Corrigé de l'exercice1. I- On a le système linéaire $(\boldsymbol{S})$ suivant :

$$(S)\begin{cases} 3x - y + 3z = 1 \\ -2x + y - z = 0 \\ -2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

a. La matrice des coefficients A et la matrice augmentée $\tilde{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

b. L'écriture matricielle du système $(\boldsymbol{S})$:

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors l'écriture matricielle du système (S) est donnée par :

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

II- On a la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

a. Vérification que $\boldsymbol{AB = I_3}$: On a

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Avec les c_{ij} sont donnés par :

$$\begin{cases} c_{11} = L_1 \times C_1 = (3 \quad -1 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (3)(1) + (-1)(2) + (3)(0) = 3 - 2 + 0 = 1 \\ c_{12} = L_1 \times C_2 = (3 \quad -1 \quad 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (3)(-1) + (-1)(0) + (3)(1) = -3 + 0 + 3 = 0 \\ c_{13} = L_1 \times C_3 = (3 \quad -1 \quad 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (3)(2) + (-1)(3) + (3)(-1) = 6 - 3 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{21} = L_2 \times C_1 = (-2 \quad 1 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)(1) + (1)(2) + (-1)(0) = -2 + 2 + 0 = 0 \\ c_{22} = L_2 \times C_2 = (-2 \quad 1 \quad -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2)(-1) + (1)(0) + (-1)(1) = 2 + 0 - 1 = 1 \\ c_{23} = L_1 \times C_3 = (-2 \quad 1 \quad -1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2)(2) + (1)(3) + (-1)(-1) = -4 + 3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{31} = L_3 \times C_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)(1) + (1)(2) + (-2)(0) = -2 + 2 + 0 = 0 \\ c_{32} = L_3 \times C_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2)(-1) + (1)(0) + (-2)(1) = 2 + 0 - 2 = 0 \\ c_{33} = L_3 \times C_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2)(2) + (1)(3) + (-2)(-1) = -4 + 3 + 2 = 1 \end{cases}$$

(Où L_i représente la i$^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A et C_j la j$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B)

Ainsi :

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En d'autre terme : $AB = I_3$

Et comme conclusion, on dit A est inversible et son inverse $A^{-1} = B$.

b. La solution du système par la matrice inverse :

On a $AX = b$ et A une matrice inversible, alors $X = A^{-1}b$. Donc, $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

III. La résolution du système par les deux méthodes :

a. Vérification si le système est de Cramer :

Comme la matrice A est inversible (d'après ce qui précède), le système (S) est de Cramer.

b. La résolution du système par Cramer :

Comme le système est de Cramer, il admet une unique solution $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = 3,\ y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = 5,\ z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = -1$$

Où, et en utilisant la méthode de Sarrus, les déterminants :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{matrix}\Bigg| = (3)(1)(-2) + (-1)(-1)(-2) + (3)(-2)(1) - (-2)(1)(3) - (1)(-1)(3)$$

$$-(-2)(-2)(-1) = -6 - 2 - 6 + 6 + 3 + 4 = -1.$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\Bigg| = (1)(1)(-2) + (-1)(-1)(1) + (3)(0)(1) - (1)(1)(3) - (1)(-1)(1)$$

$$-(-2)(0)(-1) = -2 + 1 + 0 - 3 + 1 - 0 = -3.$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}\Bigg| = (3)(0)(-2) + (1)(-1)(-2) + (3)(-2)(1) — 2(0)(3) - (1)(-1)(3)$$

$$-(-2)(-2)(1) = 0 + 2 - 6 - 0 + 3 - 4 = -5.$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{matrix}\Bigg| = (3)(1)(1) + (-1)(0)(-2) + (1)(-2)(1) - 2(1)(1) - (1)(0)(3)$$

$$-(1)(-2)(-1) = 3 + 0 - 2 - 2 - 0 + 2 = 1.$$

Et par conséquent, $\bar{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c. <u>La résolution du système par la méthode d'élimination de Gauss :</u>

L'échelonnement de la matrice augmentée $\tilde{A}$ nous donne :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + \left(\frac{2}{3}\right) L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \left(\frac{2}{3}\right) L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = \tilde{A}_e$$

Le système échelonnée (S_e) associé a la matrice augmentée échelonnée $\tilde{A}_e$ se définit :

$$(S_e)\begin{cases} 3x - y + 3z = 1 \\ \frac{1}{3}y + z = \frac{2}{3} \\ -z = 1 \end{cases}$$

Le système admet une seule solution (nombre de variables = nombre d'équations dans le système (S_e)).
La résolution de (S_e) nous donne :

$$(S_e)\begin{cases} 3x - y + 3z = 1 \\ \frac{1}{3}y + z = \frac{2}{3} \\ -z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - y + 3z = 1 \\ \frac{1}{3}y + z = \frac{2}{3} \\ z = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - y + 3(-1) = 1 \\ \frac{1}{3}y + (-1) = \frac{2}{3} \\ z = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - 5 = 4 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}$$

Finalement l'unique solution du système (S) est : $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice2. La résolution du système par la méthode d'élimination de Gauss :

Le Premier Système :

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

La matrice augmentée :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

L'échelonnement de la matrice augmentée :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-3)L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (-1)L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (-1)L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \tilde{A}_e$$

Le système échelonnée (S_e) associé a la matrice augmentée échelonnée $\tilde{A}_e$:

$$(S_e)\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -3x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

Le système (S) admet une infinité de solutions (nombre d'équations < nombre de variables dans (S_e)).

La résolution de (S_e) :

$$(S_e)\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -3x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -3x_3 = 3 + 3x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_3 = -1 - x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2(-1 - x_4) + 2x_4 = 1 \\ x_3 = -1 - x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + -2 - 2x_4 + 2x_4 = 1 \\ x_3 = -1 - x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - x_2 \\ x_3 = -1 - x_4 \end{cases}$$

Finalement les solutions du système (S) sont :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - s \\ s \\ -1 - t \\ t \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}.$$

Le Deuxième Système :

$$(S')\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ x + z = 6 \\ 2x - 3y + 5z = 4 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

La matrice augmentée :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

L'échelonnement de la matrice augmentée :

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&4\\1&0&1&6\\2&-3&5&4\\3&2&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2+(-1)L_1\\L_3\leftarrow L_3+(-2)L_1\\L_4\leftarrow L_4+(-3)L_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&4\\0&1&-1&2\\0&-1&1&-4\\0&5&-7&-11\end{array}\right)\begin{array}{l}L_3\leftarrow L_3+(1)L_2\\L_4\leftarrow L_4+(-5)L_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&4\\0&1&-1&2\\0&0&0&-2\\0&5&-7&-11\end{array}\right)$$

A la troisième ligne de cette dernière matrice correspond l'équation : $0=-2$. Ce qui est absurde.

Et par conséquent le système (S') n'admet pas de solutions.

Corrigé de l'exercice supplémentaire. La résolution du système par la méthode de Gauss :

Le Premier Système :

$$(a)\begin{cases}x_1\ +x_2+2x_3=4\\-x_1+2x_2-x_3=1\\2x_1\qquad +3x_3=-2\end{cases}$$

La matrice augmentée :

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&4\\-1&2&-1&1\\2&0&3&-2\end{array}\right)$$

L'échelonnement de la matrice augmentée :

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&4\\-1&2&-1&1\\2&0&3&-2\end{array}\right)\begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2+(1)L_1\\L_3\leftarrow L_3+(-2)L_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&4\\0&3&1&5\\0&-2&-1&-10\end{array}\right)L_3\leftarrow L_3+\left(\frac{2}{3}\right)L_2\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&4\\0&3&1&5\\0&0&-\frac{1}{3}&-\frac{20}{3}\end{array}\right)=\tilde{A}_e$$

Le système échelonnée (S_e) associé a la matrice augmentée échelonnée $\tilde{A}_e$:

$$(S_e)\begin{cases}x+y+2z=4\\3y+z=5\\-\frac{1}{3}z=-\frac{20}{3}\end{cases}$$

Le système (a) admet une seule solution (nombre de variables = nombre d'équations dans (S_e)).

La résolution de (S_e) :

$$(S_e)\begin{cases}x+y+2z=4\\3y+z=5\\-\frac{1}{3}z=-\frac{20}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+2z=4\\3y+z=5\\z=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+2(20)=4\\3y+20=5\\z=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=-36\\3y=-15\\z=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=-36\\y=-5\\z=20\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-5=-36\\y=-5\\z=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-31\\y=-5\\z=20\end{cases}$$

Finalement l'unique solution du système (a) est : $X=\begin{pmatrix}-31\\-5\\20\end{pmatrix}$.

Le Deuxième Système :

$$(b)\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 3x\;-y\;+z=0 \\ -2x+y-3z=1 \end{cases}$$

La matrice augmentée :

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

L'échelonnement de la matrice augmentée :

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} L_2\leftarrow L_2+(-3)L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+(2)L_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & -5 & 3 \end{array}\right)L_3\leftarrow L_3+\left(\frac{7}{10}\right)L_2\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{5} & \frac{9}{10} \end{array}\right)=\tilde{A}_e$$

Le système échelonnée (S_e) associé a la matrice augmentée échelonnée $\tilde{A}_e$:

$$(S_e)\begin{cases} x+3y-z=1 \\ -10y+4z=-3 \\ -\frac{11}{5}z=\frac{9}{10} \end{cases}$$

Le système (b) admet une seule solution (nombre de variables = nombre d'équations dans (S_e)).

La résolution de (S_e) :

$$(S_e)\begin{cases} x+3y-z=1 \\ -10y+4z=-3 \\ -\frac{11}{5}z=\frac{9}{10} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+3y-z=1 \\ -10y+4z=-3 \\ z=-\frac{9}{22} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+3y-\left(-\frac{9}{22}\right)=1 \\ -10y+4\left(-\frac{9}{22}\right)=-3 \\ z=-\frac{9}{22} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x+3y+\frac{9}{22}=1 \\ -10y-\frac{18}{11}=-3 \\ z=-\frac{9}{22} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+3y=1-\frac{9}{22} \\ -10y=-3+\frac{18}{11} \\ z=-\frac{9}{22} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+3y=\frac{13}{22} \\ -10y=-\frac{15}{11} \\ z=-\frac{9}{22} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+3y=\frac{13}{22} \\ y=\frac{3}{22} \\ z=-\frac{9}{22} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x+3\left(\frac{3}{22}\right)=\frac{13}{22} \\ y=\frac{3}{22} \\ z=-\frac{9}{22} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+\frac{9}{22}=\frac{13}{22} \\ y=\frac{3}{22} \\ z=-\frac{9}{22} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{13}{22}-\frac{9}{22} \\ y=\frac{3}{22} \\ z=-\frac{9}{22} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{4}{22} \\ y=\frac{3}{22} \\ z=-\frac{9}{22} \end{cases}$$

Finalement l'unique solution du système (b) est : $X=\begin{pmatrix} \frac{4}{22} \\ \frac{3}{22} \\ -\frac{9}{22} \end{pmatrix}$.

Le Troisième Système :

$$(c)\begin{cases} 2y+z+2t-w=0\\ y+t-w=0\\ 4x+6y+z+4t-3w=0\\ 2x+2y+t-w=0\end{cases}$$

La matrice augmentée :

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 0&2&1&2&-1&0\\ 0&1&0&1&-1&0\\ 4&6&1&4&-3&0\\ 2&2&0&1&-1&0\end{array}\right)$$

L'échelonnement de la matrice augmentée :

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 0&2&1&2&-1&0\\ 0&1&0&1&-1&0\\ 4&6&1&4&-3&0\\ 2&2&0&1&-1&0\end{array}\right) L_3\leftrightarrow L_1 \left(\begin{array}{ccccc|c} 4&6&1&4&-3&0\\ 0&1&0&1&-1&0\\ 0&2&1&2&-1&0\\ 2&2&0&1&-1&0\end{array}\right) L_4\longleftarrow L_4+\left(-\frac{1}{2}\right)L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4&6&1&4&-3&0\\ 0&1&0&1&-1&0\\ 0&2&1&2&-1&0\\ 0&-1&-1/2&-1&1/2&0\end{array}\right)\begin{array}{l} L_3\longleftarrow L_3+(-2)L_2\\ L_4\longleftarrow L_4+(1)L_2\end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c} 4&6&1&4&-3&0\\ 0&1&0&1&-1&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 0&0&-1/2&0&-1/2&0\end{array}\right) L_4\longleftarrow L_4+\left(\frac{1}{2}\right)L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4&6&1&4&-3&0\\ 0&1&0&1&-1&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\end{array}\right)=\widetilde{A}_e.$$

Le système échelonnée (S_e) associé a la matrice augmentée échelonnée $\widetilde{A}_e$:

$$(S_e)\begin{cases} 4x+6y+z+4t-3w=0\\ y+t-w=0\\ z+w=0\end{cases}$$

Le système (C) admet une infinité de solutions (nombre d'équations $<$ nombre de variables dans (S_e)).

La résolution de (S_e) :

$$(S_e)\begin{cases} 4x+6y+z+4t-3w=0\\ y+t-w=0\\ z+w=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} 4x+6y+z+4t-3w=0\\ y+t-w=0\\ z=-w\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} 4x+6y-w+4t-3w=0\\ y+t-w=0\\ z=-w\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} 4x+6y-w+4t-3w=0\\ y=-t+w\\ z=-w\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} 4x+6(-t+w)-w+4t-3w=0\\ y=-t+w\\ z=-w\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} 4x-2t+2w=0\\ y=-t+w\\ z=-w\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{2}(t-w)\\ y=-t+w\\ z=-w\end{cases}$$

Finalement les solutions du système (c) sont :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)(\beta - \alpha) \\ -\beta + \alpha \\ -\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$