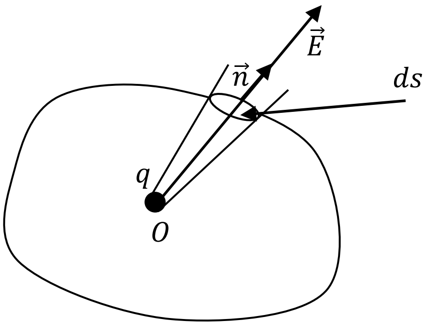
2.2.1 Cas où la charge q est à l'intérieur de la surface

Comme la surface S est fermée, $\vec{n}$ est orienté vers l'extérieur et le flux de $\vec{E}$ crée par la charge q placée en O est un flux sortant. On a :

$$\phi = \iint_S Kq\ d\Omega = Kq\ \Omega$$

Où Ω est l'angle solide, sous lequel de O, on voit la surface S. Dans notre cas $\Omega = 4\pi\ sr$, d'où :

$$\phi = Kq4\pi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



2.2.2 Cas où la charge q est l'extérieur de la surface

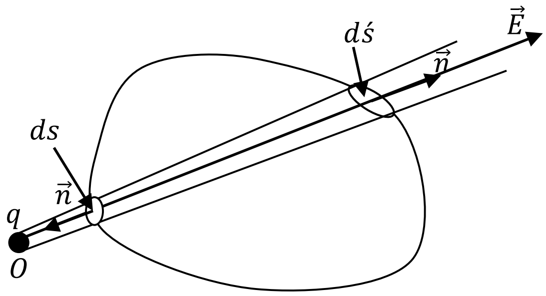
La charge q est à l'extérieur de la surface fermée S. Le même angle solide $d\Omega$ de sommet O, découpe sur S deux élements de de surface ds et $d\acute{s}$, dont les normales sont orientées vers l'extérieur de la surface fermée S. Les flux de $\vec{E}$ à travers ces deux éléments de surfaces sont :

$$d\phi = -Kq\, d\Omega \qquad et \qquad d\phi' = Kq\, d\Omega$$

On aura alors une contribution au flux :

$$d\phi + d\acute{\phi} = 0$$

Pour l'ensemble des couples d'éléments de surface associés $(ds, d\acute{s})$ constituant la surface S, on a des flux élémentaires qui s'annulent deux à deux. Donc, au total, le flux de $\vec{E}$ à travers S est nul.



2.3 Enoncé du théorème de Gauss

Considérons un ensemble de charges (ponctuelles ou non) et une surface fermée S. Les charges q_{ext}, situées à l'extérieur de S, créent un champ électrostatique dont le flux à travers S est nul. Les charges q_{int}, à l'intérieur de S, créent un champ dont le flux est égal à :

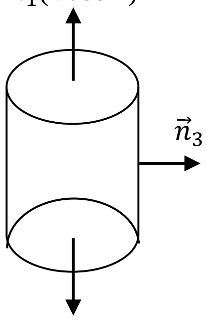
$$\phi = \oiint_S \vec{E}.\vec{ds} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

2.4 Application du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss permet le calcul du module du champ électrostatique $\vec{E}$ d'une distribution de charges plus rapidement que la méthode directe. Pour cela, il faut :

- Déterminer la symétrie de la distribution de charges. Ce qui permet de déterminer le sens et la direction du champ $\vec{E}$ (principe de Curie, voir chapitre 1)
- Choisir une surface fermée (surface de Gauss), en fonction de cette symétrie.
- Dans le cas d'une sphère chargés, la surface de gauss est une sphère.
- Dans le cas d'un fil, d'un cylindre infini et d'un plan infini chargés, la surface de Gauss est un cylindre.
- Calculer le flux à travers la surface fermée.

  Dans le cas où la surface de Gauss est un cylindre, il faut décomposer le flux total en trois flux : deux flux à travers les deux surfaces de base et un flux à travers la surface latérale.
- Appliquer le théorème de Gauss et en déduire le module du champ $\vec{E}$.



Remarques

- La surface de Gauss est une surface imaginaire.
- Le champ $\vec{E}$ doit être constant (en module) sur toute la surface de Gauss. Cette condition nous permet de le faire sortir de l'intégrale.
- le champ $\vec{E}$ doit être également soit parallèle ou perpendiculaire à l'élément de surface (ou à $\vec{n}$) :

  Si $\vec{E} \parallel \vec{n}\, ds \Rightarrow \vec{E}.\vec{n}\, ds = E\, ds$.

  Si $\vec{E} \perp \vec{n}\, ds \Rightarrow \vec{E}.\vec{n}\, ds = 0$

  Donc au final, on aura : $\phi = \oiint_S \vec{E}.\vec{n}\, ds = \oiint_S E ds = E \oiint_S ds = ES_G = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0 S_G}$

3. EXEMPLES D'APPLICATION

En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique en tout point M de l'espace crée par :

- Un fil infini chargé uniformément avec une densité λ.
- Un plan infini chargé uniformément avec une densité σ.
- Une sphère de rayon R chargé uniformément en surface avec une densité σ.
- Une sphère de rayon R chargé uniformément en volume avec une densité ρ.
- Un cylindre infini de rayon R chargé uniformément en surface avec une densité σ.
- Un cylindre infini de rayon R chargé uniformément en volume avec une densité ρ.