CHAPITRE 6

CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

OBJECTIFS:

→ Etablir les propriétés électrostatiques des conducteurs: champ, potentiel, énergie.

→ Etudier les propriétés d'un système de 2 conducteurs en influence.

→ Appliquer ces résultats aux condensateurs: propriétés, capacité, forces sur les armatures.

I- CONDUCTEUR EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

1- Définitions

➔ Un conducteur est un matériau qui contient des charges mobiles. Ces charges se mettent en mouvement dès qu'elles sont dans un champ électrostatique.

★ exemples: ▪ métal: $\rightarrow$porteurs de charge $=$ e^- libres

▪ gaz ionisé: $\rightarrow$porteurs de charge $=$ ions

▪ électrolytes: $\rightarrow$porteurs de charge $=$ ions

➔ Un conducteur est en équilibre lorsque les charges libres qu'il contient sont au repos.

2- Propriétés d'un conducteur en équilibre

- Le champ électrostatique est nul à l'intérieur de tout conducteur en équilibre:

  → charges libres au repos $\Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = \vec{0}$

- Le potentiel est constant à l'intérieur et sur la surface d'un conducteur en équilibre.

  → $\vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad V = C^{te}$ à l'intérieur

  par continuité, $V = C^{te}$ à la surface

  ★ la surface d'un conducteur en équilibre est une équipotentielle.

  ★ les lignes de champ sont normales à la surface pour un conducteur chargé

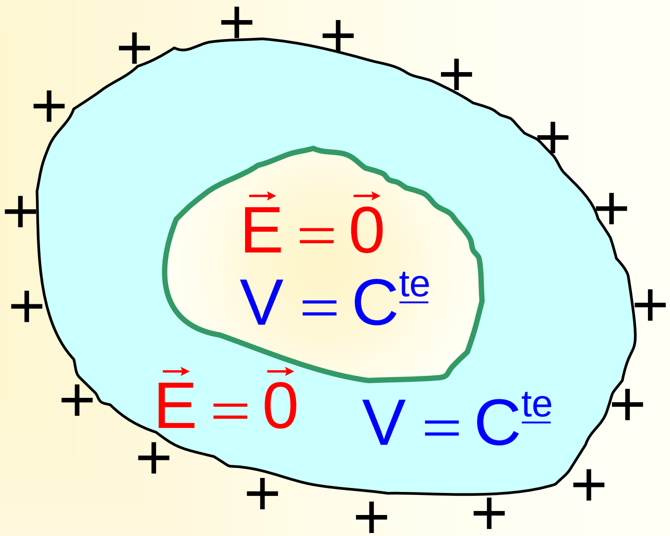
➔ Si le conducteur en équilibre est chargé, cette charge ne peut être que surfacique.

➔ Cas d'un conducteur creux chargé:

$$\vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad V = C^{\underline{te}} \quad \text{partout}$$

→ la surface intérieure est une équipotentielle

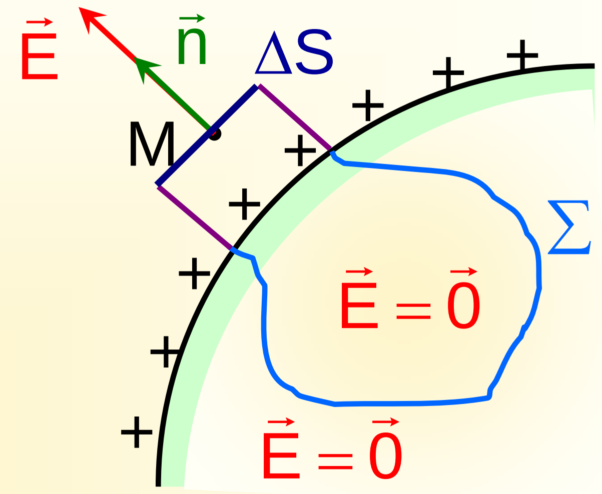
→ il ne peut pas y avoir de charges sur la surface intérieure de la cavité



3- Champ au voisinage d'un conducteur

a- Théorème de Coulomb

➔ Le champ électrostatique présente une discontinuité à la traversée de la surface d'un conducteur en équilibre.



- S surface fermée $= \Sigma$ + tube + ΔS
- M infiniment voisin de la surface du conducteur.
- $\vec{n}$ normale à la surface en M.

$$\Phi_{\vec{E}/S} = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \Phi_{\vec{E}/dS} + \Phi_{\vec{E}/tube} + \Phi_{\vec{E}/\Sigma} = \frac{\sigma\,\Delta S}{\varepsilon_0}$$

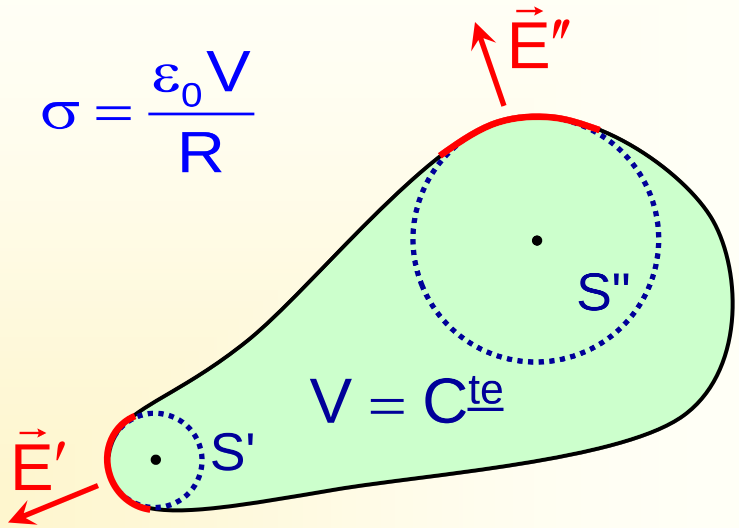
d'où $\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{n}}$ champ au voisinage d'un conducteur en équilibre

b- "Pouvoir des pointes"

$\rightarrow$ Sphère de rayon R au potentiel V: $\sigma = \dfrac{\varepsilon_0 V}{R}$

$\rightarrow$ Sphère S' de rayon R': $\sigma' = \dfrac{\varepsilon_0 V}{R'}$

$\rightarrow$ Sphère S'' de rayon R'': $\sigma'' = \dfrac{\varepsilon_0 V}{R''}$



★ Au voisinage de la surface, $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$R' < R'' \Rightarrow \sigma' > \sigma'' \Rightarrow E' > E''$$

➔ A la surface d'un conducteur en équilibre au potentiel V, le champ électrostatique sera très intense au voisinage d'une pointe.

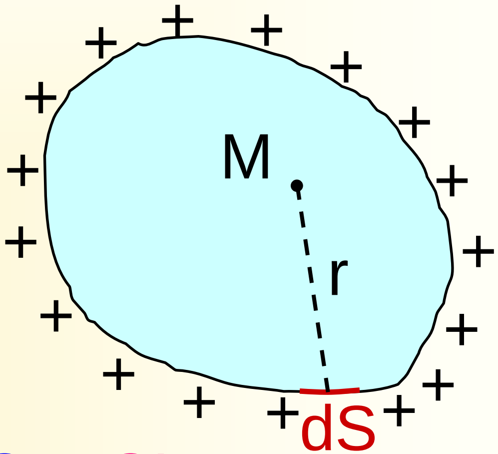
$\Rightarrow$ ionisation de l'air $\Rightarrow$ décharge (paratonnerre, avion,…)

$\Rightarrow$ impossiblité de conserver la charge pour un conducteur chargé muni de pointes.

4- Capacité d'un conducteur en équilibre

En un point M d'un conducteur en équilibre, de surface S et de densité σ, le potentiel s'écrit:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma \cdot ds}{r}$$



Sa charge totale est: $Q = \iint_S \sigma \cdot dS$

Si $\sigma \rightarrow k\sigma$ alors: $\begin{cases} V'(M) = k \cdot V(M) \\ Q' = k \cdot Q \end{cases} \Rightarrow \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'} = C^{te}$

On pose: $\boxed{\frac{Q}{V} = C}$ capacité d'un conducteur isolé en équilibre

★ C toujours >0

★ Unité: Farad (coulomb.volt^{-1})

★ Exemple: $C_{terre} = 4\pi\varepsilon_0 R = 710\ \mu F$

5- Energie d'un système de conducteurs chargés en équilibre

★ La distribution est surfacique et V constante sur la surface.

→ **Cas d'un seul conducteur:**

$$E_e = \frac{1}{2}\iint_S \sigma \cdot V \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot V \cdot \iint_S \sigma \cdot ds = \frac{1}{2} Q \cdot V$$

$$\boxed{E_e = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

→ **Cas d'un système de n conducteurs:**

Conducteur A_i: charge Q_i et potentiel $V_i \Rightarrow \quad E_e(i) = \frac{1}{2} Q_i V_i$

Pour n conducteurs $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$:

$$\boxed{E_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i}$$

Application

Champ électrostatique crée par une boule métallique

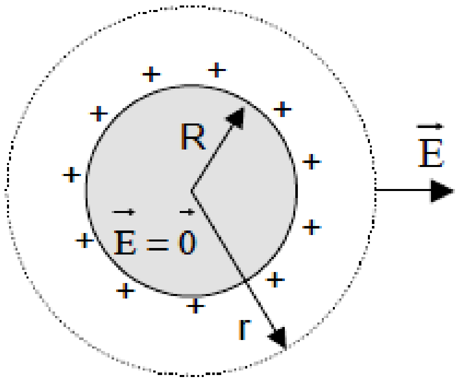
Considérons une boule en métal de rayon R ayant une charge globale Q.
A l'équilibre, comment se répartissent les charges dans le conducteur ?
En déduire l'expression de la densité surfacique de charge σ (en C/m^2).
Que vaut le champ électrostatique dans le conducteur ?

En appliquant le théorème de Coulomb, vérifier qu'à la surface du conducteur : $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^2}$

En utilisant le théorème de Gauss, montrer que l'intensité du champ électrostatique crée à la distance r ($r \geq R$) du centre du conducteur est : $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$

Corrigé

A l'équilibre, les charges se répartissent uniformément sur la surface.



$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2} \text{ en C/m}^2.$$

S est la surface d'une sphère.

Dans un conducteur à l'équilibre, le champ électrostatique est nul.

A la surface (théorème de Coulomb) : $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^2}$

Considérons une surface fermée sphérique de rayon r.

Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est : $\Phi = ES = E\,4\pi r^2$

L'application du théorème de Gauss donne : $E\,4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

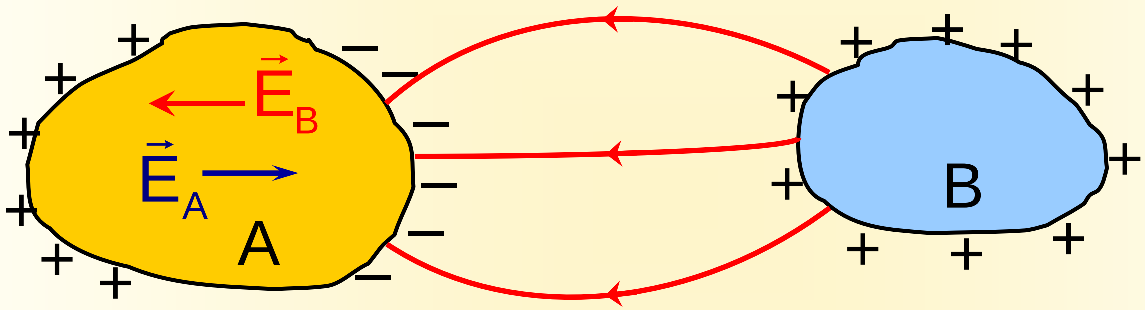
L'intensité du champ électrostatique à la distance $r \geq R$ est donc : $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$

II- INFLUENCE ELECTROSTATIQUE

1- Expérience fondamentale. Définition de l'influence

$\rightarrow$ conducteur A isolé, neutre, en équilibre.

$\rightarrow$ conducteur B isolé, chargé, en équilibre.



conducteur influençé

conducteur influençant

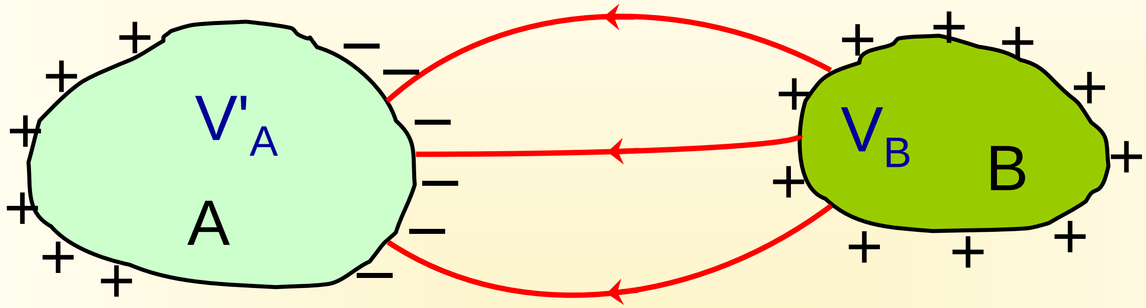
$\rightarrow$ déplacement des charges libres de A sous l'influence de $\vec{E}_B$

$\rightarrow$ à l'équilibre, $\vec{E}_A = -\vec{E}_B$

➔ La répartition des charges superficielles du conducteur A est modifiée $\Rightarrow$ A a été influencé par le champ de B

2- Etats possibles d'un conducteur

a- Conducteur isolé



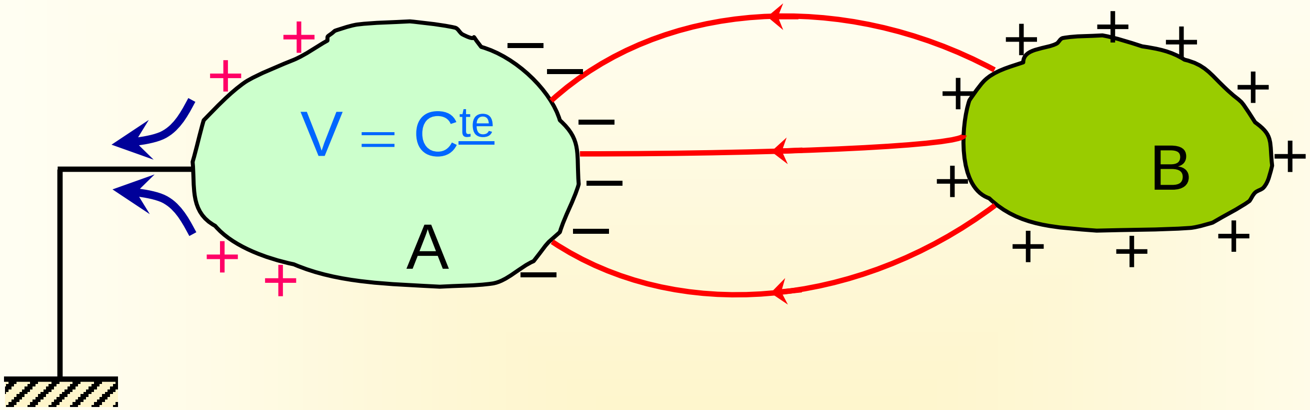
→ Initialement, A est neutre et isolé $\Rightarrow Q_A = V_A = \sigma_A = 0$

→ Après influence par B chargé, $V'_A \neq 0$ alors que $Q'_A = 0$

➔ Pour un conducteur isolé, l'influence conserve la charge totale mais modifie la répartition des charges sur la surface et donc son potentiel.

→ à charge constante, σ et V peuvent varier.

b- Conducteur à potentiel constant

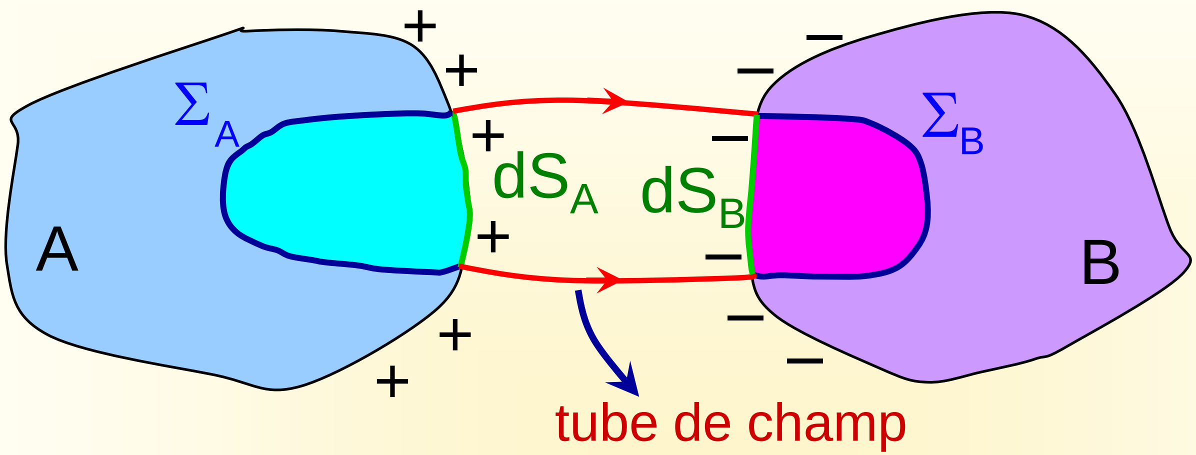


→ Les charges ⊕ de A "s'écoulent" vers la terre.

➔ L'influence modifie la charge totale d'un conducteur maintenu à un potentiel constant.

→ à potentiel constant, σ et Q peuvent varier.

3- Théorème des éléments correspondants



→ dS_A et dS_B sont des éléments correspondants.

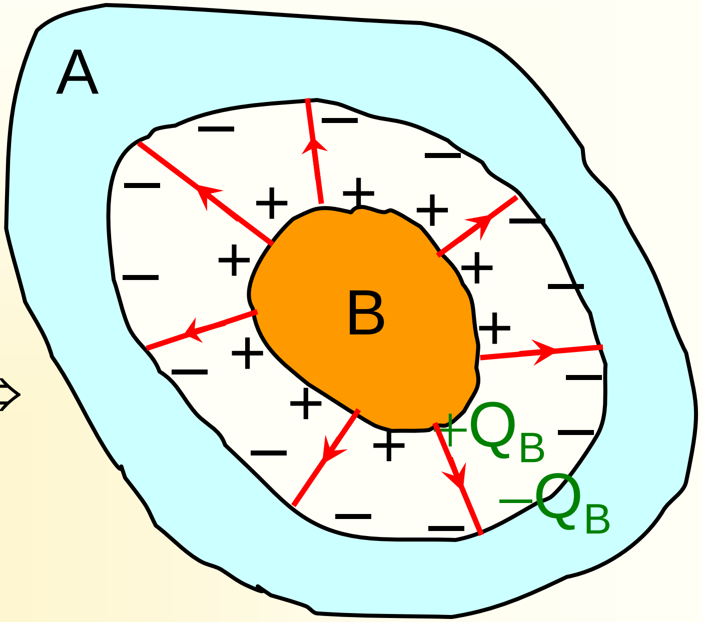
→ Th. de Gauss appliqué à la surface fermée [$\Sigma_A + \Sigma_B +$ tube] :

$$\iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \Phi_{\vec{E}/\Sigma_A} + \Phi_{\vec{E}/\Sigma_B} + \Phi_{tube} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \Leftrightarrow \underline{dq_A = -dq_B}$$

➔ **Théorème:** Les charges de deux éléments correspondants sont égales et opposées.

4- Influence totale

→ Il y a influence totale lorsque le conducteur A (influencé) entoure complètement le conducteur B (influençant).



→ Th. des éléments correspondants ⇒ $-Q_B$ sur la surface intérieure de A

→ Face extérieure de A: différents cas:

★ A relié au sol: $V_A = 0 \Rightarrow Q_{ext} = 0$

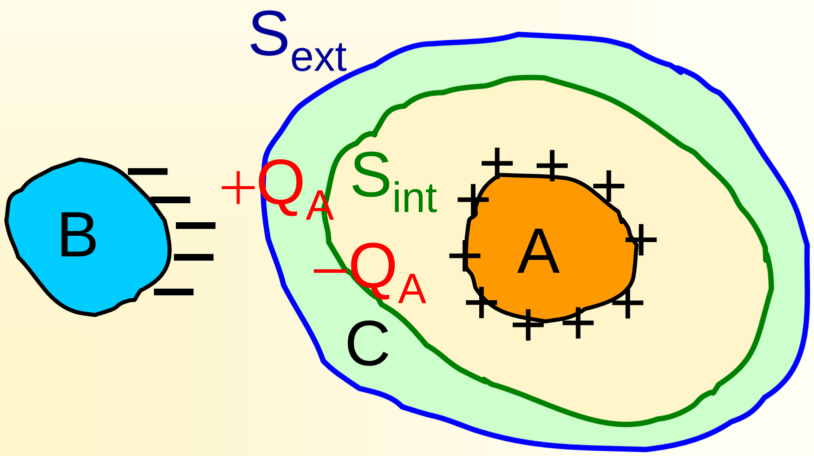
★ A isolé et initialement neutre: $Q_{ext} = -Q_{int} = +Q_B$

★ A isolé et initialement chargé $+Q_0$: $Q_{ext} = Q_0 + Q_B$

5- Ecrans électriques

a- Conducteur creux isolé ($Q_C = C^{te}$)

★ A chargé Q_A , $Q_B = 0$



$\Rightarrow$ S_{ext} : charge $+Q_A$

$\Rightarrow$ C n'est pas un écran

★ B chargé , $Q_A = 0$

$\Rightarrow$ pas d'influence sur S_{int} et A (conducteur creux)

$\Rightarrow$ C est un écran électrique pour l'intérieur du conducteur (cage de Faraday)

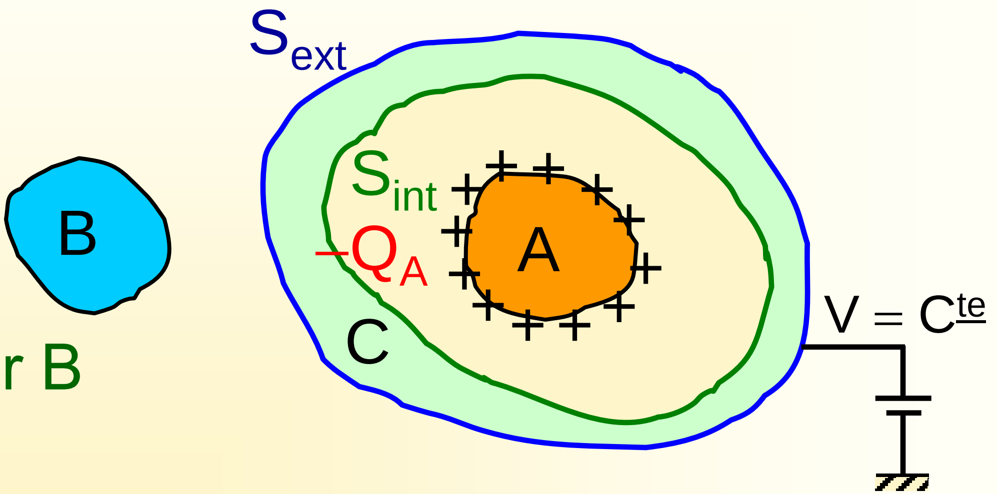
b- Conducteur creux maintenu à potentiel constant

★ A chargé Q_A , $Q_B = 0$

$\Rightarrow$ S_{int} charge $-Q_A$

S_{ext} invariante

$\Rightarrow$ pas d'influence de A sur B



★ B chargé

V reste constant

$\Rightarrow$ S_{int} invariante $\Rightarrow$ pas d'influence de B sur A

➔ C joue le rôle d'un écran électrique (blindage)

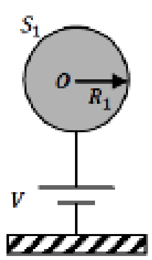
(en pratique, $V = 0$, le blindage est "à la masse")

➘ Pour réaliser un écran électrique parfait il suffit de maintenir à potentiel constant un conducteur creux.

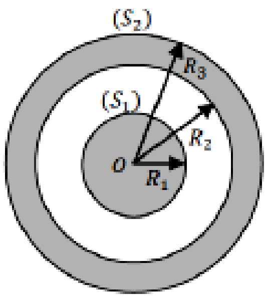
Application sur les phénomènes d'influence

<u>Exercice 2 :</u> Une sphère conductrice S_1 de rayon $R_1 = 10\ cm$ est portée à un potentiel $V = 1000\ V$ par rapport au sol, par l'intermédiaire d'un générateur (Figure 1).

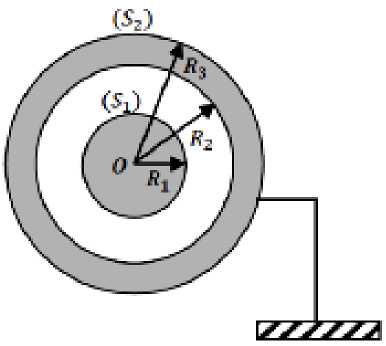
1. Calculer la charge Q_1 de S_1
2. On isole S_1 du générateur, puis on l'entoure d'une sphère conductrice creuse S_2, de rayon intérieur $R_2 = 11\ cm$ et extérieur $R_3 = 12\ cm$, initialement neutre et isolée (Figure 2).
   - **a.** Calculer les charges Q_2 et Q_3 portées par les deux faces de la sphère S_2.
   - **b.** Déterminer la différence de potentiels $V_1 - V_2$ entre les deux sphères S_1 et S_2.
3. On relie la sphère S_2 au sol par l'intermédiaire d'un fil conducteur (Figure 3).
   - **a.** Calculer les nouvelles charges Q'_2 et Q'_3 portées par les deux faces de la sphère S_2.
   - **b.** Déterminer la nouvelle différence de potentiels $V'_1 - V'_2$ entre les deux sphères S_1 et S_2. Conclure.



<u>Figure 1</u>



<u>Figure 2</u>



<u>Figure 3</u>

IV- CONDENSATEURS

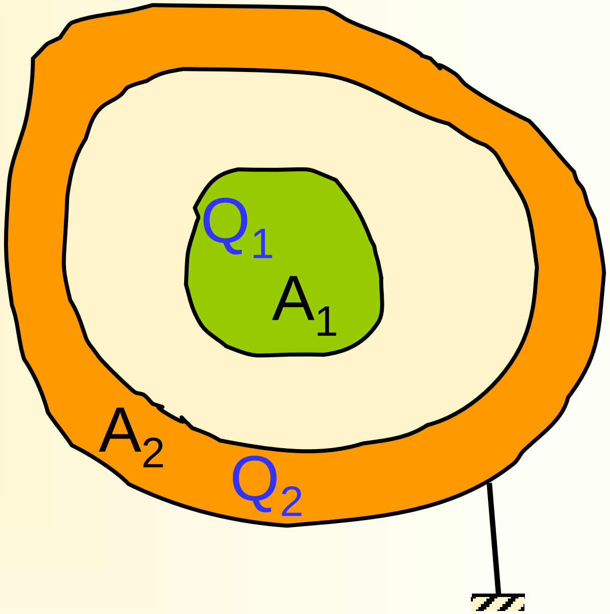
1- Définitions

➔ Un condensateur est un ensemble de 2 conducteurs en influence totale.

$\rightarrow A_1 =$ armature interne de charge Q_1

$\rightarrow A_2 =$ armature externe de charge

$$Q_2 = -Q_1 + Q_{2ext}$$



★ Si A_2 relié au sol: $V_2 = 0 \;\Rightarrow\; Q_{2ext} = 0$

$$Q_2 = -Q_1$$

➔ On appel $Q_1 = Q$ est la charge du condensateur

Capacité du condensateur C

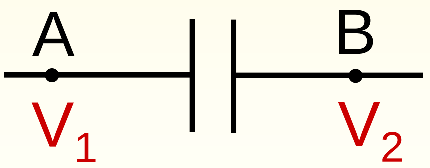
$$Q = Q_1 = -Q_2 \qquad (Q_{2ext} = 0 \text{ car } V_2 = 0)$$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q = C(V_1 - V_2)}$$

➔ La charge d'un condensateur est proportionnelle à la différence de potentiel qui existe entre ses armatures.

➔ La capacité C dépend de la géométrie (forme) des armatures.

➔ Schéma d'un condensateur:



2- Calcul de capacités

a- Méthode générale

① → Calcul de $\vec{E}$ entre les armatures (Th. de Gauss).

② → Calcul de la circulation de $\vec{E}$ entre les armatures.

$$V_1 - V_2 = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

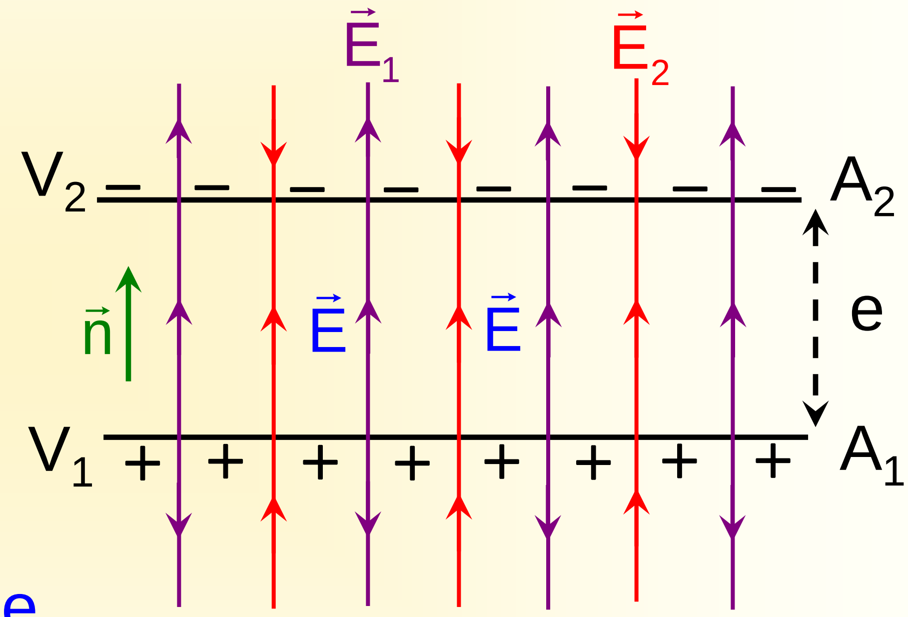
③ → Calcul de C.

$$Q = \iint_S \sigma \cdot dS \qquad \text{et} \qquad C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

b- Condensateur plan

→ Armatures A_1 et A_2 : plans de surface S séparés d'une distance e (S >> e) et portés aux potentiels V_1 et V_2.

→ Densités de charges uniformes: $+\sigma$ sur A_1 et $-\sigma$ sur A_2.



① $$\left.\begin{array}{l} \vec{E}_1 = \pm \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} \\ \vec{E}_2 = \pm \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

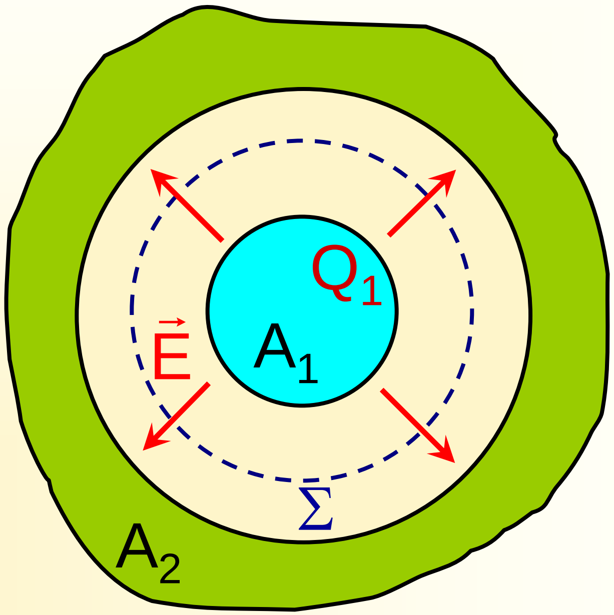
② $$V_1 - V_2 = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E}\cdot\vec{dl} = E\cdot e = \frac{\sigma \cdot e}{\varepsilon_0}$$

③ $$Q = \sigma \cdot S \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

c- Condensateur sphérique

→ Armature A_1 : sphère de rayon R_1.

→ Armature A_2 : sphère de rayon R_2.



① Σ surface de Gauss de rayon r ⇒

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\,\vec{u}_r$$

② Circulation de $\vec{E}$ entre A_1 et A_2:

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dr} = V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

③ $$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

3- Propriétés des condensateurs

a- Accumulation d'électricité

Un condensateur est un "réservoir" d'électricité.

$\rightarrow$ Conducteur A_1 sphérique isolé au potentiel V: $Q = 4\pi\varepsilon_0 RV$

$\rightarrow$ Si on entoure A_1 par un autre conducteur sphérique de rayon R+e (avec R>>e) au potentiel 0, Q devient:

$$Q' = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{e} V \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q'}{Q} = \frac{R}{e} \gg 1$$

➔ Pour une ddp donnée, on peut placer une charge beaucoup plus grande sur un condensateur que sur un conducteur isolé.

➔ Un condensateur sera caractérisé par:

- $\rightarrow$ sa capacité.
- $\rightarrow$ la ddp $(V_1 - V_2)$ maximum qu'il peut supporter.

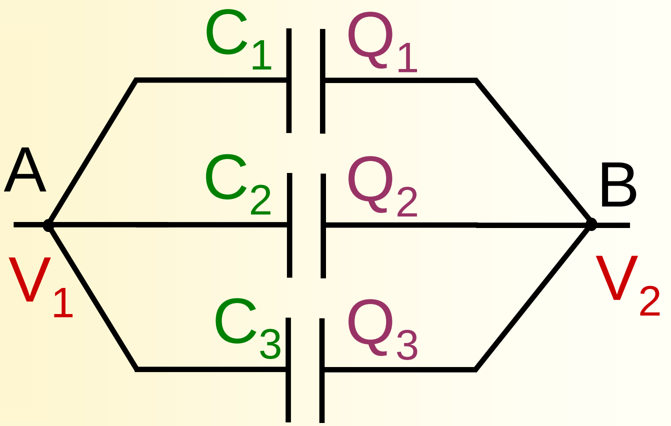
b- Groupement de condensateurs

➔ On groupe le condensateurs pour obtenir un condensateur équivalent:

→ capacité plus grande (groupement parallèle).

→ ddp plus grande (groupement série).

★ **Groupement parallèle**



→ armatures internes: potentiel V_1.

→ armatures externes: potentiel V_2.

→ charge du groupement:

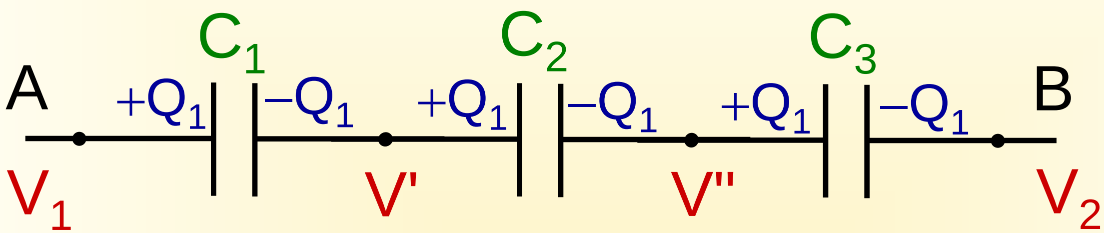
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)(V_1 - V_2) = C(V_1 - V_2)$$

➔ Pour n condensateurs groupés en parallèle, le condensateur équivalent a une capacité:

$$\boxed{C = \sum_1^n C_i}$$

★ **Groupement série**

→ l'armature interne d'un condensateur est reliée à l'armature externe du suivant, etc.….



→ tous les condensateurs portent la même charge Q_1.

$$V_1 - V_2 = (V_1 - V') + (V' - V'') + (V'' - V_2)$$

d'où $$V_1 - V_2 = Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{Q_1}{C}$$

➔ Pour n condensateurs groupés en série, le condensateur équivalent a une capacité:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

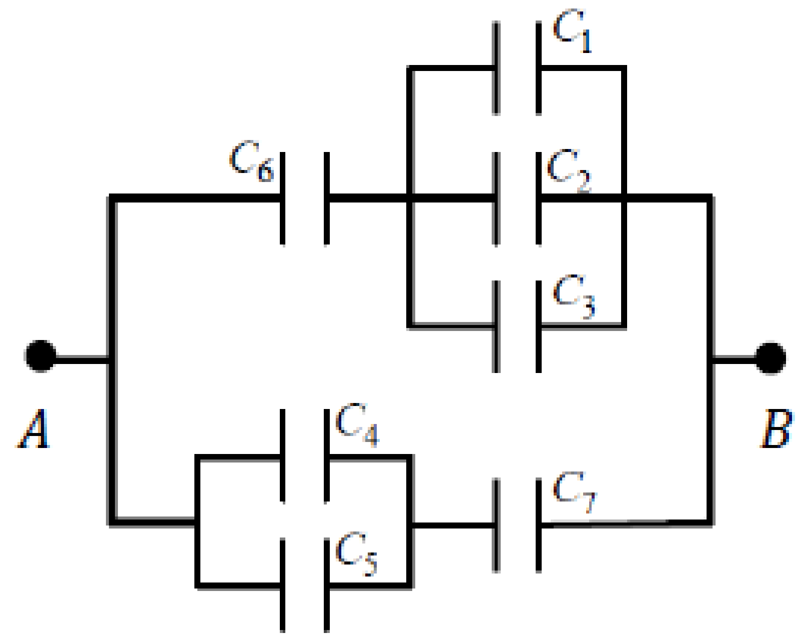
Application

Soit le groupement de condensateurs de la figure 4.

1- Calculer la capacité équivalente entre A et B.

2- Une tension $U_{AB} = 120\,V$ est appliquée entre les points A et B. Calculer les tensions aux bornes de chaque condensateur ainsi que les charges qu'ils portent.

On donne :



$$C_1 = 1\,\mu F \;;\; C_2 = 2\,\mu F \;;\; C_3 = 3\,\mu F \;;\; C_4 = 4\,\mu F \;;\; C_5 = 5\,\mu F$$

$$C_6 = 12\,\mu F \;;\; C_7 = 18\,\mu F$$

1- La capacité équivalente entre A et B :

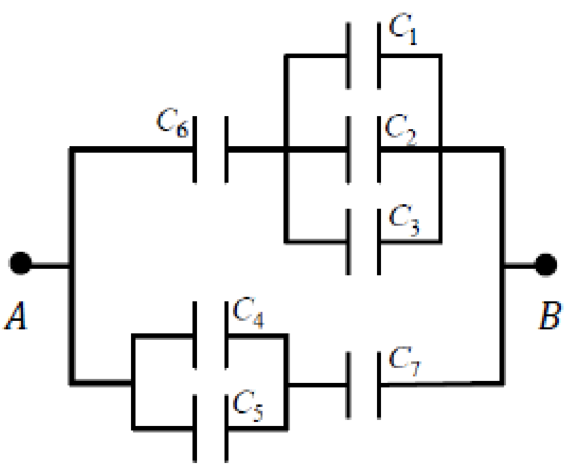
Les condensateurs (C_1, C_2, C_3) sont en parallèle $\Rightarrow$ $C_6' = C_1 + C_2 + C_3 = 6\ \mu F$

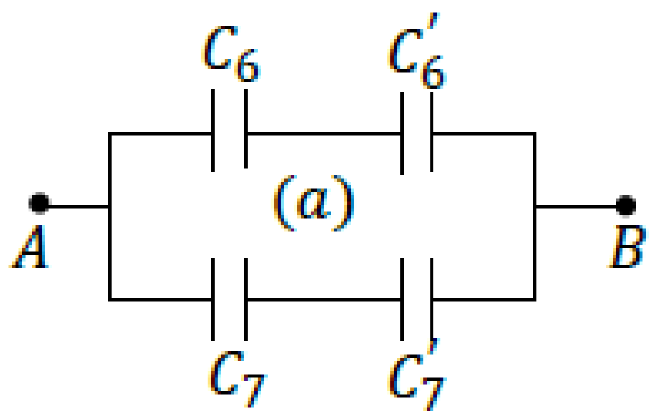
Les condensateurs (C_4, C_5) sont en parallèle $\Rightarrow$ $C_7' = C_4 + C_5 = 9\ \mu F$

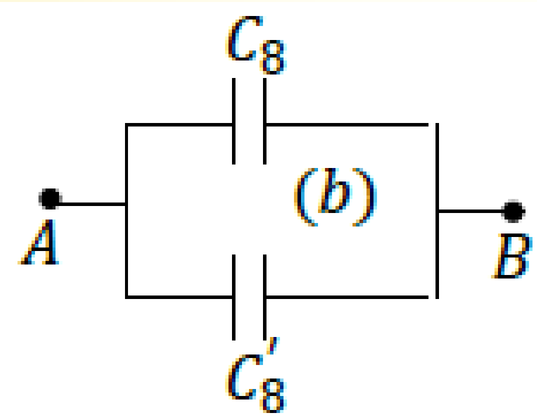
Les condensateurs (C_6, C_6') sont en série $\Rightarrow$ $C_8 = \frac{C_6 C_6'}{C_6 + C_6'} = 4\ \mu F$

Les condensateurs (C_7, C_7') sont en série $\Rightarrow$ $C_8' = \frac{C_7 C_7'}{C_7 + C_7'} = 6\ \mu F$

Les condensateurs (C_8, C_8') sont en parallèle $\Rightarrow$ $C_{eq} = C_{AB} = C_8, C_8' = 10\ \mu F$







2- Les tensions aux bornes de chaque condensateur ainsi que les charges qu'ils portent :

A partir de la figure (a), on a :

$$\begin{cases} Q_6 = Q_6' \Rightarrow 6U_6' = 12U_6 \Rightarrow U_6' = 2U_6 \\ U_6' + U_6 = 120 \end{cases} \Rightarrow U_6 = 40\ V$$

A partir de la figure (b), on a :

$$\begin{cases} Q_7 = Q_7' \Rightarrow 9U_7' = 18U_7 \Rightarrow U_7' = 2U_7 \\ U_7' + U_7 = 120 \end{cases} \Rightarrow U_7 = 40\ V$$

On en déduit que :

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_{AB} - U_6 = 80\ V \quad ; \quad U_4 = U_5 = U_{AB} - U_7 = 80\ V$$

Concernant les charges, on a :

$$Q_1 = C_1U_1 = 80\ \mu C; \quad Q_2 = C_2U_2 = 160\ \mu C; \; Q_3 = C_3U_3 = 240\ \mu C; \; Q_4 = 320\ C_4U_4 = \mu C$$

$$Q_5 = C_5U_5 = 400\ \mu C; \; Q_6 = C_6U_6 = 480\ \mu C; \; Q_7 = C_7U_7 = 720\ \mu C$$

4- Condensateur avec diélectrique

→ On place un isolant solide (mica, papier paraffiné, verre,….) ou liquide (huile minérale) ou de l'air entre les armatures.

➔ La capacité du condensateur est multipliée par un facteur ε_r.

$$\boxed{C = \varepsilon_r C_0}$$

➔ ε_r est la permittivité de l'isolant.

- air sec: $\varepsilon_r = 1{,}00058 \approx 1$ (vide)
- mica: $\varepsilon_r \approx 8$
- verres: $\varepsilon_r \approx 4$ à 7
- paraffine: $\varepsilon_r \approx 2{,}1$

➔ Potentiel disruptif: si la ddp entre les armatures devient trop grande, le diélectrique devient conducteur et une étincelle se produit entre les armatures: le condensateur "claque".

5- Energie d'un condensateur

$\rightarrow$ Condensateur $=$ système de 2 conducteurs en influence.

$$\Rightarrow \qquad E_e = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2$$

$\rightarrow$ En général, on a $\quad -Q_2 = Q_1 = Q$ charge du condensateur

$$\Rightarrow \qquad E_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

avec $\quad Q = Q_1 \quad$ et $\quad V = V_1 - V_2$

➔ Localisation de l'énergie électrostatique:

$$-\Delta E_e = W(\text{forces électrostatiques}) \Rightarrow \vec{F}_{élec} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{E} \neq \vec{0}$$

$\rightarrow$ l'énergie électrostatique est localisée (ou stockée) dans les régions où le champ n'est pas nul.

➔ Dans un condensateur, l'énergie est localisée entre les armatures.