Conducteurs en équilibre électrostatique

I. Conducteurs en équilibre électrostatique

1. Définition :

Définition : Les conducteurs sont des milieux dans lesquels existent des charges libres (positives ou négatives) pouvant être mises en mouvement sous l'action d'un champ électrique.

L'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsqu'aucune charge électrique ne se déplace plus à l'intérieur du conducteur. Cela veut dire que la résultante des forces mécaniques appliquées sur chacune des charges électriques dans le matériau par les autres charges est nulle.

2. Quelques propriétés d'un conducteur en équilibre

A) **Champ électrique :** *En tout point à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, le champ électrique $\vec{E}_{int}$ est nul.*

En effet, $\vec{F}_{int} = q\vec{E}_{int} = \vec{0} \implies \vec{E}_{int} = \vec{0}$

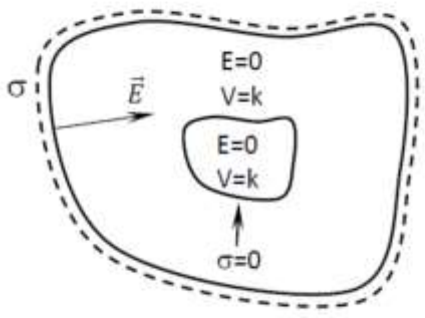
B) **Potentiel électrique :** Comme le champ dérive d'un potentiel, cela implique qu'un conducteur à l'équilibre électrostatique constitue un volume équipotentiel (et donc la surface externe du conducteur est équipotentielle : $V_{int} = V_s = cste$).

C) **Répartition des charges :** Considérons un conducteur est chargé. Choisissons une surface fermée quelconque à l'intérieur de façon qu'elle se retrouve sous la surface du conducteur. D'après le théorème de Gauss, on a:

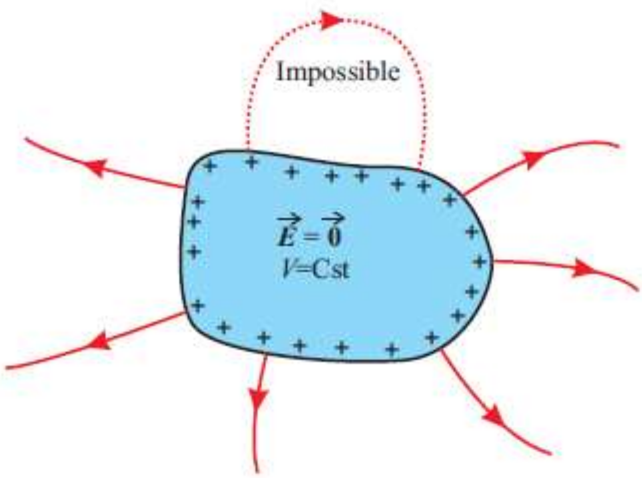
$\oiint_S \vec{E}_{int}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$ car $\vec{E}_{int} = \vec{0}$. On déduit que $Q_{int} = 0$.

Cela signifie que $\rho_{int} = 0$ (autant de charges $+$ que de charges $-$) et donc, qu'à l'équilibre, aucune charge non compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur. Par conséquence, *toutes les charges non compensées se trouvent donc nécessairement localisées à la surface du conducteur*.

Remarque : Les mêmes résultats sont encore valables pour un conducteur creux. Le champ est nul dans le conducteur et la cavité qui constitue un même volume équipotentiel. Les charges sont localisées à la surface externe du conducteur.

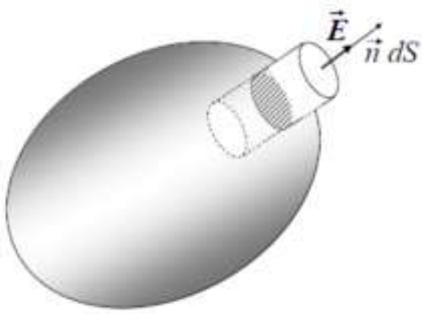


D) **Lignes de champ :** Si le conducteur est chargé, *le champ est normal à la surface d'un conducteur en équilibre,* car s'il y avait une composante parallèle, les charges libres migreraient sur la surface du conducteur.



3. Champ électrique au voisinage de la surface (théorème de Coulomb) :

Construisons, pour cela, une surface de Gauss cylindrique aplatie, dont une base se trouve à l'extérieur de la surface et l'autre base à une profondeur telle que la charge superficielle soit totalement à l'intérieur du cylindre.



En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, nous obtenons:

$$\Phi = \oiint_{S} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint_{S_L} \vec{E}.\overrightarrow{dS} + \oiint_{S_{ext}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} + \oiint_{S_{int}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.S_{ext} = \frac{\sigma.s_{ext}}{\varepsilon_0}$$

Alors :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

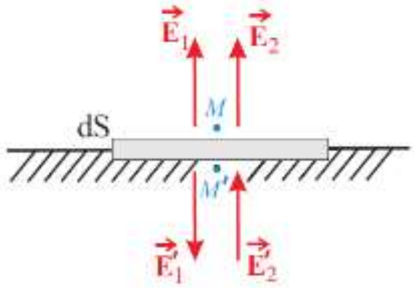
Théorème : *le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur de densité surfacique σ vaut* :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'extérieur.

Cette relation indique, qu'à la traversée d'une distribution superficielle de charges, la composante normale du champ électrique est *discontinue*.

4. **Pression électrostatique :** Soit dS un élément de surface sur un conducteur chargé d'une densité surfacique σ. Soient deux points M et M' infiniment proches et situés respectivement à l'extérieur et à l'intérieur de cette surface. Soit $\vec{E}_1$ le champ créé en M par les charges situées sur dS et $\vec{E}_2$ le champ créé en M par le reste des autres charges situées à la surface du conducteur. Soient $\vec{E'}_1$ et $\vec{E'}_2$ les champs respectifs à l'intérieur en M'.



Puisque le champ à l'intérieur est nul $\vec{E'}_1$ et $\vec{E'}_2$ s'annulent : $\vec{E'}_1 = -\vec{E'}_2$

En utilisant le théorème de Gauss, le champ extérieur E_1 créé par l'élément dS seul au point M est :

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Or le champ extérieur au voisinage de dS pris sur le conducteur chargé est :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

On en déduit que le champ E_2 créé par le reste du conducteur au point M est :

$$E_2 = E - E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

La force électrostatique dF subie par cette charge $dq = \sigma\, dS$ de la part de l'ensemble des autres charges du conducteur vaut :

$$dF = dq.E_2 = \sigma.dS.\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}.dS$$

On peut ainsi définir une pression électrostatique s'exerçant en tout point de la surface du conducteur chargé :

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

$d\vec{F}$ est toujours normale à la surface du conducteur, et dirigée vers l'extérieur, quel que soit le signe de la charge.

5. Effet des pointes :

L'expérience a montré qu'à proximité d'une pointe, le champ électrostatique est toujours très intense. En vertu du théorème de Coulomb, cela signifie que la densité surfacique de charges est très élevée au voisinage d'une pointe. Ce phénomène peut être expliqué en considérant deux sphères chargées de rayons différents R_1 et R_2 ($R_2 < R_1$), reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre. On peut donc considérer que chaque sphère est isolée mais qu'elle partage le même potentiel V. Cela implique alors :

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow V(O_1) = V(O_2) \Rightarrow K\frac{Q_1}{R_1} = K\frac{Q_2}{R_2} \Longrightarrow \frac{\sigma_1 S_1}{R_1} = \frac{\sigma_2 S_2}{R_2}$$

$S_1 = 4\pi R_1^2$; $S_2 = 4\pi R_2^2$, alors :

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

Puisque $R_1 > R_2$ alors $\sigma_2 > \sigma_1$

Donc, la densité de charges d'un conducteur chargé est plus importante sur la surface ayant une courbure forte (petit rayon) que sur la surface ayant une courbure faible (grand rayon).

Applications :

- paratonnerre.
- canon à effet de champ des microscopes électroniques.

6. Capacité d'un conducteur isolé

Soit un conducteur à l'équilibre électrostatique isolé dans l'espace, chargé avec une distribution surfacique σ. La charge électrique totale portée par ce conducteur s'écrit :

$$Q = \iint_S \sigma . dS$$

Le potentiel créé par Q, en un point M du conducteur s'écrit :

$$V(M) = K\iint_S \frac{\sigma(P). dS}{r}$$

où $r = PM$, avec P étant un point quelconque de la surface du conducteur.

Si on multiplie la densité surfacique par un coefficient constant a, on obtient une nouvelle charge totale $Q' = aQ$ et un nouveau potentiel $V' = aV$. On en déduit que :

$$\frac{Q'}{V'} = \frac{Q}{V} = Cste$$

Définition : *La capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre est définie par :*

$$C = \frac{Q}{V}$$

où Q est la charge électrique totale du conducteur porté au potentiel V.

La capacité C ne dépend que des caractéristiques géométriques et du matériau dont est fait le conducteur.

L'unité de la capacité est le *Farad* ($1F=1C/Volts$).

Les unités couramment utilisées en électrocinétique sont le μF, nF et pF (Le Farad est une très grande unité).

Exemple : Capacité d'une sphère conductrice de rayon R, chargée avec une densité surfacique σ.

$$V = V(O) = K\frac{Q}{R}$$

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = \frac{R}{K} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

7. Energie potentielle d'un conducteur en équilibre

On considère un conducteur de capacité C, de charge Q et de potentiel V. On fractionne la charge en charges élémentaires. L'énergie potentielle électrostatique de ce conducteur est alors,

$$E_p = \int dE_p = \int_0^Q V.dq = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C.V^2 = \frac{1}{2}Q.V$$

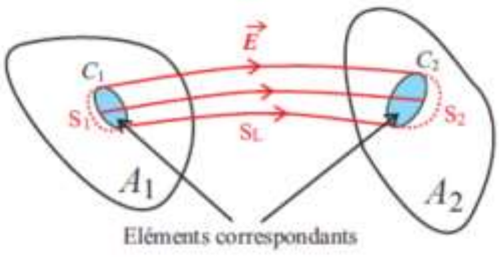
Pour n conducteur en équilibre caractérisés par Q_i et V_i **,** l'énergie totale est **:**

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i.V_i$$

II. Phénomène d'influence électrostatique

1. Théorème des éléments correspondants

Considérons deux conducteurs A_1 et A_2, placés l'un á côté de l'autre. Si le potentiel de A_1 est supérieur à celui de A_2, des lignes de champ électrostatique relient A_1 á A_2.



Prenons un tube de champ connectant les deux éléments de surface correspondants délimités par les petits contours fermés C_1 et C_2. Soient q_1 et q_2 les charges portées respectivement par ces deux éléments. Appliquons le théorème de Gauss à la surface de Gauss : $S = S_L + S_1 + S_2$ où S_1 est la surface située à l'intérieur de A$_1$ et fermant le tube à son extrémité, et S_2 une surface analogue pour le conducteur A$_2$:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \oiint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S}_L + \oiint_{S_1} \vec{E}.d\vec{S}_1 + \oiint_{S_2} \vec{E}.d\vec{S}_2 = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} = 0$$

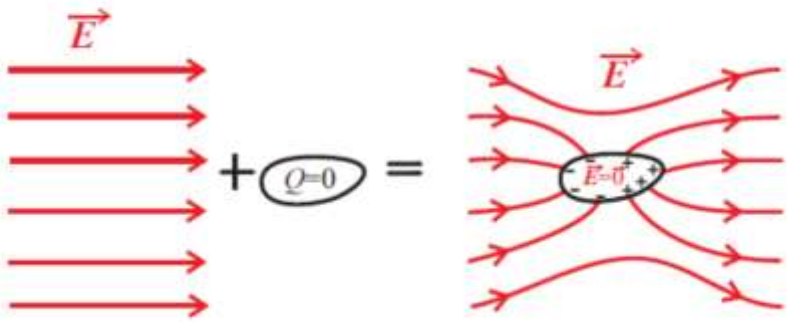
car $\vec{E} \perp d\vec{S}_L$ et $\vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur du conducteur. Alors :

$$q_1 = -q_2$$

Théorème : *Deux éléments correspondants portent des charges égales et opposées*.

2. Influence d'un conducteur neutre et isolé

Soit un conducteur neutre ($Q = 0$) placé dans une région où il existe un champ uniforme. Les charges sont libres de se déplacer : on va donc assister à un déplacement de charges positives dans la direction de E et de charges négatives dans la direction opposée. On obtient alors une **polarisation** du conducteur (création de pôles $+$ et $-$), se traduisant par une distribution surfacique σ non-uniforme (mais telle que $Q = 0$).

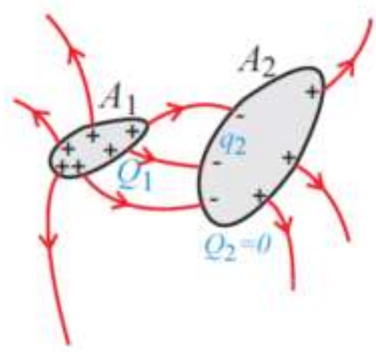


3. Influence partielle et influence totale

Influence Partielle

Considérons un conducteur (A$_1$) de charge Q$_1$ placé á proximité d'un conducteur neutre (A$_2$). Le conducteur (A$_2$) se polarise sous le champ électrostatique de (A$_1$).

Mais, en retour, la présence de charge q_2 située á proximité de (A_1) modifie la distribution de charges de ce dernier à proximité de (A_2)! A l'équilibre électrostatique, les deux distributions de charges des deux conducteurs dépendent l'une de l'autre. On parle alors d'une influence électrostatique réciproque. Dans cet exemple, l'influence est dite **partielle**, car l'ensemble des lignes de champ électrostatique issues de (A_1) n'aboutissent pas sur (A_2). En vertu du théorème des éléments correspondants, on a $|q_2| < |Q_1|$.



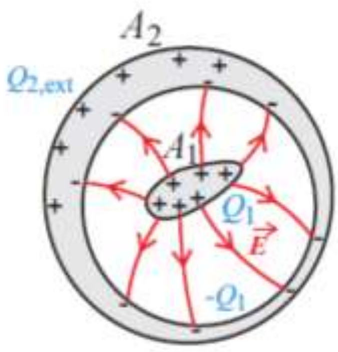
Influence partielle

Influence totale

On parle d'influence totale lorsque toutes les lignes de champ partant de (A_1) aboutissent sur (A_2). Ceci est obtenu lorsqu'on place (A_1) á l'intérieur de (A_2).

L'application du théorème des éléments correspondants, la charge qui apparaît sur la surface interne de (A_2) est égale et opposée à la charge du conducteur (A_1) :

$$Q_{2,int} = -Q_1$$



Influence totale

Cette propriété est connue sous le nom de ***théorème de Faraday***.

Si le conducteur A2 est initialement non chargé, alors :

$$Q_{2,ext} = Q_1$$

et s'il porte une charge initiale Q_2, alors :

$$Q_2 = Q_{2,int} + Q_{2,ext} = -Q_1 + Q_{2,ext}$$

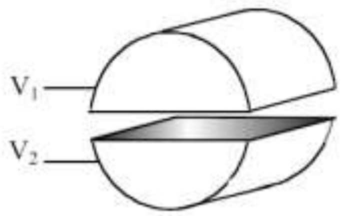
À l'intérieur des deux conducteurs le champ électrostatique reste toujours nul, tandis que entre (A_1) et (A_2) et à l'extérieur de (A_2) le champ n'est pas nul.

L'influence totale constitue le principe physique de base d'un condensateur.

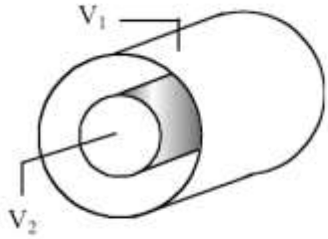
III. Les condensateurs

1. **Définition :** On appelle condensateur tout système de deux conducteurs en influence électrostatique. Les deux conducteurs sont appelés armatures du condensateur. Il y a deux sortes de condensateurs :

- à armatures rapprochées
- à influence totale



Armatures rapprochées



Influence totale

En général, les deux armatures sont séparées par un matériau isolant (un diélectrique, ex : le vide), ce qui a pour effet d'accroître la capacité du condensateur.

2. Calcul de la capacité d'un condensateur

Pour obtenir la capacité C d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge Q et sa tension U, c'est-à-dire :

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}.\overrightarrow{dr} = \frac{Q}{C} \Longrightarrow C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Autrement dit, il faut être capable de calculer la circulation du champ électrostatique entre les deux armatures ainsi que la charge Q. nous allons voir plusieurs exemples de calculs de capacités.

a. Condensateur plan

Soient deux armatures (A_1) et (A_2) planes parallèles infinies, orthogonales à un même axe Oz de vecteur unitaire $\vec{\imath}$ et situées à une distance $d = z_2 - z_1$ l'une de l'autre. L'armature (A_1) porte une densité surfacique de charges σ et (A_2), en vertu du théorème des éléments correspondants, porte une densité $(-\sigma)$. Entre les deux armatures, le champ électrostatique est la superposition des champs créés par ces deux plans infinis, c'est-à-dire :

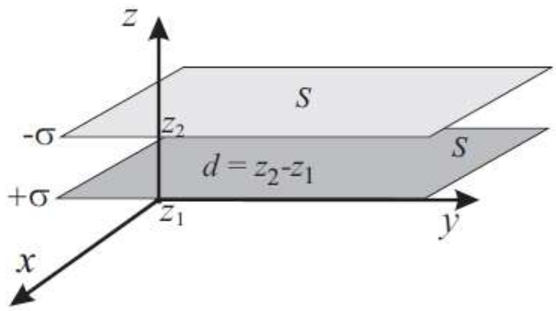
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{k})$$

La différence de potentiel entre les deux armatures est alors :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{z_1}^{z_2} \vec{E}.\overrightarrow{dz} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

D'où une capacité par unité de surface :

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{S.\sigma}{U} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$



b. Condensateur sphérique

Soit un condensateur constitué de deux armatures sphériques de même centre O, de rayons respectifs R_1 et R_2, séparées par un vide ($R_2 > R_1$).

D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique en un point M situé à un rayon r entre les deux armatures vaut :

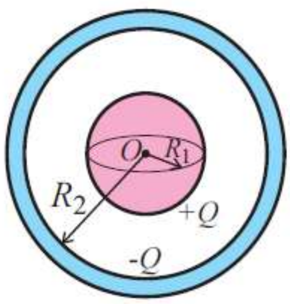
$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{U_r}$$

Ce qui donne une tension :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.\overrightarrow{dr} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

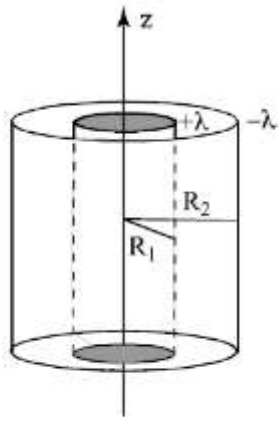
Donc sa capacité totale :

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1.R_2}{R_2 - R_1}$$



c. Condensateur cylindrique

Soit un condensateur constitué de deux armatures cylindriques coaxiales de longueur infinie, de rayons R_1 et R_2, séparées par un vide ($R_2 > R_1$). Soit λ la charge par unité de longueur du cylindre intérieur.



D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique entre les deux armatures s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

En coordonnées cylindriques, ce qui donne une tension :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.\overrightarrow{dr} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{R_2}{R_1}$$

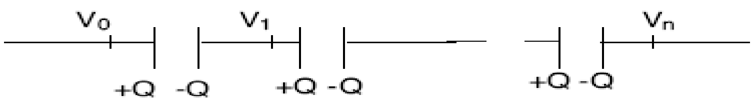
et une capacité par unité de longueur :

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

3. Associations des condensateurs

a. Association en série

Soient n condensateurs de capacités C_i mis en série les uns derrière les autres. On porte aux potentiels V_0 et V_n les deux extrémités de la chaîne et on apporte la charge Q sur le premier condensateur. En supposant que tous les condensateurs sont initialement neutres, il s'établit la charge $\mp Q$ (par influence) sur les armatures des condensateurs adjacents.



Condensateurs en série

La tension totale aux bornes de la chaîne de condensateurs s'écrit alors simplement :

$$U = V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + ... + (V_{n-1} - V_n)$$

$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \frac{Q}{C_n} = (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i})Q$$

et correspond à celle d'une capacité unique C de capacité équivalente :

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

b. Association en parallèle

Soient n condensateurs de capacités C_i mis en parallèle avec la même tension :

$$U = V_1 - V_2$$

La charge électrique de chacun d'entre eux est donnée par :

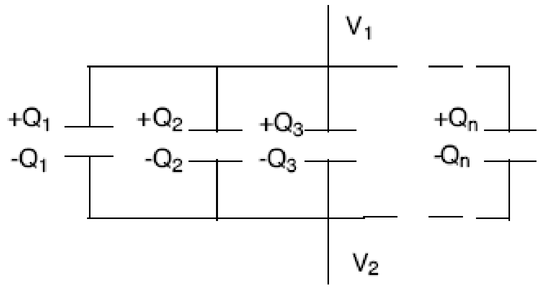
$$Q_i = C_i U$$

La charge électrique totale est simplement :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = (\sum_{i=1}^{n} C_i)U$$

Ce qui correspond à une capacité équivalente :

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$



Condensateurs en parallèle

4. Energie électrostatique emmagasinée dans un conducteur chargé

Soit un condensateur constitué de deux armatures. L'énergie électrostatique de ce système de deux conducteurs est :

$$U_{ES} = \frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2) = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}QU$$

$$U_{ES} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Exemple :

Prenons le cas d'un condensateur plan de densité surfacique σ uniforme et dont les armatures, séparées d'une distance d, ont une surface S commune. L'énergie de ce condensateur s'écrit :

$$U_{ES} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma S)^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{d}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2(Sd) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}v = \iiint_v \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}dv$$

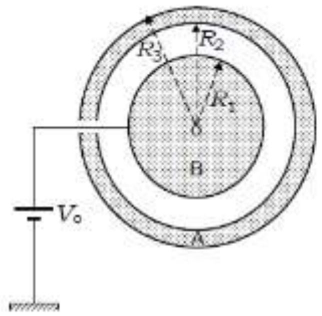
où v est le volume compris entre les deux armatures, où réside le champ E. On voit donc sur cet exemple que l'énergie du condensateur est stockée dans le champ lui-même.

Exercices

Exercice 1

Un conducteur sphérique creux A, initialement neutre, de rayon intérieur $R_2 = 2R$ et rayon extérieur $R_3 = 4R$ entoure un deuxième conducteur sphérique B, de rayon $R_1 = R$, porté à un potentiel V_0 par l'intermédiaire d'un générateur. (Voir figure ci-dessous). Le conducteur B porte une charge Q_0.

1) Quelles sont les charges portées par les surfaces intérieure et extérieure du conducteur A. Justifier.
2) En appliquant le théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrique E dans les quatre régions suivantes : $r < R$, $R < r < 2R$, $2R < r < 4R$, $r > 4R$.
3) En considérant que V_A est le potentiel du conducteur A et sachant que le potentiel électrique est nul à l'infini, déterminer l'expression du potentiel électrique dans les quatre régions.
4) En déduire la charge Q_0 en fonction de R, V_0 et ε_0.



Exercice 2

Une sphère conductrice S_1, de centre O_1 et de rayon R_1= 10 cm, porte une charge électrique q_1 = 10 nanoCoulombs.

1) Calculer son potentiel V et son énergie interne W.
2) On relie, par un fil conducteur, S_1 à une seconde sphère conductrice S_2, initialement neutre, de centre O_2 et de rayon $R_2 = 1\ cm$. Les centres des deux sphères sont séparés par une distance d considéré comme infini. On néglige les caractéristiques du fil de jonction. Calculer, à l'équilibre, les charges q_1 et q_2 portées respectivement par S_1 et S_2.
3) En déduire les densités de charges correspondantes σ_1 et σ_2 et les champs E_1 et E_2 au voisinage de S_1 et S_2.
4) Calculer l'énergie du système formé par les deux sphères avant et après la connexion. Où est passée l'énergie perdue?

Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, initialement les condensateurs ne sont pas chargés. Au début l'interrupteur est en position S_1 puis en position S_2.
Les valeurs des capacités sont $C_1 = 1$ nF, $C_2 = 2$ nF, $C_3 = 3$ nF, $C_4 = 4$ nF et $C_5 = 5$ nF.
$U = 100$ V

1) Trouver la capacité équivalente de la branche constituées des capacités C_3, C_4 et C_5.
2) Calculer l'énergie emmagasinée dans C_4 lorsque l'interrupteur est sur la position S_2.