République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ABDERAHMANE MIRA BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique

MODULE :

Analyse Mathématiques 4

L'objectif de cette UE est triple :
$*$ Découvrir quelques concepts topologiques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
$*$ Étendre les notions de limite continuité et différentiabilité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et les généraliser à des fonctions de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$.
$*$ Exploiter les résultats ci-dessus pour traiter certains problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes.
$*$ Étendre la notion d'intégrale de Riemann aux cas d'un intervalle non borné ou d'une fonction non bornée.
$*$ Définir l'intégrale de Riemann en dimensions 2 et 3. Introduire quelques notions sur les EDP.

Veuillez communiquer vos remarques et commentaires à l'adresse
$<$ *talemdja@yahoo.com* $>$

Année universitaire 2019-2020

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTÉGRALES IMPROPRES

1.1 Introduction

Une intégrale de Riemann (ou une intégrale propre) étudiée précédemment est notée par $\int_a^b f(t)dt$ où le domaine d'intégration est un intervalle borné, c'est à dire $a \neq -\infty$ et $b \neq +\infty$ (le plus souvent fermé) et la fonction f est une fonction bornée sur ce dernier, c'est à dire $\exists M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout x pris dans le domaine d'intégration. Pour aller plus loin, il est indispensable de se libérer de ces restrictions. En effet, on peut avoir des intervalles non bornés et des fonctions non nécessairement bornées en pratique. Dans ce cas, on parle des **intégrales impropres** ou **généralisées**. Dans ce chapitre nous énonçons les critères de convergences ou de divergence des intégrales impropres et nous allons voir qu'il y à une grande similitude avec les critères de convergence et de divergence et les théorèmes correspondants pour les séries.

1.2 Définitions d'une intégrale impropre

Définition 1.1. Soient I un intervalle quelconque dans $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **localement intégrable** sur I si f est Riemann-intégrable sur tout intervalle fermé $[a, b]$ tel que $[a, b] \subseteq I$. On note $R_{loc}(I)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur I.

Remarque 1.1. Il est facile de voir que si f et g sont localement intégrables sur I,alors $f + g$ l'est aussi. De même, αf est localement intégrable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Ceci veut dire que $R_{loc}(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
La proposition suivante montre que toute fonction continue est localement intégrable.

Proposition 1.1. *Si f est une fonction continue sur I, alors elle est localement intégrable*
En effet, si f est continue sur I, elle est aussi continue sur tout sous intervalle fermé $[a, b] \subset I$. Ceci implique que f est bornée sur $[a, b]$ (car on sait que toute fonction continue sur un intervalle fermé est bornée et atteint ses bornes). Par conséquent, f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et donc elle est localement intégrable sur I.

Exemple 1.2. *Les polynômes, les fonctions $\sin t$, $\cos t$ et e^t sont continues sur $\mathbb{R}$ donc elles sont localement intégrables sur $\mathbb{R}$. Par contre, la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet, si nous prenons par exemple l'intervalle $[0, 1]$, on trouve $\frac{1}{t}$ n'est pas bornée sur $[0, 1]$ et donc n'est pas Riemann-intégrable sur cet intervalle.*

Définition 1.2. L'intégrale
$$\int_a^b f(t)dt$$
est dite **intégrale généralisée** ou **intégrale impropre** si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. L'une des bornes d'intégration est infinie, c'est à dire $a = -\infty$ ou $b = +\infty$;
2. La fonction f n'est pas bornée en un point ou plusieurs point de l'intervalle $[a, b]$; de tels points sont appelés **points singuliers** de la fonction f.

Remarque 1.2. Par abus de langage, les points $-\infty$ et $+\infty$ sont aussi appelés points singuliers de la fonction f.

Exemple 1.1.

1. L'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dt$$
est impropre, car l'intervalle d'intégration n'est pas bornée ;
2. L'intégrale
$$\int_1^2 \frac{t}{1-t} dt$$
est impropre, car $t = 1$ est un point singulier pour la fonction $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$;
3. L'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{1-t} dt$$
est impropre, l'intervalle d'intégration n'est pas borné et $t = 1$ est un point singulier ;
4. L'intégrale
$$\int_0^1 \frac{sint}{t} dt$$
est propre ou de Riemann), car le domaine d'intégration est borné, aussi la fonction f est bornée sur ce dernier puisque $lim_{t\to 0} \dfrac{sint}{t} = 1$.

Remarque 1.3. Dans l'exemple 4, le point $x = 0$ est un point singulier pour la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, et puisque cette fonction est bornée au voisinage de ce point (c'est à dire elle admet une limite en ce point), on parle d'une intégrale propre.

1.3 Intégration sur un intervalle $[a, b[$

Ici, on considère des fonctions localement intégrables sur $[a, b[$, où b et l'unique point singulier pour f (c'est à dire $b = +\infty$ ou f n'est pas bornée au voisinage de b).

Définition 1.3. Par définition on écrit :
$$\int_a^b f(t)dt = lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$$
Si cette limite existe et finie, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ **converge** (ou la fonction f est intégrable au sens généralisé) sur l'intervalle $[a, b[$. Sinon, on dit que l'intégrale impropre

$\int_a^b f(t)dt$ **diverge** sur $[a,b[$.
Ainsi, pour calculer une intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)dt$$

On calcule d'abord la primitive de f sur l'intervalle fermé $[a,x] \subset [a,b[$, par la suite on calcule la limite du résultat quand x tend vers b.

Exemple 1.2. On peut remarquer facilement que toutes les fonctions proposées dans cet exemple sont continues sur leurs domaines d'intégration, donc elle sont localement intégrables sur ces derniers.

1. $$\int_0^{+\infty} t^2 dt = lim_{x\to+\infty} \int_0^x t^2 dt = lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{3}t^3]_0^x = lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}(x^3-0) = +\infty$$
   ainsi l'intégrale impropre
   $$\int_0^{+\infty} t^2 dt \text{ diverge.}$$
2. $$\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-2t} t dt = lim_{x\to+\infty}[\frac{-1}{2}e^{-2t}]_0^x = lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2}(e^{-2x}-1) = \frac{1}{2}$$
   Il en résulte que la fonction e^{-2t} est intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
3. $$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = lim_{x\to1} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to1} Arcsinx = \frac{\pi}{2}$$
4. $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t} t dt = lim_{x\to+\infty}[lnt]_1^x = lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$$
   , donc l'intégrale impropre diverge sur $[1,+\infty[$.
5. $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} t dt = lim_{x\to+\infty}[\frac{-1}{t}]_1^x = lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x}+1) = 1$$
   , donc l'intégrale impropre converge sur $[1,+\infty[$.

La proposition suivante montre que lorsqu'une intégrale généralisée converge, elle vérifie les mêmes propriétés que l'intégrale de Riemann.

Proposition 1.3. *Si f,g sont intégrables sur l'intervalle $[a,b[$, alors*

1. $$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$
2. *Linéarité : pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$*
   $$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$
3. *La relation de Chasles : pour tout $c \in [a,b[$*
   $$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

4. *La positivité :*

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

en particulier

$$0 \leq f \Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(t)dt$$

Proposition 1.4. 1. *Si f est intégrable sur $[a,b[$, alors $\forall c \in [a,b[$, f est intégrable sur $[c,b[$ et l'on a*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

2. *Si f est localement intégrable sur $[a,b[$ et s'il existe $c \in [a,b[$ tel que f est intégrable sur $[c,b[$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et l'on a aussi*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Exercice 1. Soit $f \in R_{loc}[a,b[$ tel que $\int_a^b f(t)dt$ diverge. Montrer que $\forall c > a, \int_c^b f(t)dt$ diverge.

1.3.1 critères de comparaison pour des fonctions positives

Soit $f \in R_{loc}[a,b[)$ à valeurs réelles positives. Il est claire que la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1.1}$$

est croissante sur l'intervalle $[a,b[$ (car si $x \leq y$, alors

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^y f(t)dt$$

et donc $F(x) \leq F(y)$). De plus F admet une limite quand x tend vers b si et seulement si F est majorée sur $[a,b[$. Il en résulte que $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si la fonction F est majorée sur $[a,b[$. Notons que dans le cas de divergence, on a $\int_a^b f(t)dt = +\infty$.

Théorème 1.5. *Soient $f, g \in R_{loc}[a,b[)$ telles que, pour tout $t \in [a,b[$, $0 \leq f \leq g$. Alors :*

1.
$$\int_a^b g(t)dt \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge.}$$

2.
$$\int_a^b f(t)dt \text{ diverge } \Rightarrow \int_a^b g(t)dt \text{ diverge.}$$

Exemple 1.3. 1. La fonction $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ est intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$. En effet, $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{t^2+1}dt = \int_0^1 \dfrac{1}{t^2+1}dt + \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2+1}dt$. Il est claire que f est intégrable sur $[0,1]$. Pour l'intervalle $[1,+\infty[$, on a, $\forall t \geq 1$, $0 < \dfrac{1}{t^2+1} \leq \dfrac{1}{t^2}$. Puisque $\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (voir l'exemple 1.2), alors $\dfrac{1}{t^2+1}$ l'est aussi sur $[1,+\infty[$.

2. La fonction $f(t) = \dfrac{1}{t-1}$ n'est pas intégrable sur l'intervalle $[2, +\infty[$. En effet, on a pour $t \geq 2$, $0 < \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{t-1}$. Puisque $\dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$ (voir l'exercice ci-dessus) et d'après le théorème 1.5, la fonction $\dfrac{1}{t-1}$ n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$.

Théorème 1.6. *Soient f, g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a, b[$ telles que*

$$\lim_{t \to b} \tfrac{f(t)}{g(t)} = k, \text{ où } k \in \mathbb{R}_+^*$$

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature, c'est à dire $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t)dt$ converge.

Remarque 1.4. Le théorème 1.6 reste vrai pour les fonctions f, g qui sont négatives sur l'intervalle $[a, b[$: il suffit de remarquer que

$$\lim_{t \to b} \tfrac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to b} \tfrac{-f(t)}{-g(t)}$$

et que

$$\textstyle\int_a^b -f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

Exercice 2. Soient f, g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$. Montrer que s'il existe $c \in [a, b[$ tel que f, g ont un même signe sur $[c, b[$ et $\lim_{t \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = k$, avec $k \in \mathbb{R}_+^*$, alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature

Remarque 1.5. Rappelons que $\lim_{t \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = k$ signifie que la fonction f est équivalente à la fonction kg quand t tend vers b et on écrit $f \sim kg$ quand t tend vert b. Donc le théorème 1.6 veut dire que si les fonctions f et kg sont équivalentes quand t tend vers b, alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature. La proposition suivante est souvent utilisée pour appliquer le théorème 1.5.

Proposition 1.7. 1. *L'intégrale*

$$\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^p} (c > 0)$$

converge si et seulement si $p > 1$; cette intégrale est appelée intégrale de Riemann.

2. *L'intégrale*

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^p}$$

converge si et seulement si $p < 1$.

Exemple 1.8. 1. *l'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{tdt}{t + \sqrt{t^5 + t - 1}}$ converge, car quand t tend vers l'infini, $\dfrac{t}{t + \sqrt{t^5 + t - 1}} \sim \dfrac{t}{\sqrt{t^5}} = \dfrac{1}{\sqrt{t^3}}$, $p = \frac{3}{2} > 1$.*

2. *L'intégrale*

$$\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{(2-t)}}$$

converge, car $p = \frac{1}{2} < 1$.

1.3.2 La convergence absolue d'une intégrale impropre

*Le théorème suivant connu sous le nom "**critère de Cauchy**" donne une condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une intégrale impropre d'une fonction quelcoque.*

Théorème 1.9. *Pour que l'intégrale*

$$\int_a^b f(t)dt$$

converge il faut et il suffit que
$\forall \epsilon > 0, \exists c \in [a, b[$ *tel que*

$$x, x' \in [c, b[\Rightarrow |\int_x^{x'} f(t)dt| < \epsilon.$$

Définition 1.4. Soit $f \in R_{loc}[a, b[$. L'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt$$

est dite **absolument convergente** si l'intégrale

$$\int_a^b |f(t)|dt \text{ converge.}$$

Exemple 1.4.

1. L'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{costdt}{t^2}$$
est absolument convergente. En effet, $\forall t \geq 1, 0 < |\frac{cost}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$. Puisque
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}dt$$
converge,
$$\int_1^{\infty} |\frac{cost}{t^2}|dt$$
converge (voir Théorème 1.5). Par conséquent, $\int_1^{\infty} \frac{cost}{t^2}dt$ converge absolument.
2. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{sint - 2}{t}dt$ est absolument divergente. En effet, $\forall t \geq 1, 0 < \frac{1}{t} \leq |\frac{sint - 2}{t}|$. Puisque $\int_1^{\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge (Proposition 1.7), alors $\int_1^{\infty} |\frac{sint - 2}{t}|dt$ diverge (voir Théorème 1.5). Par conséquent,
$$\int_1^{\infty} \frac{sint - 2}{t}dt$$
ne converge pas absolument.

Proposition 1.10. *Si une intégrale converge absolument alors elle est aussi convergente.*

Exemple 1.5. Soit l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} sintdt, p > 0.$$
On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $|e^{-pt}sint| \leq e^{-pt}$. D'autre part,
$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$$
donc converge. Par conséquent
$$\int_0^{+\infty} |e^{-pt}sint|dt$$
converge et donc
$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}sintdt$$
converge absolument. Ceci implique, d'après la proposition 1.10, la convergence de
$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}sintdt$$
.

Il faut faire attention à la réciproque de la proposition 1.10 qui n'est pas vraie. En effet, nous allons voire par la suite l'existence des fonctions f pour lesquelles
$$\int_a^b |f(t)|dt$$
diverge et
$$\int_a^b f(t)dt$$
converge. Dans ce cas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **semi convergente**. Le critère ci-dessous connu sous le nom "**Règle d'Abel**" est très utile pour déterminer la semi convergence d'une intégrale.

Théorème 1.11. *Soient f, g deux fonctions localement intégrables sur l'intervalle $[a, b[$ et vérifiant les conditions :*

1. *f est monotone et $lim_{t\to b}f(t) = 0$;*
2. *; $\exists k > 0$ tel que*
$$\forall x \in [a, b[: |\int_a^x g(t)dt| \leq k$$
.

Alors l'intégrale
$$\int_a^b f(t)g(t)dt$$
est convergente.

Exemple 1.6. Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$. Posons
$$f(t) = \frac{1}{t} \text{ et } g(t) = \sin t.$$

On a :
$lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ donc la premier condition d'Abel est vérifiée.
Soit $x \in [0,+\infty[$, on a $|\int_a^x \sin t dt| = [|\cos t|]_0^x = |\cos x - 1| \leq 2$. Ainsi, $\exists k = 2$ tel que $\forall x \in [0,+\infty[$, $|\int_a^x \sin t dt| \leq 2$, c'est à dire la seconde condition d'Abel est aussi vérifier. Par conséquent, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Remarque 1.6. Comme on l'a signalé ci-dessus, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

ne converge pas absolument. En effet, $\forall t \geq 0$, $|\frac{\sin t}{t}| \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos^2 t}{t} = \frac{1-\cos 2t}{2t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos 2t}{2t}$. L'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{cos2t}{2t}$$

converge (d'après la règle d'Abel), mais

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}$$

diverge car $p = 1$ et donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos^2 t}{t} dt$$

diverge (converge+diverge=diverge). Par conséquent l'intégrale

$\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| dt$ diverge, ce qui revient au meme de dire que l'intégrale

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ diverge absolument

.

1.4 Intégration sur d'autres types d'intervalles

1.4.1 Intégration sur un intervalle $]a,b]$

Dans cette section ; nous intégrons des fonctions $f \in R_{loc}(]a,b]$, c'est à dire des fonctions localement intégrables sur des intervalles sous forme $]a,b]$, où a est l'unique point singulier de f.

Définition 1.5. Par définition

$$\int_a^b f(t)dt = lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt$$

.
Si $\lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt$ existe et finie, on dit que f est intégrable (au sens généralisé) sur l'intervalle $]a,b]$ ou que l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)dt$$

converge. Tous les résultats obtenus pour le cas de l'intervalle $[a,b[$ sont aussi valable pour le cas de l'intervalle $]a,b]$ avec bien sûre des modifications évidentes. Par exemple la proposition 1.4 s'enonce :
Pour $f \in R_{loc}]a,b]$

1. Si l'intégrale
$$\int_a^b f(t)dt$$
converge, alors pour tout $c \in]a, b]$, l'intégrale
$$\int_c^b f(t)dt$$
converge.
2. S'il existe $c \in]a, b]$ tel que l'intégrale $\int_c^b f(t)dt$ diverge, alors l'intégrale
$$\int_a^b f(t)dt$$
diverge.

Pour le théorème 1.5, il y a aucune différence sauf au niveau de l'intervalle d'intégration : Soient $f, g \in R_{loc}]a, b]$ telles que, pour tout $t \in]a, b]$, $0 \leq f \leq g$. Alors :

1. $$\int_a^b g(t)dt \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge.}$$
2. $$\int_a^b f(t)dt \text{ diverge } \Rightarrow \int_a^b g(t)dt \text{ diverge.}$$

Exemple 1.7. 1. L'intégrale
$$\int_{-\infty}^0 e^{pt}dt$$
converge si et seulement si $p > 0$. En effet, par définition
$$\int_{-\infty}^0 e^{pt}dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 e^{pt}dt = \lim_{x\to-\infty}[\frac{1}{p}e^{pt}]_x^0 = \frac{1}{p}(1 - \lim_{x\to-\infty} e^{px}) = \begin{cases} \frac{1}{p}\text{si } p > 1; \\ +\infty \text{ sinon .} \end{cases}$$

2. $$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^{-1} \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to-\infty}[\frac{-1}{t}]_x^{-1} = 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$$
, donc elle converge. On déduit, d'après Théorème 1.5, que
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^4}dt$$
est convergente, car pour $t \in]-\infty, -1]$, $0 \leq \frac{1}{t^4} \leq \frac{1}{t^2}$.

3. $$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|t|}dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^{-1} \frac{1}{|t|}dt = \lim_{x\to-\infty}[ln|t|]_x^{-1} = 0 - \lim_{x\to+\infty} ln|x| = +\infty$$
. Puisque pour $t \in]-\infty, -1]$, $\frac{1}{|t|} \leq \frac{1}{\ln|t|}$, alors l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\ln|t|}dt$$
diverge.

4. Pour l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t^2+1}dt$$
, on a quand $t \to -\infty$, $\dfrac{1}{t^2+1} \sim \dfrac{1}{t^2}$, ainsi les intégrales
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}dt$$
et
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2+1}dt$$
sont de même nature et donc
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2+1}dt$$
converge. et d'après la proposition 1.4,
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t^2+1}dt$$
converge.

1.4.2 Intégration sur un intervalle $]a, b[$

Dans cette section ; la fonction f est localement intégrable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, où a et b sont sont des points singuliers pour f.

Définition 1.6. On dit que f est intégrable sur $]a, b[$, s'il existe $c \in]a, b[$ tel que f est intégrable sur chacun des intervalles $]a, c]$ et $[c, b[$,c'est à dire les deux intégrales
$$\int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt$$
sont convergentes ; dans ce cas on écrit
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

La proposition suivante montre que le choix du point c dans la définition ci-dessus est arbitraire.

Proposition 1.12. *Soit f une application localement intégrable sur $]a, b[$ telle*
$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge}$$
. Alors $\forall c \in]a, b[$, f est intégrable sur les deux intervalles $]a, c]$ et $[c, b[$ et l'on a
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemple 1.13. *1. on peut établir la convergence de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt$$

par deux méthodes, soit par un calcul de la primitive soit en utilisant les critères de comparaison :

Méthode 1 :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t^2+1} dt = \lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{0} \frac{1}{t^2+1} dt = lim_{x \to -\infty} [Arctgx]_x^0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{0}^{x} \frac{1}{t^2+1} dt = lim_{x \to +\infty} [Arctgx]_0^x = \frac{\pi}{2}$$

.
D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t^2+1} dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} = \pi$$

.
Méthode 2 : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f \in R_{loc}(\mathbb{R})$ et donc $\forall c > 0$, f est intégrable sur $[-c, c]$. D'autre part, quand t tend vers $-\infty$ ou $+\infty$, $\frac{1}{t^2+1} \sim \frac{1}{t^2}$. Puisque la fonction $\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur les intervalles $]-\infty, -c]$ et $[c, +\infty[$, alors la fonction $\frac{1}{t^2+1}$ est aussi intégrable sur ces deux intervalles (critère d'équivalence). Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt \ \textit{converge.}$$

Remarque 1.7. Notons que la fonction f peut avoir plusieurs points singuliers sur l'intervalle $]a, b[$. Dans ce cas, le calcul de l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt$$

ce fait d'une manière très naturelle. En effet, soit $C = \{c_1, c_2 \dots c_n\}$ l'ensemble des points singuliers de la fonction f dans l'intervalle $]a, b[$. Supposons que f est localement intégrable sur l'ensemble $]a, b[\backslash C$, c'est à dire intégrable sur tout intervalle fermé $[\alpha, \beta] \subset]a, b[\backslash C$. Alors, on dit que la fonction f est intégrable sur $]a, b[$ si est seulement si f est intégrable sur chacun des intervalles $]a, c_1[,]c_1, c_2[\dots]c_n, b[$. Dans ce cas, on écrit

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{c_1} f(t)dt + \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(t)dt.$$

Ainsi, la fonction f n'est pas intégrable sur $]a, b[$ si elle n'est pas intégrable sur au moins un intervalle parmi $]a, c_1[,]c_1, c_2[\dots]c_n, b[$.

Exemple 1.8. Considérons l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t+2}{t^2(1-t^2)}dt$$

Les points singuliers de f dans le domaine d'intégration $]0,+\infty[$ sont $0, 1$ et $+\infty$. Ainsi, on doit étudier cette intégrale sur les intervalles $]0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1[,]1, 2]$ et $[2, +\infty[$ (les points $\frac{1}{2}$ et 2 sont choisis au hasard, ça peut être n'importe quel autre point sur $]0, 1[,]1, +\infty[$ respectivement, car f est continue sur ces intervalles et donc localement intégrable).

1. Sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}]$. La fonction f est positive, $\dfrac{t+2}{t^2(1-t^2)} \sim \dfrac{2}{t^2}$ quand t tend vers 0, .

   D'autre part, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{t^2} = \lim_{x\to 0} \int_x^{1/2} \frac{2}{t^2}dt = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{t}]_x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x} - 4 = +\infty$$

   , c'est à dire cette intégrale diverge. Par conséquent,

$$\int_0^{1/2} \frac{t+2}{t^2(1-t^2)}dt$$

   diverge

1.5 Intégration par partie et changement de variable

1.5.1 Intégration par partie

Théorème 1.14. *Soient f, g deux fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b[$. Supposons que $lim_{t\to b} f(t)g(t)$ existe et finie. Alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature. En cas de convergence, on a :*

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = lim_{t\to b} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt \tag{1.2}$$

Remarque 1.8. Dans l'énoncé du théorème 1.14, le point singulier est le point b. Maintenant :

1. Si le point singulier est le point a, l'équation 1.2 devient

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - lim_{t\to a} f(t)g(t) - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

2. Si les points a, b sont tout les deux des points singuliers, l'équation (1.1) s'écrit

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = lim_{t\to b} f(t)g(t) - lm_{t\to a} f(t)g(t) - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Exemple 1.15. *1.*

$$\int_0^1 t \ln t dt$$

On pose :
$f(t) = \ln t$, *donc* $f'(t) = \dfrac{1}{t}dt$.
$g'(t) = tdt$, *donc* $g(t) = \dfrac{1}{2}t^2$. *Ainsi :*

$$\int_0^1 t \ln t dt = lim_{x\to 0}[f(t)g(t)]_x^1 - \int_0^1 f'(t)g(t)dt = f(1)g(1) - lim_{x\to 0} f(x)g(x) - \int_0^1 f'(t)g(t)dt.$$

$$\int_0^1 t \ln t dt = 0 - lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln x}{2} - \int_0^1 \frac{t}{2}dt = \frac{1}{4}.$$

2. *Calculons*
$$\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$$
On pose :
$f(t) = \lambda t,$ *donc* $f'(t) = \lambda.$
$g'(t) = e^{-\lambda t} dt,$ *donc* $g(t) = \dfrac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}.$ *Ainsi :*
$$\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = lim_{x \to +\infty} [f(t)g(t)]_0^x - \int_0^{+\infty} f'(t)g(t)dt = lim_{x \to +\infty} [-te^{-\lambda t}]_0^x + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$$
$$\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

1.5.2 Changement de variable

Théorème 1.16. *Soient* $\varphi : [\alpha, \beta[\to [a, b[$ *une application bijective de classe* C^1 *et* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une application localement intégrable sur* $[a, b[$. *Alors* $(f \circ \varphi)\varphi' \in R_{loc}[\alpha, \beta[$ *et l'on a*

1. *Si* φ *est croissante, alors*
$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$
2. *Si* φ *est décroissante, alors*
$$\int_a^b f(t)dt = \int_\beta^\alpha f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

Définition 1.7. Pour les intégrales impropres, on pose par définition
$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt \text{ si } a < b$$

Exemple 1.9. 1.
$$\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$$
On pose $x = t^2$, donc $t = \sqrt{x} = \varphi(x)$ et $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx$
$t \to 0 \Rightarrow x \to 0$
$t \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty$
Il en résulte que φ est une bijection de classe C^1 croissante qui applique $[0, +\infty[$ à lui même. D'après le théorème de changement de variable ci dessus, on a
$$\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{2\sqrt{x}} \text{qui converge.}$$
En effet,
sur l'intervalle $]0, 1]$, l'intégrale est absolument convergente car
$$|\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
avec
$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 1$$

donc converge.
Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{2\sqrt{x}}$$

converge aussi d'après la règle d'Abel.

2. Pour l'intégrale

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{t} dt$$

On pose $x = ln\frac{1}{t}$, donc $t = e^{-x} = \varphi(x)$ et $dt = -e^{-x}dx$
$t \to 0 \Rightarrow x \to +\infty$
$t \to 1 \Rightarrow x \to 0$
Ainsi φ est une bijection de classe C^1 décroissante qui applique $]0, 1]$ à $[0, +\infty[$, donc d'après le théorème de changement de variable, on a

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{t} dt = -\int_{+\infty}^0 xe^{-x}dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \text{ qui converge.}$$

1.5.3 Valeur principale de Cauchy

Soit f une fonction intégrable (au sens généralisé) sur l'intervalle $[a, b[$. Donc $\exists L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_a^b f(t)dt = lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt = L \tag{1.3}$$

Remarquons que l'équation (1.3) est équivalente à

$$\int_a^b f(t)dt = lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(t)dt = L$$

Soit maintenant f une fonction intégrable sur $[a, b]\backslash\{c\}$, c'est à dire c est l'unique point singulier sur l'intervalle $[a, b]$. Donc, par définition, $\exists L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_a^b f(t)dt = lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{c-\epsilon} f(t)dt + lim_{\eta\to 0} \int_{c+\eta}^b f(t)dt = L$$

Si cette limite n'existe pas, l'intégrale est divergente. Par exemple

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{t^3}dt = lim_{\epsilon\to 0} \int_{-3}^{0-\epsilon} \frac{1}{t^3}dt + lim_{\eta\to 0} \int_{0+\eta}^3 \frac{1}{t^3}dt = lim_{\epsilon\to 0}\frac{-1}{2\epsilon^2} + lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\eta^2}$$

Cette limite n'existe pas lorsque ϵ et η tendent vers zéro indépendamment. Par contre, en posant $\epsilon = \eta$, la limite existe et vaut zéro. Dans ce cas-là, la limite $L = 0$ est appelée la **valeur principale de Cauchy** de l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$. Plus précisément

Définition 1.8. Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b] \setminus \{c\}$. si la limite

$$lim_{\epsilon\to 0}\Big[\int_a^{c-\epsilon} f(t)dt + \int_{c+\epsilon}^b f(t)dt\Big] = lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{c-\epsilon} f(t)dt + lim_{\epsilon\to 0} \int_{c+\epsilon}^b f(t)dt$$

existe, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ a une valeur principale de Cauchy (ou convergente au sens de la valeur principale de Cauchy) et l'on pose

$$v.p. \int_a^b f(t)dt = lim_{\epsilon\to 0}\Big[\int_a^{c-\epsilon} f(t)dt + \int_{c+\epsilon}^b f(t)dt\Big]$$

Définition 1.9. Soit f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. la valeur principale de Cauchy $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$, si elle existe, est donnée par

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(t)dt$$

Notons que si f est intégrable, on parle plus de la valeur principale de Cauchy car dans ce cas, cette dernière coïncide avec avec la valeur de l'intégrale. On rencontre la notion de valeur de Cauchy dans l'analyse complexe, la théorie des distribution ...

Exemple 1.10. l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^2}dt$ diverge, car $\frac{t+1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t}$ pour $t \to +\infty$. Cependant, elle admet une valeur principale de Cauchy. En effet,

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^2}dt = lim_{R\to+\infty}\Big[\int_{-R}^{+R} \frac{1}{1+t^2}dt + \int_{-R}^{+R} \frac{t}{1+t^2}dt\Big] = lim_{R\to+\infty} 2ArctgR = \pi \quad (1.4)$$

Car $lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{t}{1+t^2}dt = lim_{R\to+\infty} \ln(1+t^2)\Big]_{-R}^{R} = 0$

1.6 références

1. Kada ALLAB, Élément d'analyse, O.P.U 2^e édition (2009).
2. J. Lelong Ferrand, Exercices résolus d'analyse, Dunod, 1977.
3. J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, tome 2, Edition Dunod, 1978.
4. J. Rivaud, Analyse « Séries, équations différentielles » -Exercices avec solutions, Vuibert, 1981.
5. C. Servien, Analyse 3 « Séries numériques, suites et séries de fonctions, Intégrales », Ellipses, 1995.