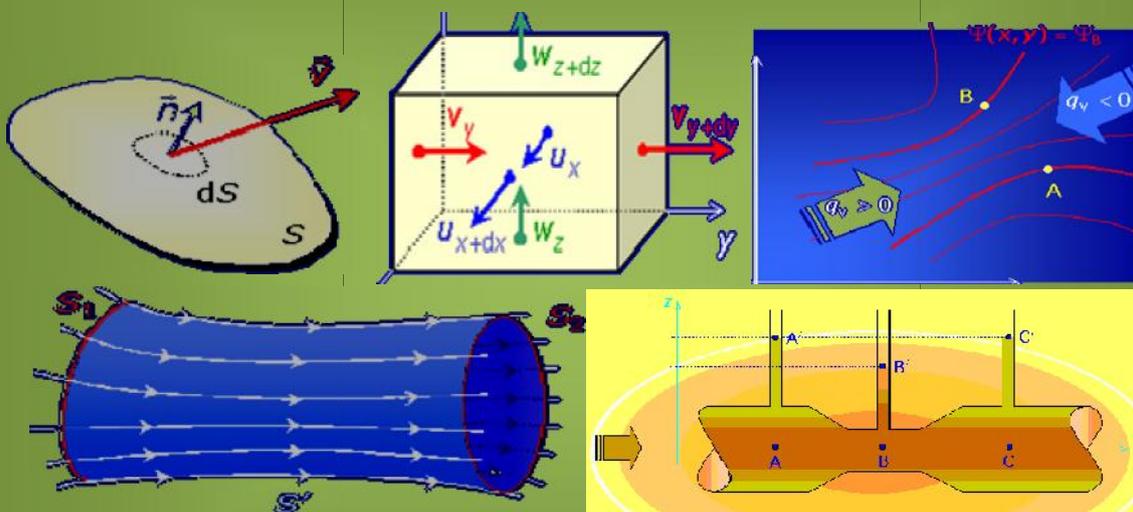


# Cours hydraulique générale



Dr. BOUZEROURA MANSOUR

Université A/ MIRA Bejaïa  
Faculté de Technologie  
Département de Génie Civil

# TABLE DES MATIERES

<b>CHAPITRE 1</b> .....	<b>4</b>
<b>DEFINITIONS ET RAPPELS</b> .....	<b>4</b>
1.1  DEFINITIONS.....	5
1.1.1  Fluide parfait .....	5
1.1.2  Fluide réel .....	5
1.2  CARACTERISTIQUES PHYSIQUES.....	6
1.2.1  Masse et Poids spécifique-Densité .....	6
1.2.1.1  Masse spécifique $\rho = m$ .....	6
1.2.1.2  Poids spécifique $\varpi = m$ .....	6
1.2.1.3  Densité.....	7
1.2.2  Compressibilité.....	7
1.2.3  Viscosité.....	7
1.2.3.1  Viscosité dynamique – Loi de Newton .....	7
1.2.3.2  Viscosité cinématique.....	8
1.2.3.3  Mesure de la viscosité ( <i>Viscosimètre à rotation</i> ).....	9
1.3  DESCRIPTION D'UN FLUIDE EN MOUVEMENT (RAPPELS DE LA CINEMATIQUE).....	10
1.3.1  Description lagrangienne – Description eulérienne.....	10
1.3.1.1  Variable de Lagrange (louis-joseph Lagrange, 1736-1813) .....	10
1.3.1.2  Variable d'Euler (Léonard Euler, 1703-1783).....	11
1.3.2  Ligne de courant.....	12
1.3.3  Trajectoire .....	13
1.3.4  Lignes d'émission.....	14
1.4  DERIVATION PARTICULAIRE.....	14
1.4.1  Signification physique des différents termes.....	15
1.5  DEBITS, FLUX ET DENSITES DE COURANT.....	15
1.5.1  Débit massique à travers une surface – Flux de $\rho$ .....	15
1.5.2  Débit volumique à travers une surface – Flux de $\mathbf{v}$ .....	15
1.6  CONSERVATION DE LA MASSE.....	16
1.6.1  Equation locale de conservation de la masse.....	16
1.7  ÉCOULEMENT IRROTATIONNEL – POTENTIEL DES VITESSES .....	17
1.7.1  Écoulement irrotationnel (non tourbillonnaires) .....	17
1.7.2  Écoulement potentiels .....	17
<b>CHAPITRE 2</b> .....	<b>18</b>
<b>HYDROSTATIQUE</b> .....	<b>18</b>
2.1  INTRODUCTION .....	19
2.2  NOTION DE PRESSION.....	19
2.3  ÉQUATION FONDAMENTALE DE L'HYDROSTATIQUE .....	20
2.3.1  Forces de surface.....	21

2.3.2	Forces de volume .....	21
2.3.3	Bilan .....	21
2.3.4	Application aux fluides incompressibles .....	22
2.3.5	Variation de pressions avec l'altitude .....	23
2.3.5.1	Le liquide est de l'eau.....	24
2.3.5.2	Le liquide est du mercure.....	24
2.4	FORCES HYDROSTATIQUES .....	24
2.5	POUSSEE D'ARCHIMEDE (ARCHIMEDE, 284-212 AV J-C, SYRACUSE) .....	28
2.5.1	Flotter ou couler ? (figure 2.9).....	29
	<b>CHAPITRE 3 .....</b>	<b>30</b>
	<b>HYDRODYNAMIQUE.....</b>	<b>30</b>
3.1	INTRODUCTION .....	31
3.2	L'HYDRODYNAMIQUE DES LIQUIDES PARFAITS.....	31
3.2.1	Equation d'Euler et théorème de Bernoulli (1700 – 1782).....	31
3.2.2	Équation de Bernoulli.....	32
3.2.3	Interprétations de l'équation de Bernoulli .....	33
3.2.3.1	Bilan énergétique.....	33
3.2.3.2	Bilan en pression.....	33
3.2.3.3	Bilan en hauteur .....	34
3.2.4	Application dans le cas des fluides réels.....	34
3.2.5	Applications du théorème de Bernoulli .....	35
3.2.5.1	Cas des liquides parfait .....	35
	<b>CHAPITRE 4 .....</b>	<b>39</b>
	<b>ECOULEMENT EN CHARGE.....</b>	<b>39</b>
4.1	GENERALITES.....	40
4.2	EXPERIENCE DE REYNOLDS .....	40
4.2.1	Ecoulement laminaire et pertes de charges régulières.....	42
4.2.1.1	Ecoulement de poiseuille .....	43
4.2.2	Pertes de charges singulières – théorème de Bélanger .....	48
4.3	QUELQUES SINGULARITES TYPIQUES.....	49
4.4	CALCUL DES RESEAUX DE DISTRIBUTION D'EAU .....	50
4.4.1	Réseaux.....	50
4.4.1.1	Réseau ramifié.....	50
4.4.1.2	Réseau maillé.....	51
4.4.2	Application.....	52
	<b>CHAPITRE 5 .....</b>	<b>54</b>
	<b>ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE ET HYDROLOGIE .....</b>	<b>54</b>
5.1	ECOULEMENTS DANS LES CANAUX OUVERTS .....	55
5.2	INTRODUCTION .....	55
5.3	PROFIL DES VITESSES ET DES VITESSES LIMITES .....	56
5.4	ECOULEMENT UNIFORME ET PERMANENT .....	56
5.4.1	La profondeur normale $h_n$ .....	57
5.5	LES DEVERSOIRS .....	58
5.5.1	Déversoir à paroi mince .....	58
5.5.2	Déversoir à paroi mince avec contraction latérale .....	59
5.5.3	Déversoir à paroi mince triangulaire .....	60
5.5.4	Déversoir à seuil épais .....	61
	<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>62</b>

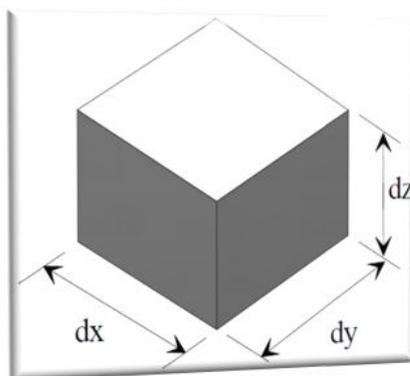
# TABLE DES FIGURES

Figure 1.1 : élément de surface $d$ .....	5
Figure 1.2 : Expérience des deux plaques.....	8
Figure 1.3 : Viscosimètre à rotation.....	9
Figure 3.1a : Déplacement d'une particule fluide du point A au point B.....	10
Figure 3.1b : Exemple de description de Lagrange.....	11
Figure 3.2a : Photo instantanée de l'écoulement.....	11
Figure 3.2b : Exemple de description d'Euler.....	12
Figure 3.3: Ligne de courant .....	13
Figure 3.4: Trajectoire d'une particule fluide .....	13
Figure 3.5: Coïncidence entre lignes de courant et trajectoires.....	13
Figure 3.6: Ligne d'émission.....	14
Figure 2.1 : élément de surface $d$ .....	19
Figure 2.2 : Elément de volume fluide de forme parallélépipédique.....	20
Figure 2.3 : Expression de la pression en fonction de la profondeur.....	23
Figure 2.4 : baromètre différentiel.....	23
Figure 2.5 : cas particulier simple d'une plaque plane totalement immergée .....	25
Figure 2.6 : cas d'une paroi séparant un liquide de l'atmosphère .....	26
Figure 2.7 : paroi d'un récipient contenant une hauteur H de liquide.....	27
Figure 2.8 : Poussée d'Archimède.....	28
Figure 2.9 : Etats d'équilibres.....	29
Figure 3.1 : Elément de volume élémentaire.....	31
Figure 3.2 : schéma de la veine fluide.....	33
Figure 3.3 : Interprétation graphique de l'équation de Bernoulli généralisée.....	34
Figure 3.4 : Phénomène de venturi .....	35
Figure 3.5 : Phénomène de Pitot .....	36
Figure 3.6 : Vidange d'un réservoir .....	37
Figure 3.7 : Détail d'un orifice .....	38
Figure 4.1 : Régimes d'écoulement.....	40
Figure 4.2 : Expérience de Reynolds : dispositif expérimental .....	41

Figure 4.3 : Régime intermédiaire (transitoire) <b>R</b> .....	41
Figure 4.4 : Ecoulement d'un fluide visqueux dans un tube cylindrique.....	43
Figure 4.5 : profile de vitesse parabolique .....	44
Figure 4.6 : Un circuit hydraulique comportant une succession de différents tronçons de conduite .....	46
Figure 4.7 : Diagramme de MOODY.....	47
Figure 4.8 : Conduite horizontale présentant un élargissement brusque.....	48
Figure 4.9 : Réseaux maillé et ramifier .....	50
Figure 5.1 : Ecoulement dans un canal ouvert.....	55
Figure 5.2 : Création de perturbations dans un canal ouvert .....	55
Figure 5.3 : distribution des vitesses dans une section droite d'un canal.....	56
Figure 5.4: distribution des vitesses dans une section droite d'un canal.....	58
Figure 5.5: Déversoir à paroi mince.....	59
Figure 5.6: Vue en plan du déversoir.....	59
Figure 5.7: déversoir à paroi mince triangulaire .....	60
Figure 5.8: déversoir à seuil épais.....	61

# RAPPELS MATHÉMATIQUES

## I- RAPPELS MATHÉMATIQUES



Elément de volume :  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

Dérivée partielle :  $\frac{\partial}{\partial x}$

Dérivée

$$\text{totale : } dP = \frac{\partial P}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot dz$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\text{Gradient d'un scalaire : } \text{grad}(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\text{Gradient d'un vecteur : } \text{grad} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\text{Divergence d'un vecteur : } \text{div} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\text{Rotationnel d'un vecteur : } \text{rot} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

## **II- DIMENSIONS ET UNITES**

Un système d'unités est l'ensemble des unités cohérentes qui expriment un certain nombre de grandeur physique. La valeur d'une grandeur dépend donc du système qu'on a choisi. Les systèmes d'unités utilisés habituellement sont basés sur les grandeurs fondamentales.

Toutes les grandeurs physiques sont exprimées par des dimensions et ces dimensions sont quantifiées par des unités. Actuellement on utilise le système international (SI).

Les unités de base utilisées couramment sont résumées dans le tableau ci-dessous.

**Tableau n°1 : Quantités physiques-dimensions et unités**

Grandeur	Symbole	Dimension	Unité SI
Longueur	L	L	M
Temps	T	T	S
Température	T	$\theta$	°K
Surface	S	$L^2$	$m^2$
Volume	V	$L^3$	$m^3$
Vitesse	U	$L.T^{-1}$	$m.s^{-1}$
Accélération	G	$L.T^{-2}$	$m.s^{-2}$
Force	F	$M.L.T^{-2}$	$Kg. m.s^{-2}=N$
Poids	G	$M.L.T^{-2}$	$Kg. m.s^{-2}=N$
Poids volumique	$\omega$	$M.L^{-2}.T^{-2}$	$N.m^{-3}$
Masse volumique	$\rho$	$M.L^{-3}$	$Kg.m^{-3}$
Débit	Q	$L^3.T^{-1}$	$m^3.s^{-1}$
Pression	P	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$N. m^{-2}=Pa$
Energie	E	$M.L^2.T^{-2}$	$N.m=J$
Travail	W	$M.L^2.T^{-2}$	$N.m=J$
Quantité de mouvement	m.U	$M.L.T^{-1}$	$N.s$
Puissance	Pu	$M.L^2.T^{-3}$	$N.m. s^{-1}=W$
Viscosité dynamique	$\mu$	$M.L^{-1}.T^{-1}$	$Kg. m^{-1} s^{-1}$
Viscosité cinématique	$\nu$	$L^2.T^{-1}$	$M^2 s^{-1}$

# CHAPITRE 1

## DEFINITIONS ET RAPPELS

# CHAPITRE 1

## DEFINITIONS ET RAPPELS

## 1.1 DEFINITIONS

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient. On insiste sur le fait qu'un fluide est supposé être un milieu continu : même si l'on choisit un très petit élément de volume, il sera toujours beaucoup plus grand que la dimension des molécules qui le constitue. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz. Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement par leur viscosité. La viscosité est une de leur caractéristique physico-chimique qui sera définie dans la suite du cours et qui définit le frottement interne des fluides. Les fluides peuvent être classés en deux grandes familles : La famille des "newtoniens" a une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée par les fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent. Ce cours est limité uniquement à des fluides newtoniens qui seront classés comme suit.

### 1.1.1 Fluide parfait

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante:  $d\vec{F}_T$  rest nulle. Autrement dit, la force:  $d\vec{F}$  est normale à l'élément de surface  $dS$  (figure 1.1).

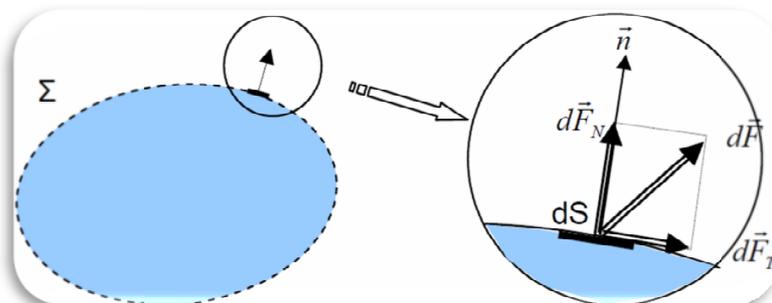


Figure 1.1 : élément de surface  $dS$

### 1.1.2 Fluide réel

Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prise en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide. C'est uniquement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait, et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent.

La statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits.

## 1.2 CARACTERISTIQUES PHYSIQUES

### 1.2.1 Masse et Poids spécifique-Densité

Dans le champ de la pesanteur on peut remarquer que les fluides sont des corps pesants. Pour caractériser un fluide, il est donc indispensable d'abord de déterminer sa masse spécifique et son poids spécifique.

#### 1.2.1.1 Masse spécifique $\rho = \frac{m}{V}$

La masse spécifique d'un corps est le rapport de sa masse et de son volume. La masse volumique de l'eau ordinaire pure ne diffère pratiquement pas de celle de l'eau distillée, et elle est prise pour les calculs hydrauliques égale à  $1000 \text{ kg / m}^3$  à  $4^\circ\text{Celsius}$  ou encore égale à  $1\text{g/cm}^3$ , elle varie en fonction de la température.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

où :

$\rho$  : Masse volumique en ( $\text{kg/m}^3$ ),

$m$  : masse en (kg),

$V$  : volume en ( $\text{m}^3$ ).

#### 1.2.1.2 Poids spécifique $\varpi = \frac{mg}{V}$

Le poids spécifique est la force d'attraction que la terre exerce sur l'unité de volume, c'est le rapport de son poids  $\varpi$  et de son volume  $V$ , et en particulier le poids de l'unité de volume.

$$\varpi = \frac{mg}{V} = \rho g$$

$\varpi$  : Poids volumique en ( $\text{N/m}^3$ ).

$m$  : masse en (kg),

$g$  : accélération de la pesanteur en ( $\text{m/s}^2$ ),

$V$  : volume en ( $\text{m}^3$ ).

### 1.2.1.3 Densité

La densité est le rapport du poids ou de masse d'un corps au poids ou masse d'un égal volume d'eau dans des conditions standard ( $P_a=1 \text{ atm}$ ,  $T= 4^\circ\text{Celsius}$ ). Il résulte de cette définition que la densité est un nombre sans dimensions.

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{réf}}}$$

### 1.2.2 Compressibilité

Pour un liquide, la masse spécifique,  $\rho$  dépend de la température et de la pression. On définit la compressibilité volumique qui est le rapport entre la variation de pression et la

variation relative du volume qu'elle provoque :

$$\beta = - \frac{dV}{V dP}$$

C'est la grandeur inverse du coefficient d'élasticité  $\xi$

### 1.2.3 Viscosité

La viscosité d'un fluide est la mesure de sa résistance à l'écoulement. La viscosité détermine la vitesse de mouvement du fluide (plus le liquide est visqueux, plus le mouvement est lent). La viscosité est une propriété intensive qui permet de distinguer un fluide parfait d'un fluide réel.

#### 1.2.3.1 Viscosité dynamique – Loi de Newton

La viscosité dynamique exprime la proportionnalité entre la force qu'il faut exercer sur une plaque lorsqu'elle est plongée dans un courant et la variation de vitesse des veines de fluide entre les 2 faces de la plaque. Elle est exprimée par un coefficient représentant la contrainte de cisaillement nécessaire pour produire un gradient de vitesse d'écoulement d'une unité dans la matière.

Par exemple, si on considère un fluide visqueux placé entre deux plaques  $P_1$  et  $P_2$ , tel que la plaque  $P_1$  est fixe et la plaque  $P_2$  est animée d'une vitesse  $\vec{V}_2$ . Les deux couches de fluide adjacentes distantes de  $\Delta Z$  (figure 1.2). La force de frottement  $F$  qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit,  $\Delta V$  à leur surface  $S$  et inversement proportionnelle à  $\Delta Z$ :

Le facteur de proportionnalité  $\mu$  est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

$$F = \mu S \frac{\Delta V}{\Delta Z}$$

où :

F : force de glissement entre les couches en (N),

$\mu$  : Viscosité dynamique en (kg/m.s),

S : surface de contact entre deux couches en (m<sup>2</sup>),

$\Delta V$  : Écart de vitesse entre deux couches en (m/s),

$\Delta Z$  : Distance entre deux couches en (m).

Remarque : Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa.s) ou Poiseuille (Pl) : 1 Pa.s = 1 Pl = 1 kg/m.s

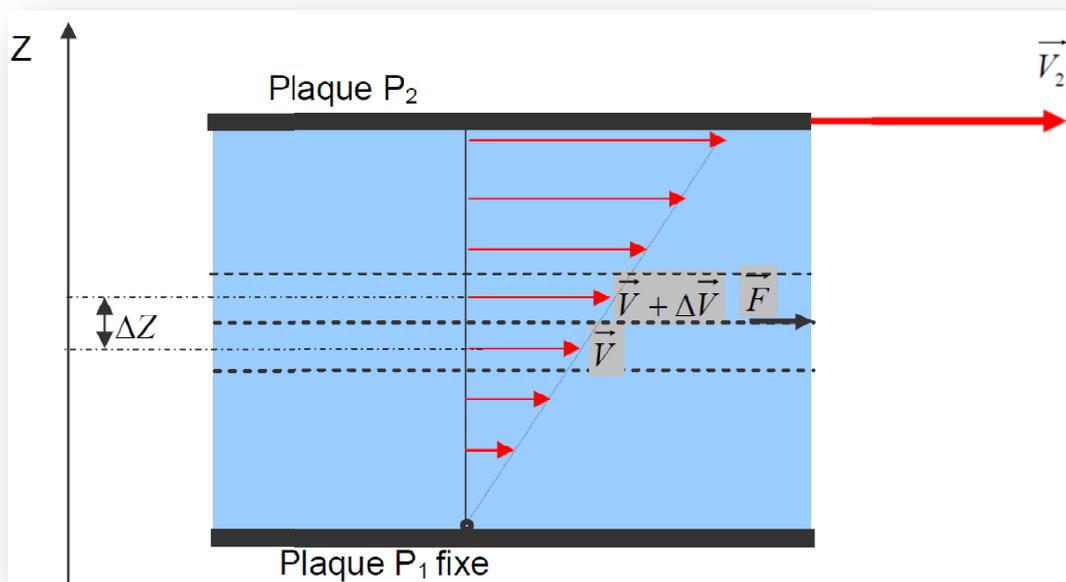


Figure 1.2 : Expérience des deux plaques

### 1.2.3.2 Viscosité cinématique

La viscosité cinématique  $\nu$  est définie comme étant le rapport entre la viscosité

dynamique  $\mu$  et la masse volumique :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité n'a pas de nom particulier : (m<sup>2</sup>/s). Dans le système CGS, l'unité est le Stokes (St) où 1 Stokes = 1 cm<sup>2</sup> /s.

### 1.2.3.3 Mesure de la viscosité (*Viscosimètre à rotation*)

Le viscosimètre à rotation comprend 2 cylindres (figure 1.3). L'un  $C_1$ , fixe, de rayon  $R_1$  et qui est relié à un fil de torsion dont la constante de torsion est  $C$ . L'autre  $C_2$ , contenant le liquide à étudier et qui est entraîné en rotation par le moteur à la fréquence de  $n$  [tr/s]. Ce cylindre possède un rayon  $R_2$ . Nous désignerons par  $h$  la hauteur du cylindre  $C_1$ .

Dans sa rotation, le cylindre  $C_2$  entraîne le fluide à étudier. Celui-ci a une vitesse linéaire entre les points A et B :

- Au point A :  $V_A = 2\pi R_2 n$
  - Au point B :  $V_B = 0$  car après une légère rotation, le cylindre reste, fixe.
- La force due à la viscosité qui s'exerce sur le cylindre  $C_1$  devient :

$$F = \mu S \frac{\Delta V}{\Delta z} = \mu \cdot S \cdot \frac{dV}{dz} = \mu \frac{V_A - V_B}{R_2 - R_1} 2 \pi R_1 h$$

Lorsque l'équilibre du cylindre  $C_1$  est atteint, celui-ci est soumis à un couple de rappel de la part du fil de torsion. Ce couple se traduit par :

$$M_1 = C_1 \cdot \theta \quad \text{Ou } \theta \text{ représente l'angle dont tourne le cylindre } C_1.$$

$$M_2 = F \cdot R_1 \quad \text{Car le cylindre aussi est soumis au moment de la force } F$$

Nous obtenons donc l'égalité suivante

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ C \cdot \theta = F \cdot R_1 \end{cases}$$

$C \cdot \theta = \mu \frac{V_A - V_B}{R_2 - R_1} 2 \pi R_1 h R_1$ , on remplace par l'expression de  $V_A$  dans l'équation on obtient :

$$\mu = \frac{R_2 - R_1}{4n \pi^2 R_2 h R_1^2} C \cdot \theta$$

De cette façon nous pouvons en déduire la viscosité dynamique d'un fluide.

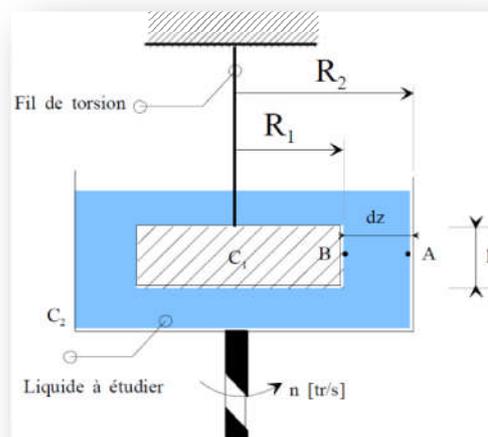


Figure 1.3 : Viscosimètre à rotation

## 1.3 Description d'un fluide en mouvement (rappels de la cinématique)

La cinématique est la description analytique d'un système en mouvement. Dans ce chapitre, nous allons donc nous intéresser aux mouvements des fluides par rapport au temps, indépendamment des causes qui les provoquent, c'est-à-dire sans prendre en compte les forces qui sont à leur source.

Un milieu fluide étant en mouvement, comment l'observer, comment le décrire ? On introduit pour commencer la notion de « particule fluide » (ou plus généralement, pour un milieu continu quelconque, de « particule milieu continu »). C'est un tout petit volume de matière que l'on a « marqué » et que « l'on suit dans son mouvement ». A cette particule fluide, on attache des grandeurs cinématiques (position, vitesse, accélération) et des grandeurs thermodynamiques (masse volumique, pression, . . .).

### 1.3.1 Description lagrangienne – Description eulérienne

Deux points de vue sont possibles pour décrire l'écoulement d'un fluide. Si l'on regarde couler une rivière :

- un observateur peut suivre des yeux une feuille à la surface de l'eau (point de vue lagrangien) ;
- un observateur peut aussi regarder fixement une zone de la rivière et voir passer la feuille quand elle traverse son champ de vue (point de vue eulérien)

#### 1.3.1.1 Variable de Lagrange (louis-joseph Lagrange, 1736-1813)

Soient A la position d'une particule de fluide à l'instant  $t_0$  dans le repère  $0, x, y, z$ . (figure 3.1a).

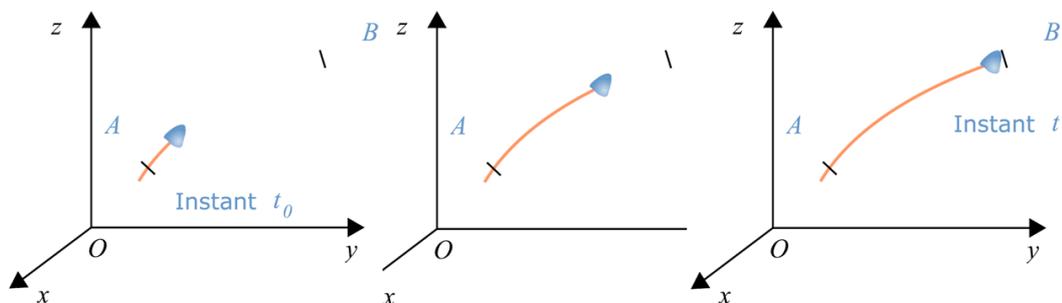


Figure 3.1a : Déplacement d'une particule fluide du point A au point B.

On considère le mouvement de la particule fluide qui est à l'instant ( $t_0$ ) se trouvait en A de coordonnées  $(a_1, a_2, a_3)$  et  $t > t_0$  cette particule se trouve en B de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  le mouvement de la particule fluide est défini par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x_1 = f_1(a_1, a_2, a_3, t, t_0) \\ x_2 = f_2(a_1, a_2, a_3, t, t_0) \\ x_3 = f_3(a_1, a_2, a_3, t, t_0) \end{cases}$$

Les variables de Lagrange sont le temps  $t$  et les coordonnées  $(a_1, a_2, a_3)$  et les fonctions à déterminer sont :  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Dans cette description du mouvement du fluide, on suit individuellement chaque particule dans son mouvement (figure 3.1b).

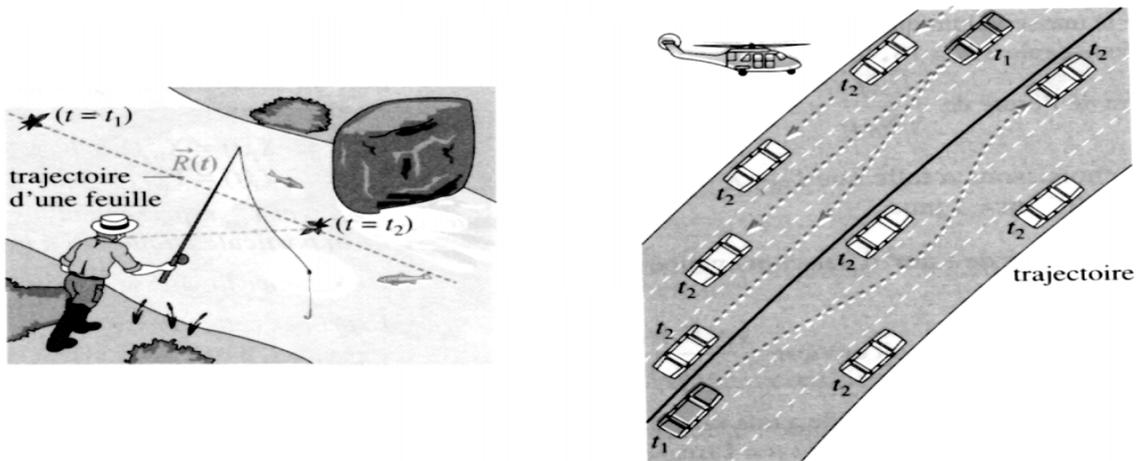


Figure 3.1b : Exemple de description de Lagrange.

### 1.3.1.2 Variable d'Euler (Léonard Euler, 1703-1783)

Pour étudier le mouvement du fluide, il est souvent plus commode d'utiliser les variables d'Euler. Elles permettent, par exemple, de définir à chaque instant  $t$  et en chaque point de l'espace la vitesse et l'accélération des particules fluide (figure 3.2a).

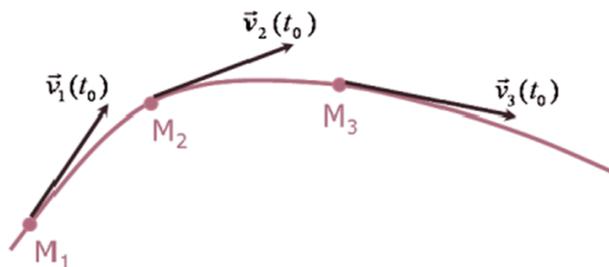


Figure 3.2a : Photo instantanée de l'écoulement

Les variables d'Euler sont le temps  $t$  et les coordonnées  $x_i$  de la particule fluide à l'instant  $t$ , les fonctions à déterminer sont les vitesses  $U_i$  :

$$\begin{cases} U_1 = g_1(a_1, a_2, a_3, t) \\ U_2 = g_2(a_1, a_2, a_3, t) \\ U_3 = g_3(a_1, a_2, a_3, t) \end{cases}$$

La description d'Euler consiste à donner à un instant  $t$  défini, un champ de vecteur  $U(M, t)$  représentant le vecteur vitesse des particules d'un domaine fluide appelé champs d'écoulement.

Le point de vue d'Euler est plus commode pour l'expérimentateur, car on se place en un point  $M$  du fluide et on étudie les variations des grandeurs physiques (par exemple la vitesse) à des instants différents (figure 3.2b). Le point de vue d'Euler est plus commode en cinématique car :

- 1) pour les écoulements permanents, la projection des vitesses dans le repère ne dépendent pas du temps.
- 2) les vecteurs vitesses de l'écoulement forment un champ de vecteurs auquel on peut appliquer les propriétés des champs de vecteurs

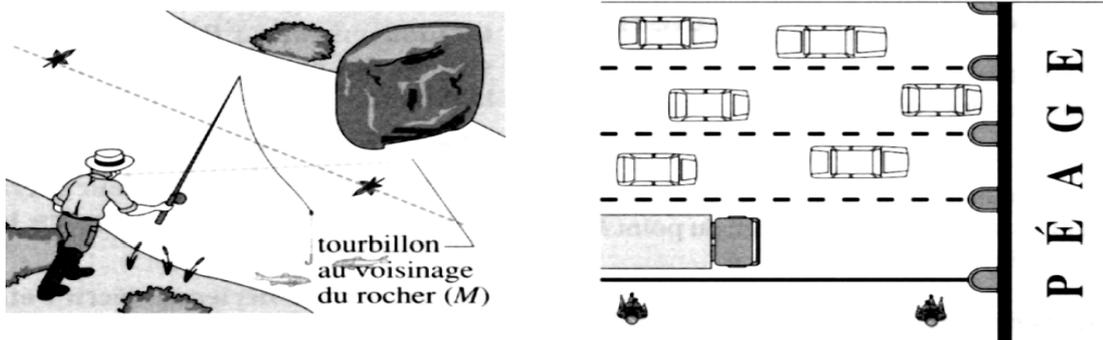


Figure 3.2b : Exemple de description d'Euler.

### 1.3.2 Ligne de courant

On appelle ligne de courant, toute courbe dont la tangente en chacun des ses points est, à chaque instant et localement, colinéaire au vecteur vitesse du champ d'écoulement. C'est une courbe qui dérive de la description eulérienne (figure 3.3). Les lignes de courant évoluent dans le temps au même titre que le champ des vecteurs vitesses.

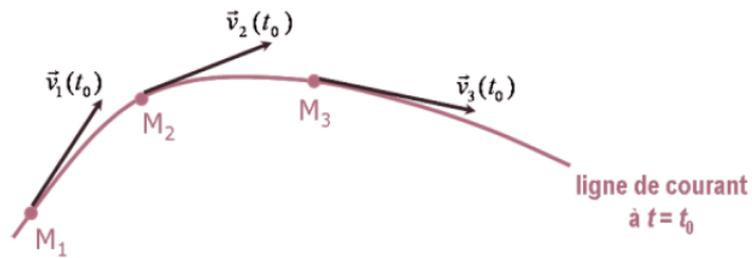


Figure 3.3: Ligne de courant

### 1.3.3 Trajectoire

On appelle trajectoire d'une particule fluide la courbe décrite au cours du temps par la particule. C'est donc le lieu géométrique des positions successives occupées par une particule dans le temps. Les trajectoires découlent de la description lagrangienne (figure 3.4).

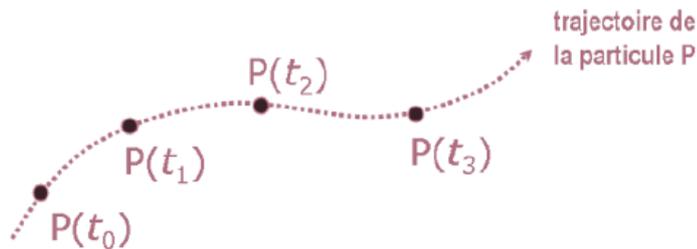


Figure 3.4: Trajectoire d'une particule fluide

**Attention :**

*Il ne faut pas confondre entre ligne de courant et trajectoire. Ce sont deux notions bien différentes.*

**Remarque :**

*Si l'écoulement est stationnaire, le champ de vecteurs vitesse est constant dans le temps : il ya coïncidence entre lignes de courant et trajectoires.*

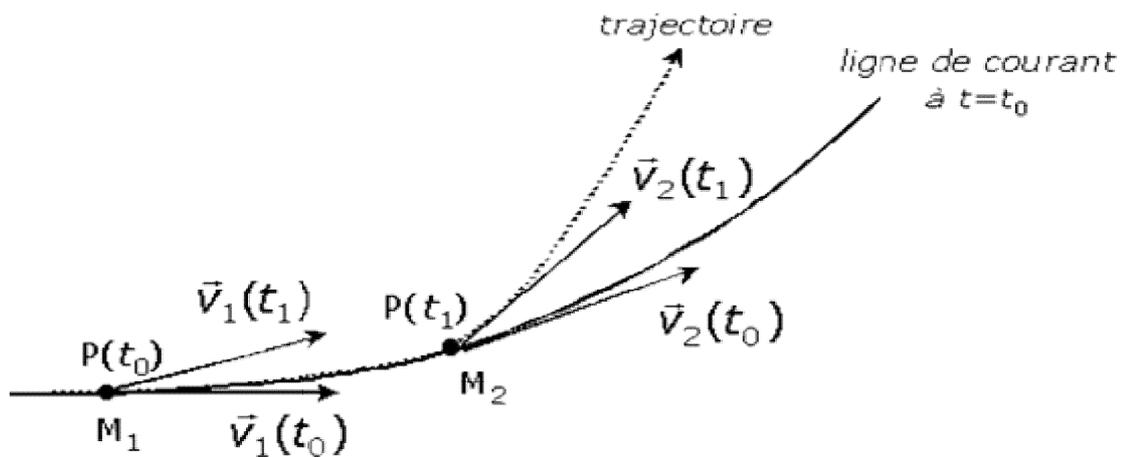


Figure 3.5: Coïncidence entre lignes de courant et trajectoires.

### 1.3.4 Lignes d'émission

Une ligne d'émission relative à un point E, est l'ensemble des positions à l'instant  $t$  des particules qui sont passées par le point E (figure 3.6).

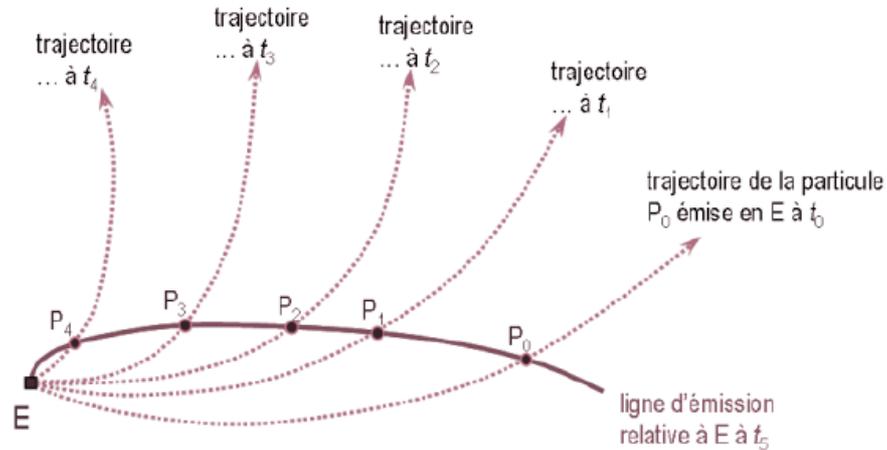


Figure 3.6: Ligne d'émission.

## 1.4 Dérivation particulaire

L'utilisation des variables d'Euler pose un problème de dérivation. En effet considérons une grandeur  $h$  (pression, masse volumique, vitesse...) que l'on suppose attachée à un point matériel M et dont on veut étudier la variation par rapport au temps. Si on décrit  $h(x_1, x_2, x_3, t)$  en variables d'Euler, il ne suffit plus de faire une dérivée partielle par rapport à  $t$  puisque les  $x_i$  dépendent de  $t$ , on introduit alors la dérivée particulaire qui tient compte de la variation temporelle des  $x_i$ :

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t}$$

$$\frac{Dh}{Dt} + \frac{\partial h}{\partial t} + \overrightarrow{grad}h \cdot \vec{U} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \overrightarrow{grad} \right] h.$$

Cette dérivée particulaire se décompose en :

$\frac{\partial}{\partial t}$  : la dérivée locale qui indique un caractère non permanent de  $h$  ;

$\vec{U} \cdot \overrightarrow{grad}$  : la dérivée convective qui indique un caractère non uniforme de  $h$

Nous pourrions écrire ainsi la dérivation de l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$$

## CHAPITRE 2

# HYDROSTATIQUE

## 2.1 Introduction

Les problèmes qui peuvent être résolus au moyen des équations de l'**hydrostatique** concernent toutes les situations dans lesquelles le fluide est soit au repos soit uniformément accéléré. Dans ces deux cas, il n'y a pas de mouvement relatif entre les particules fluides et par conséquent il n'existe pas de force de frottement : les forces qui agissent sur les surfaces délimitant les particules fluides sont uniquement des forces de pression et s'exercent perpendiculairement à ces surfaces, ce qui constitue globalement le cadre de ce chapitre.

Après avoir introduit la notion de pression, nous établirons l'équation fondamentale de l'**hydrostatique** et l'appliquerons aux cas de fluides incompressibles ou compressibles. Nous utiliserons ensuite ces résultats pour caractériser la résultante des forces de pression s'exerçant sur l'ensemble d'une surface immergée, et par extension définir la poussée d'**Archimède**.

## 2.2 Notion de pression

Lorsqu'un fluide est au repos (ou uniformément accéléré), la pression désigne la force  $d\vec{F}$  par unité de surface qui s'exerce perpendiculairement à un élément de surface  $dS$  de normale  $\vec{n}$ . On a ainsi (voir figure 2.1) :  $d\vec{F} = p\vec{n} dS$

Où la pression  $p$  est une grandeur scalaire ne dépendant que des coordonnées du point M auquel la force est évaluée. Par conséquent, la pression est indépendante de l'orientation de la surface sur laquelle elle agit.

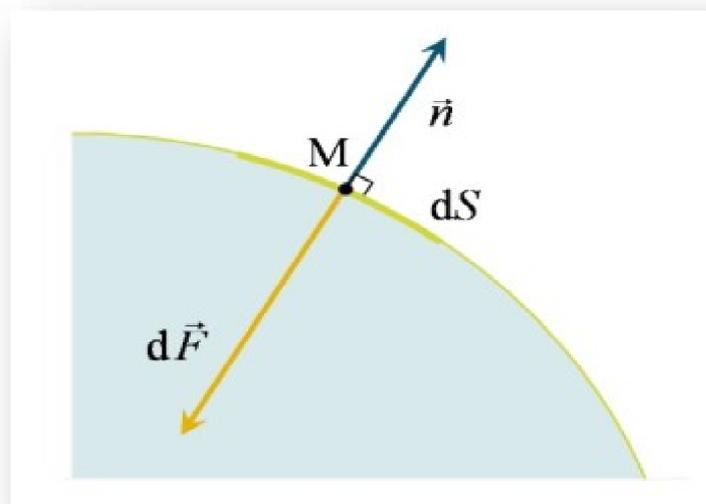


Figure 2.1 : élément de surface  $dS$

**Remarque**

Il est à noter que considérer un fluide comme parfait est équivalent à poser que les forces de surface sont toujours uniquement des forces de pression : elles sont normales aux surfaces sur lesquelles elles s'exercent.

**Complément**

Un fluide parfait est un fluide qui, même en mouvement, ne présente pas de forces de surface tangentielles (contraintes de cisaillement dues à la viscosité). Il en résulte qu'un fluide parfait est un fluide dont la viscosité est supposée nulle. Pour un fluide réel ces conditions ne sont vérifiées que s'il est au repos ou uniformément accéléré.

En unités S.I., la pression s'exprime en pascal (Pa) et est homogène à des  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ . On trouve également : le bar ( $1\text{bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ), l'atmosphère ( $1\text{atm} = 1,013\cdot 10^5 \text{ Pa}$ ), le mmHg ou le torr ( $1 \text{ Torr} = 1 \text{ mmHg} = 133,3 \text{ Pa}$ ).

**2.3 Équation fondamentale de l'hydrostatique**

Considérons, comme le montre le schéma de la figure 2.2, un élément de volume fluide de forme parallélépipédique et de volume  $dV = dx dy dz$ .

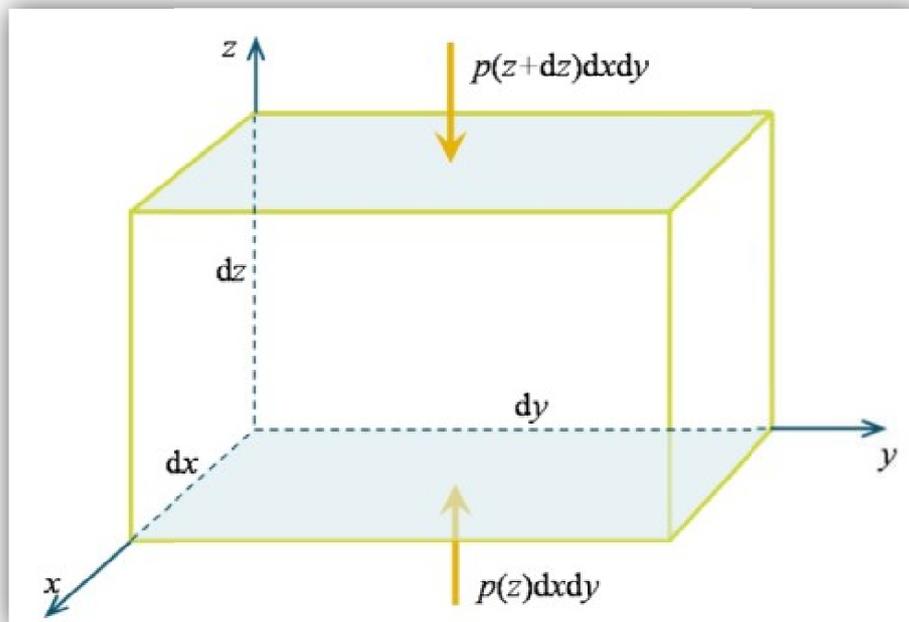


Figure 2.2 : Élément de volume fluide de forme parallélépipédique

Faisons le bilan des forces agissant sur cet élément de volume. On peut distinguer deux types de force : les forces de surface et les forces de volume. Les premières sont des forces de pression puisqu'on ne considère que les situations dans lesquelles le fluide est au repos ou uniformément accéléré. Les deuxièmes se résument à la seule force de pesanteur, c'est-à-dire le poids de .

### 2.3.1 Forces de surface

Si l'on note  $dF_z$  la composante suivant  $z$  de la force de pression, celle-ci peut s'écrire :

$$dF_z = p(z)dx dy - p(z + dz)dx dy$$

où  $p(z)$  et  $p(z + dz)$  sont respectivement les pressions agissant sur la face inférieure et la face supérieure du parallélépipède. Puisque  $(dz)$  est petit, on peut effectuer un développement de  $p(z + dz)$  au premier ordre :

$$p(z + dz) = p(z) + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_z dz$$

Par conséquent, il vient :

$$dF_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_z dx dy dz = dF_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_z dV$$

Par analogie, suivant les autres directions, on trouve :

$$dF_x = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_x dV \text{ et } dF_y = -\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_y dV$$

La résultante  $d\vec{F}$  s'écrit donc :

$$d\vec{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z\right) dV = -\vec{\nabla}_p dV$$

### 2.3.2 Forces de volume

Il s'agit simplement du poids de l'élément de volume  $dV$ . On a donc :

$$d\vec{P} + \rho m \vec{g} = \rho dV \vec{g}$$

où  $\vec{g}$  est l'accélération de la pesanteur et  $\rho$  la masse volumique du fluide.

### 2.3.3 Bilan

D'après le **Principe Fondamental de la Dynamique** (PFD), on sait que la résultante des forces s'exerçant sur un corps est égale au produit de sa masse  $dm$  par

l'accélération  $\vec{a}(x, y, z)$  qu'il subit. Ici, soit le fluide est au repos, auquel cas  $\vec{a} = \vec{0}$ , soit il est uniformément accéléré ce qui permet d'écrire.  $\vec{a}(x, y, z) = \vec{a} \forall (x, y, z)$

On a donc :  $d\vec{F} + d\vec{P} = dm\vec{a}$ , soit encore :  $-\vec{\nabla}_p dV + \rho dV \vec{g} = \rho dV \vec{a}$

En simplifiant par  $dV$ , on obtient une **équation locale**, indépendante de l'élément de volume choisi et donc valable en tout point du fluide :  $-\vec{\nabla}_p + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}$

et qui, pour un fluide au repos, se simplifie pour donner **l'équation fondamentale de l'hydrostatique** :  $\vec{\nabla}_p = \rho \vec{g}$

Considérons alors que le champ de pesanteur est tel que  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ . Par projection sur les trois axes du référentiel cartésien, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ et } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Par conséquent,  $p(x, y, z) = p(z)$  et l'équation fondamentale de l'hydrostatique se résume à :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

### 2.3.4 Application aux fluides incompressibles

Lorsqu'un fluide peut être considéré comme incompressible, il en résulte que sa masse volumique est une constante :  $\rho(x, y, z) = \rho \forall (x, y, z)$ . Si, en outre, les variations de l'accélération de la pesanteur sont négligeables,  $\mathbf{g}$  sera considérée constante  $\forall (x, y, z)$ .

Dans ces conditions seulement, et si,  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$  l'équation fondamentale de la statique des fluides montre que la pression varie linéairement avec  $(z)$  :

$$P(z) = -\rho g z + C^{te} \quad P(z) = \int \frac{dp}{dz} dz + C^{te} = -\int \rho g dz + C^{te} = -\rho g \int dz + C^{te}$$

$$\text{D'où :} \quad P(z) = -\rho g z + C^{te}$$

Si pour un niveau de référence ( $z_0$ ) la pression vaut ( $P_0$ ), alors la pression pour un niveau  $z$  quelconque s'exprime comme :  $P(z) = P_0 + \rho g(z_0 - z)$

On peut également exprimer cette même pression en fonction de la profondeur  $h = (z_0 - z)$  (voir figure 2.3) :

$$P(h) = P_0 + \rho g h$$

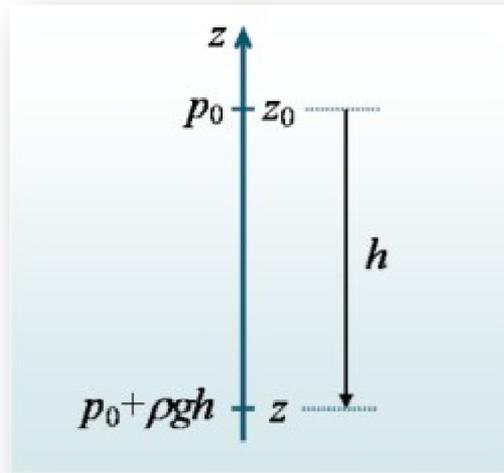


Figure 2.3 : Expression de la pression en fonction de la profondeur

Dans les applications qui vont découler de la relation précédente ; on va utiliser les conditions suivantes :

- La pression atmosphérique est uniforme au niveau du sol  $P = P_0 = 1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bar}$ .
- La « surface libre » est par définition la surface de contact de l'atmosphère avec le fluide étudié, souvent de l'eau.
- En tout point M de cette surface libre, on aura égalité de la pression dans le fluide  $P(M)$  et de la pression atmosphérique limites  $P_0$  par continuité de la pression. On parle de **conditions aux limites**.

### 2.3.5 Variation de pressions avec l'altitude

On considère le schéma de principe (figure 2.4) d'un baromètre différentiel.

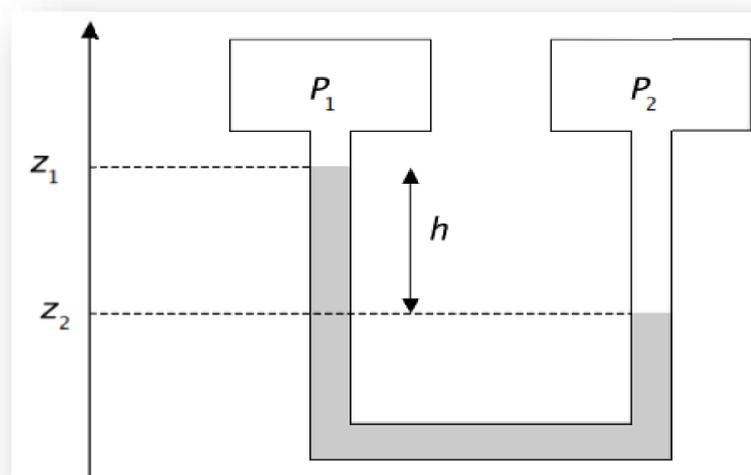


Figure 2.4 : baromètre différentiel

On utilise toujours la relation  $P + \rho g z = \text{constante}$  ce qui donne :

$$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 .$$

$$\text{Que l'on peut réécrire } \Delta P = P_2 - P_1 = \rho g (z_2 - z_1) = \rho g h .$$

La mesure de la dénivellation permet d'accéder à la différence des pressions, c'est le principe du baromètre. Si l'on souhaite mesurer la pression atmosphérique, il suffit de laisser l'un des deux compartiments ouvert sur l'atmosphère. Effectuons des applications numériques pour regarder les ordres de grandeur :

### 2.3.5.1 Le liquide est de l'eau

$\rho_{eau} (25^{\circ}C) \approx 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $g = 9.8 \text{ m.s}^{-1}$ . Si l'on souhaite mesurer au maximum des différences de pression  $\Delta P = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$  il faut un dénivelé en eau de  $(z_2 - z_1) = h = 10.2 \text{ m}$ . Un baromètre à eau est encombrant.

### 2.3.5.2 Le liquide est du mercure

$\rho_{Hg} (25^{\circ}C) \approx 1.36 \times 10^4 \text{ kg.m}^{-3} \gg \rho_{eau}$ ,  $g = 9.8 \text{ m.s}^{-1}$ . Si l'on souhaite mesurer au maximum des différences de pression  $\Delta P = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ , il faut un dénivelé en mercure de  $(z_2 - z_1) = h = 760 \text{ mm}$  de Hg. C'est de là que vient l'unité de mesure le mm de Hg pour les pressions. Le mercure étant plus dense, il est plus efficace pour réaliser un baromètre. Il présente cependant des dangers inhérents à l'absorption accidentelle des métaux lourds.

## 2.4 Forces hydrostatiques

Puisque l'équation fondamentale de la statique des fluides permet d'évaluer la pression en tout point d'un fluide, il est possible de calculer les forces s'exerçant sur les parois d'un solide totalement ou partiellement immergé. On sait que la force de pression agissant sur un élément de surface  $dS$  s'exprime  $d\vec{F} = -p\vec{n} dS$ . Sur une surface immergée, la force hydrostatique totale s'obtient en calculant :  $\vec{F} = \int_S -p\vec{n} dS$

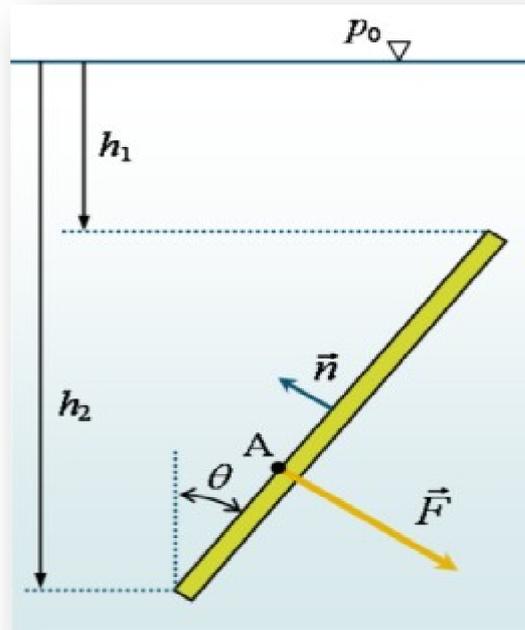


Figure 2.5 : cas particulier simple d'une plaque plane totalement immergée

Si l'on considère le cas particulier simple d'une plaque plane totalement immergée (voir figure 2.5), la force hydrostatique s'exerçant sur la face supérieure est portée par la normale  $\vec{n}$  à cette surface :

$$\vec{F} = -\vec{n} \int_{h_1}^{h_2} p(h) \frac{dh}{\cos \theta} \Delta L$$

où  $\Delta L$  est la largeur de la plaque (suivant la perpendiculaire au plan du schéma), et  $(\theta)$  est l'angle d'inclinaison de la plaque par rapport à la verticale. Si  $h$  est la profondeur à partir d'un niveau de référence (surface libre) où la pression est la pression atmosphérique  $P_0$ , pour une unité de largeur  $\Delta L = 1$ , on obtient l'équation suivante :

$$\vec{F} = -\frac{\vec{n}}{\cos \theta} \int_{h_1}^{h_2} (P_0 + \rho g h) dh$$

soit encore :

$$\vec{F} = -\frac{\vec{n}}{\cos \theta} \left[ P_0 (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \rho g (h_2^2 - h_1^2) \right] = -\frac{(h_2 - h_1)}{\cos \theta} \left[ P_0 + \frac{1}{2} \rho g (h_2 + h_1) \right] \vec{n}$$

On remarque alors que  $\frac{(h_2 - h_1)}{\cos \theta} = S$  et que  $\frac{(h_2 + h_1)}{2} = h_G$ , où  $h_G$  correspond à la profondeur du barycentre de la surface  $S$ . Par conséquent, il vient :

$$\vec{F} = -(P_0 + \rho g h_G) S \vec{n}$$

Ce résultat peut être généralisé à n'importe quelle surface immergée, quelle que soit sa forme : pour évaluer  $\vec{F}$  il suffit donc de connaître sa surface  $S$  et la profondeur de son barycentre  $h_G$ .

#### Remarque

Dans le cas d'une paroi séparant un liquide de l'atmosphère (figure 2.6), la résultante des forces de pression s'affranchit du terme dû à la pression atmosphérique : en effet, la pression  $P_0$  exerce une force  $\vec{F}_{atm} = P_0 S \vec{n}$  qui s'oppose à la force due au liquide  $\vec{F}_{liq} = -(P_0 + \rho g h_G) S \vec{n}$ . Par conséquent, la force résultante s'exerçant sur la paroi se résume à  $\vec{F} = -\rho g h_G S \vec{n}$ .

#### Complément

Une justification logique et moins formelle consiste à voir que la pression atmosphérique s'exerce de part et d'autre de la paroi (elle agit notamment du côté immergé par l'intermédiaire de la surface libre).

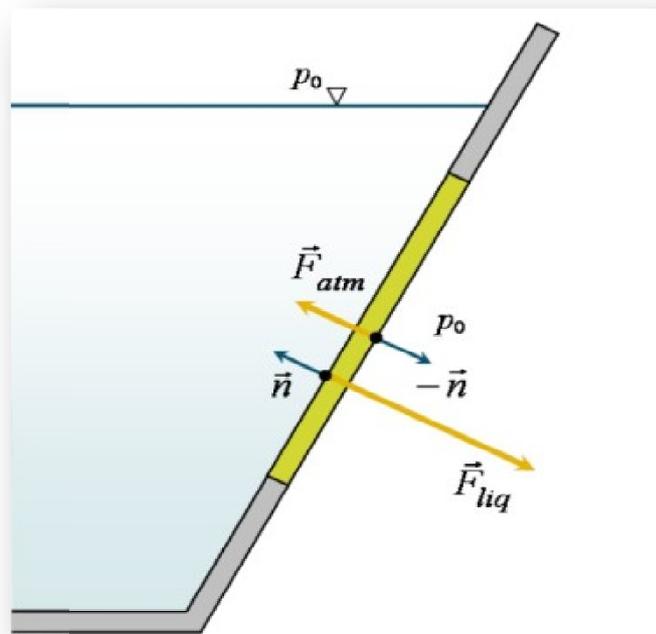


Figure 2.6 : cas d'une paroi séparant un liquide de l'atmosphère

Dans la plupart des problèmes, il est également nécessaire de connaître le *point d'application* A de la force hydrostatique. Il se détermine par le calcul du moment de la force  $\vec{F}$  par rapport à un point O quelconque :

$$\vec{OA} \wedge \vec{F} = \int_S \vec{OM} \wedge d\vec{F}$$

où M est un point qui balaye toute la surface  $S$ . Cette égalité vectorielle permet alors d'obtenir  $\vec{OA}$ , et donc la position du point d'application A.

#### Exemple

A titre d'illustration, on peut calculer le point d'application A de la force hydrostatique  $\vec{F}$  s'exerçant sur la paroi de surface  $S = H \times (\Delta L = 1)$  d'un récipient contenant une hauteur  $H$  de liquide (figure 2.7).

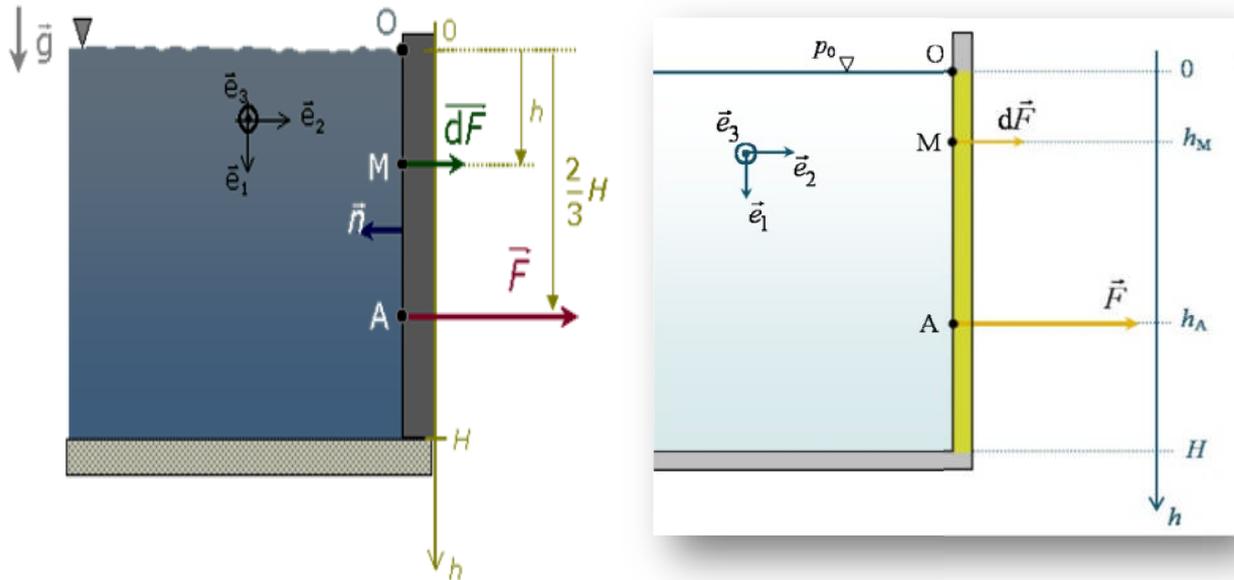


Figure 2.7 : paroi d'un récipient contenant une hauteur H de liquide

Compte tenu du fait que la pression atmosphérique agit de part et d'autre de la paroi, on pourra s'affranchir de son écriture dans la formulation du problème. Ainsi, on sait que  $\vec{F} = \rho g h_G S \vec{e}_2 = \rho g \left(\frac{H}{2}\right) H \vec{e}_2$  et en choisissant arbitrairement un point O situé sur la paroi à l'interface atmosphère-liquide, on pose :

$$\vec{OA} \wedge \vec{F} = \int_S \vec{OM} \wedge d\vec{F} \Rightarrow OA \cdot F (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = \int_{h=0}^{h=H} h \cdot p(h) dh (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)$$

où  $p(h) = \rho g h$  et  $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = (\vec{e}_3)$ , ce qui conduit à :  $OA \cdot F = \int_{h=0}^{h=H} \rho g h^2 dh = \frac{\rho g H^3}{3}$

On exprime alors la distance OA (profondeur  $h_A$  du point d'application) comme :

$$OA = \frac{\frac{\rho g H^3}{3}}{\frac{\rho g H^2}{2}} = \frac{2}{3} H$$

On pourra par ailleurs généraliser ce résultat en vérifiant qu'il est indépendant de l'inclinaison de la paroi.

**Attention**

Bien que le point O puisse être choisi de manière totalement arbitraire, il est logique de le choisir de sorte que les calculs soient les plus simples possible ; généralement, il convient par exemple de choisir O appartenant à la surface d'intégration, sur l'une de ses extrémités (comme dans l'exemple traité précédemment).

## 2.5 Poussée d'Archimède (Archimède, 284-212 av J-C, Syracuse)

Vous avez tous observé qu'une petite pièce de monnaie jetée dans une piscine coule alors que d'immenses paquebots flottent à la surface des mers. Ceci s'explique en considérant la poussée d'Archimède.

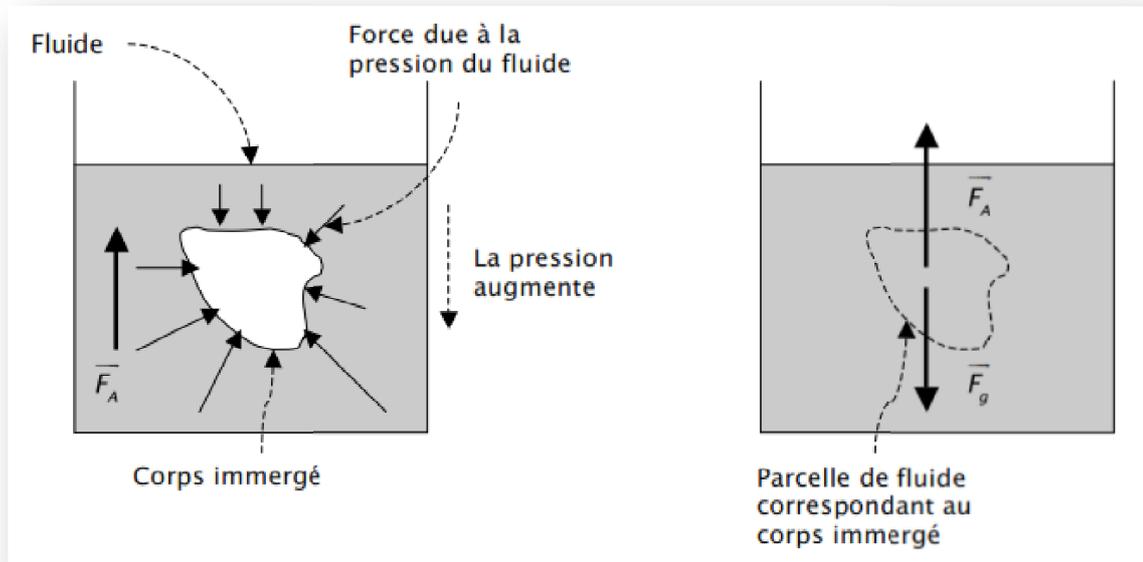


Figure 2.8 : Poussée d'Archimède

On considère un corps immergé dans l'eau. Il subit au niveau de sa surface les forces de pression exercées par le fluide qui l'entoure (figure 2.8). Comme la pression augmente avec la profondeur, le corps est soumis globalement à une force qui est dirigée vers le haut et qui peut compenser la force de gravité (le poids) dirigée vers le bas. Cette force notée  $\vec{F}_A$  est la poussée d'Archimède.

Pour déterminer la norme de  $\vec{F}_A$ , il faut noter que les forces de pressions qui s'exercent sur le corps  $V$ , ne dépendent que de sa forme géométrique extérieure et non pas de sa composition interne (répartition de masse, présence de cavités etc...). On isole alors par la pensée la parcelle de fluide qui a la même géométrie que le corps immergé. Cette parcelle étant en équilibre, son poids  $\vec{F}_g = \rho_{\text{fluide}} V \vec{g}$ , est compensé par la résultante des forces de pression  $\vec{F}_A$ . Ainsi on obtient :  $\vec{F}_g = -\rho_{\text{fluide}} V \vec{g}$

On retiendra le résultat suivant connu comme le théorème d'Archimède :

*Les forces pressantes exercées par un fluide quelconque au repos sur un corps immergé en son sein ont une résultante, appelée poussée d'Archimède, opposée au poids du « fluide déplacé ». La poussée est appliquée au centre de masse du fluide déplacé appelé centre de poussée.*

Il faut bien noter qu'en général, le point d'application de la poussée d'Archimède correspond au centre de masse du fluide déplacé qui est différent du centre de masse du corps immergé, où s'applique son poids.

### 2.5.1 Flotter ou couler ? (figure 2.9)

- 1)  $F_A = \rho_{\text{fluide}} V g > F_g = \rho_{\text{corps}} V \vec{g}$  soit  $\rho_{\text{fluide}} > \rho_{\text{corps}}$  le corps flotte
- 2)  $F_A = \rho_{\text{fluide}} V g < F_g = \rho_{\text{corps}} V \vec{g}$  soit  $\rho_{\text{fluide}} < \rho_{\text{corps}}$  le corps coule
- 3)  $F_A = \rho_{\text{fluide}} V g = F_g = \rho_{\text{corps}} V \vec{g}$  soit  $\rho_{\text{fluide}} = \rho_{\text{corps}}$  équilibre

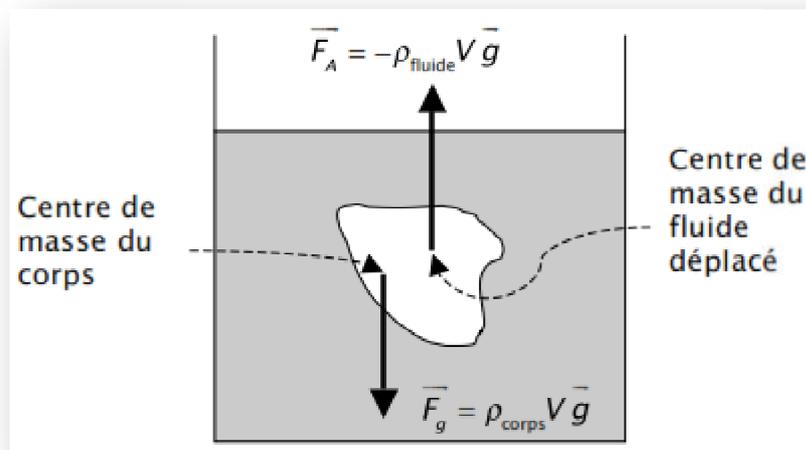


Figure 2.9 : Etats d'équilibres

# CHAPITRE 3

# HYDRODYNAMIQUE

### 3.1 Introduction

L'hydrodynamique étudie le mouvement des liquides en tenant compte des forces qui lui donnent naissance. Elle consiste à étudier le mouvement des particules fluides soumises à un système de forces. Les forces de compressibilité sont négligées. Si les forces dues à la viscosité ne se manifestent pas, il n'y a donc pas de mouvement relatif entre les particules du liquide, on parle de l'hydrodynamique des liquides parfaits en mouvement. La présence de la viscosité induit une perte de charge qui est une transformation irréversible de l'énergie mécanique en énergie thermique, on parle alors de l'hydrodynamique des liquides réels et incompressibles. L'hydrodynamique se divise généralement en deux parties: *l'hydrodynamique des liquides parfaits* et celle *des liquides réels*. L'hydrostatique est un cas particulier de l'hydrodynamique.

### 3.2 L'hydrodynamique des liquides parfaits

#### 3.2.1 Equation d'Euler et théorème de Bernoulli (1700 - 1782)

D'après la relation fondamentale de la dynamique vue en hydrostatique, nous avons la relation:  $d\vec{F} + d\vec{P} = dm\vec{a}$ . Appliquons cette relation à un élément  $d\mathbf{v}(dx, dy, dz)$  (figure 3.1). Une démonstration similaire, dans le chapitre précédent nous avait permis d'arriver au résultat suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} dx = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} dy = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} dz = -\rho \cdot g \cdot z \end{cases}$$

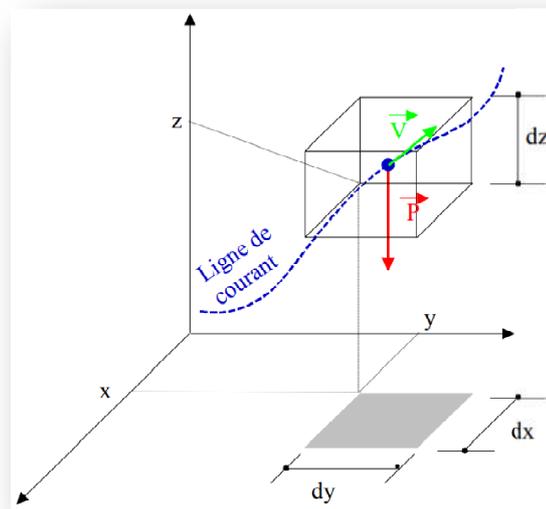


Figure 3.1 : Élément de volume élémentaire

La relation fondamentale de la dynamique étant vectorielle, nous devons travailler en projection sur les 3 axes : Selon l'axe Ox :

$$-P_{(x+dx,y,z)} \cdot dy \cdot dz + P_{(x,y,z)} \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot dy \cdot dz \cdot dz \cdot \frac{dV_x}{dt}$$

Après développement on aura :  $-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \frac{dV_x}{dt}$

Selon Oy :  $-\frac{\partial P}{\partial y} = \rho \frac{dV_y}{dt}$

Selon Oz :  $-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho \cdot g = \rho \frac{dV_z}{dt}$

La différentielle de la pression P s'écrit :  $dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$

$\frac{\partial P}{\partial x}$  : correspond au taux de variation de P selon x.

$\frac{\partial P}{\partial x} dx$  : correspond à la valeur de la variation de pression selon x lorsque la variable

« x » varie d'une petite quantité dx. A l'aide des trois équations précédentes, nous obtenons :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

$$dP = -\rho \frac{dV_x}{dt} dx - \rho \frac{dV_y}{dt} dy - \rho \frac{dV_z}{dt} dz + \rho \cdot g \cdot dz$$

$$dP = -\rho \frac{dx}{dt} dV_x - \rho \frac{dy}{dt} dV_y - \rho \frac{dz}{dt} dV_z + \rho \cdot g \cdot dz$$

$$dP = -\rho V_x \cdot dV_x - \rho V_y \cdot dV_y - \rho V_z \cdot dV_z + \rho \cdot g \cdot dz$$

Or  $\vec{V} \begin{cases} V_x \\ V_y \\ V_z \end{cases} \quad \overline{dV} \begin{cases} dV_x \\ dV_y \\ dV_z \end{cases} \quad \vec{V} \overline{dV} = V_x \cdot dV_x + V_y \cdot dV_y + V_z \cdot dV_z$

ce qui nous donne :  $dP = -\rho \cdot \vec{V} \overline{dV} - \rho \cdot g \cdot dz$

nous en déduisons l'équation d'Euler :  $dP + \rho \cdot \vec{V} \overline{dV} + \rho \cdot g \cdot dz = 0$

### 3.2.2 Équation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli est obtenue en travaillant entre deux points d'une même veine de fluide (figure 3.2).

$$\int_1^2 dP + \rho \cdot \vec{V} \overline{dV} + \rho \cdot g \cdot dz = 0$$

$$\int_1^2 dP + \int_1^2 \rho \cdot \vec{V} \overline{dV} + \int_1^2 \rho \cdot g \cdot dz = 0$$

$$P_2 - P_1 + \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) = 0$$

D'où le théorème de Bernoulli pour un fluide incompressible :

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1$$

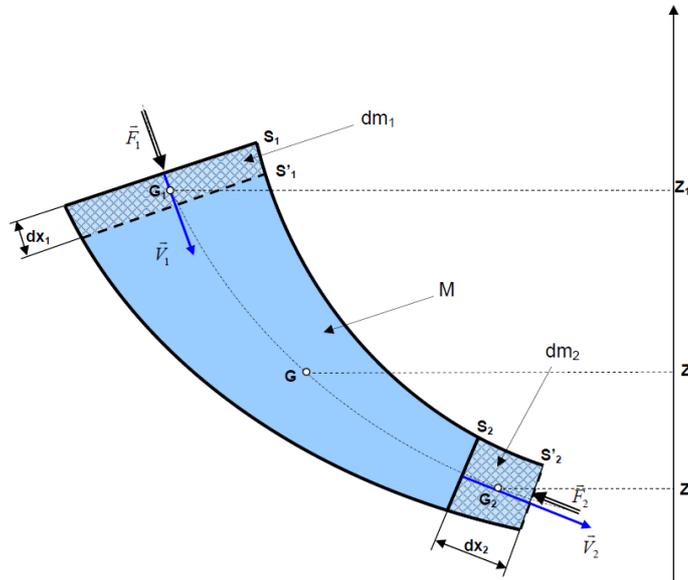


Figure 3.2 : schéma de la veine fluide

### 3.2.3 Interprétations de l'équation de Bernoulli

#### 3.2.3.1 Bilan énergétique

Le théorème de Bernoulli peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2$$

Dans cette équation, différents termes peuvent être interprétés en qualité d'énergie :

$\frac{P_1}{\rho}$  : Energie massique ;

$\frac{1}{2}V_1^2$  : Energie cinétique massique ;

$gz_1$  : Energie potentielle massique.

#### 3.2.3.2 Bilan en pression

Le théorème de Bernoulli peut s'écrire de la façon suivante :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2$$

Dans cette équation, différents termes peuvent être interprétés en qualité de pression :

$P_1 + \rho g z_1$  : Pression statique

$\frac{1}{2} \rho V_1^2$  : Pression dynamique

« Les pressions exprimées dans le théorème de Bernoulli sont des pressions absolues !!! ».

### 3.2.3.3 Bilan en hauteur

Le théorème de Bernoulli peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{1}{2g} V_1^2 + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{1}{2g} V_2^2 + z_2$$

Dans cette équation, différents termes peuvent être interprétés en qualité de pression :

$\frac{P_1}{\rho g}$  : Hauteur manométrique (m)

$\frac{P_1}{\rho g} + z_1$  : Hauteur piézométrique (m)

$\frac{1}{2g} V_1^2$  : Hauteur capable (m)

$z_1$  : Altitude (m).

« La somme des trois termes est appelée ligne de charge! ».

### 3.2.4 Application dans le cas des fluides réels

Dans la réalité, les fluides ont une certaine viscosité et frottent le long des parois de canalisations qui ne sont pas lisses. Ce frottement entraîne une perte d'énergie que nous noterons  $\Delta H$ . L'équation de Bernoulli généralisée devient :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{1}{2g} V_1^2 + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{1}{2g} V_2^2 + z_2 + \Delta H_{1-2}$$

Graphiquement, cela se traduit par (figure 3.3) :

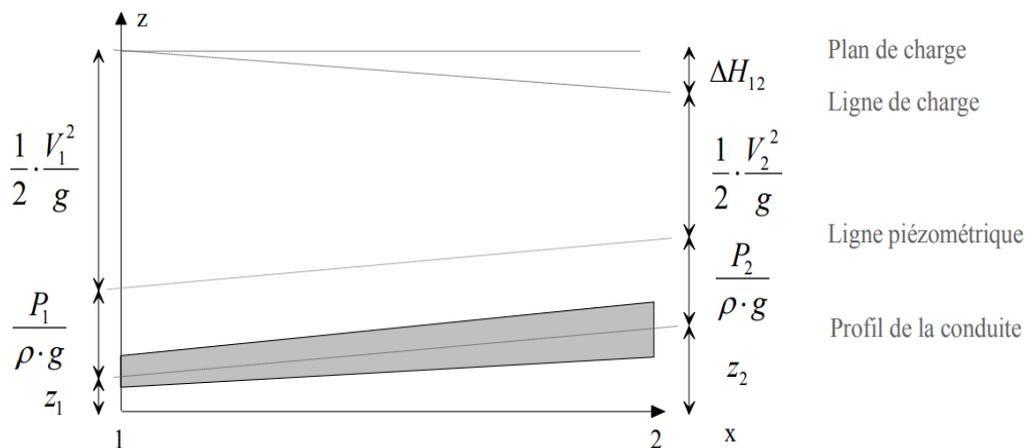


Figure 3.3 : Interprétation graphique de l'équation de Bernoulli généralisée

### 3.2.5 Applications du théorème de Bernoulli

#### 3.2.5.1 Cas des liquides parfait

##### 1- Le Venturi

Le venturi est composé d'un convergent, d'une partie droite et d'un divergent. Nous mesurons les pressions statiques en A et B (figure 3.4).

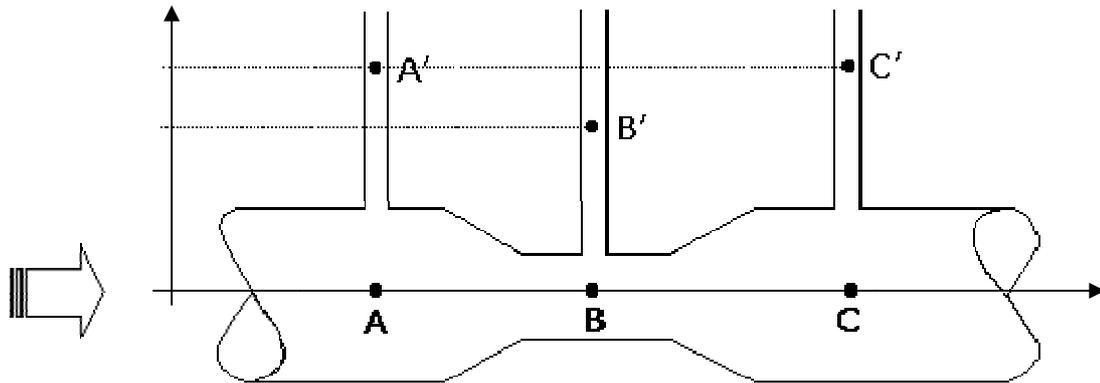


Figure 3.4 : Phénomène de venturi

Nous avons les pressions suivantes :

$$\begin{cases} P_A = P_{A'} + \rho g z_{A'} \\ P_B = P_{B'} + \rho g z_{B'} \\ P_C = P_{C'} + \rho g z_{C'} \end{cases} \quad \text{ou } P_{A'} = P_{B'} = P_{C'} = P_{atm}$$

Appliquons Bernoulli sur la ligne de courant passant par A, B et C :

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho V_B^2 = P_C + \rho g z_C + \frac{1}{2} \rho V_C^2$$

$$P_{atm} + \rho g z_{A'} + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = P_{atm} + \rho g z_{B'} + \frac{1}{2} \rho V_B^2 = P_{atm} + \rho g z_{C'} + \frac{1}{2} \rho V_C^2$$

$$z_A = z_B = z_C = 0$$

$$z_{A'} + \frac{1}{2} \frac{V_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2} \frac{V_B^2}{g} = z_{C'} + \frac{1}{2} \frac{V_C^2}{g}$$

On sait que par ailleurs que le débit volumique est conservé :

$q_V = S_A V_A = S_B V_B = S_C V_C$  (on suppose que la vitesse est uniforme sur une même section).

Remarquons que :  $S_A > S_B \Rightarrow V_B < V_A \Rightarrow z_{A'} > z_{B'}$

Et que si :  $S_A = S_C$  alors  $V_B = V_C$  et  $z_{A'} = z_{C'}$

La 3<sup>ème</sup> sonde ne servira que pour une étude des pertes de charge.

$$z_{A'} + \frac{1}{2} \frac{V_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2} \frac{V_B^2}{g} \Rightarrow \Delta Z = z_{A'} - z_{B'} = \frac{1}{2g} (V_B^2 - V_A^2)$$

$$S_A V_A = S_B V_B \Rightarrow V_B = V_A \frac{S_A}{S_B}$$

$$\Delta Z = \frac{1}{2g} V_A^2 \left( \frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right) \quad \text{soit} \quad V_A = \sqrt{\frac{2g\Delta Z}{(S_A^2/S_B^2 - 1)}}$$

Le débit dans la conduite s'obtient par :  $q_v = S_A \sqrt{\frac{2g\Delta Z}{(S_A^2/S_B^2 - 1)}}$

**2- Le tube de Pitot**

A partir d'une prise de pression statique et d'une prise de pression totale, le tube de Pitot (figure 3.5) va nous permettre de déterminer la vitesse d'écoulement d'un fluide dans la canalisation. Nous allons écrire Bernoulli au point A et M et comparer les expressions.

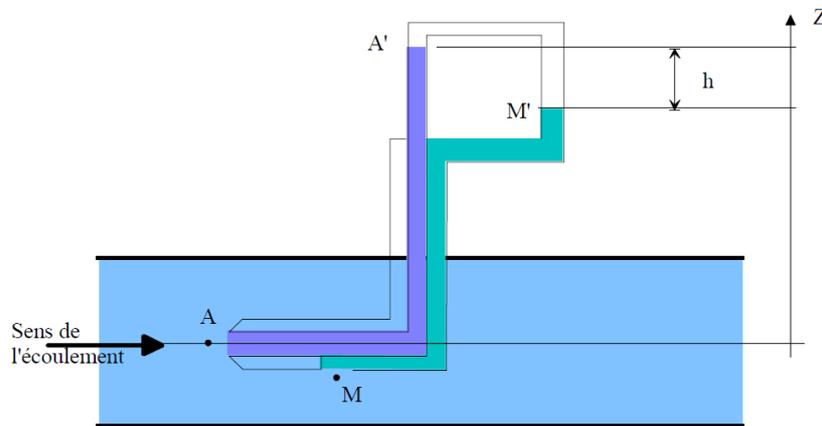


Figure 3.5 : Phénomène de Pitot

Au point A, nous avons un point d'arrêt :

$$\frac{P_A}{\rho g} + z_A = Cst \quad \text{La vitesse peut être considérée comme nulle.}$$

Au point M, nous avons l'expression :

$$\frac{P_M}{\rho g} + z_M + \frac{V_M^2}{2g} = \frac{P_A}{\rho g} \Rightarrow P_A - P_M = \frac{1}{2} \rho V_M^2$$

Nous avons les relations :

$$P_A - P_{A'} = \rho_{liquide} \cdot g \cdot (z_{A'} - z_A)$$

$$P_{A'} - P_{M'} = \rho_{gaz} \cdot g \cdot (z_{M'} - z_{A'})$$

$$P_{M'} - P_M = \rho_{liquide} \cdot g \cdot (z_M - z_{M'})$$

En sommant ces trois égalités membre à membre, nous obtenons :

$$P_A - P_M = \rho_{liquide} \cdot g \cdot (z_{A'} - z_A + z_M - z_{M'}) + \rho_{gaz} \cdot g \cdot (z_{M'} - z_{A'})$$

En considérant  $z_A = z_M$  et  $\rho_{gaz} \cdot g \cdot (z_{M'} - z_{A'})$  négligeable devant le terme lié à l'eau, nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \rho_{\text{liquide}} V_M^2 = \rho_{\text{liquide}} \cdot g \cdot h$$

$$V_M = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

### 3- Ecoulement par orifice – Formule de Torricelli

Considérons un réservoir de grandes dimensions à parois minces percé d'un orifice en sa partie inférieure. A la surface libre du fluide et au niveau de l'orifice nous nous trouvons dans l'air et donc à la pression atmosphérique. La vitesse au point A est supposée nulle (figure 3.6).

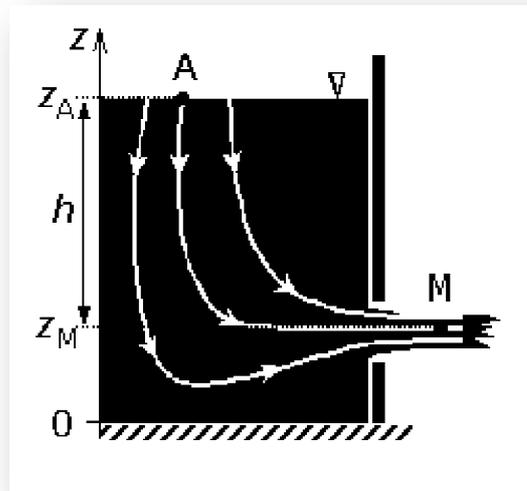


Figure 3.6 : Vidange d'un réservoir

Appliquons Bernoulli entre le point A de la surface libre et un point M du jet :

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = P_M + \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho V_M^2$$

Comme il n'y a pas de discontinuité de la pression à l'interface jet-atmosphère, la pression statique dans le jet est égale à la pression atmosphérique.

$$P_A = P_M = P_{atm}$$

$$P_{atm} + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = P_{atm} + \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho V_M^2$$

$$\rho g z_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho V_M^2 \quad \text{avec } V_A \gg V_M$$

$$\text{Par conséquent : } \rho g (z_A - z_M) = \frac{1}{2} \rho (V_M^2 - V_A^2) = \frac{1}{2} \rho V_M^2$$

$$V_M = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad \text{Formule de Torricelli.}$$

Dans le cas des fluides réels, nous avons toujours une perte d'énergie. La vitesse réelle est donc inférieure à celle calculée par la formule de Torricelli.

Pour pouvoir calculer la vitesse réelle, nous déterminerons des coefficients de contraction, de vitesse et de débit (figure 3.7).

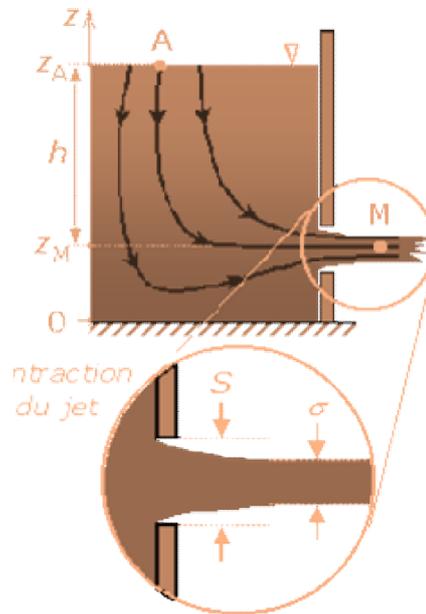
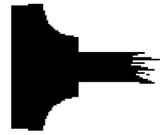


Figure 3.7 : Détail d'un orifice

$$q_V = \sigma \cdot V_M = \sigma \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$$\sigma = c_c \cdot S$$

Avec :  $C_c$  coefficient de contraction dépend de la géométrie de l'orifice.

	<b>parois minces</b>	$C_c = 0,61$
	<b>orifice à bords profilés</b>	$C_c = 1,00$
	<b>orifice à bords rentrants</b>	$C_c = 0,50$

# CHAPITRE 4

## ÉCOULEMENT EN CHARGE

## 4.1 Généralités

L'écoulement d'un fluide réel engendre des forces de frottement dues à la viscosité et à la turbulence. La présence de ces forces induit une perte de charge qui est une transformation irréversible de l'énergie mécanique en énergie thermique. Etudier l'écoulement d'un fluide revient à résoudre l'équation de Navier-Stokes. Mais en pratique, cette équation ne peut se résoudre analytiquement qu'en posant des hypothèses simplificatrices. Notamment on va devoir distinguer deux grands types d'écoulement (figure 4. 1): En régime *laminaire* ou en régime *turbulent*.

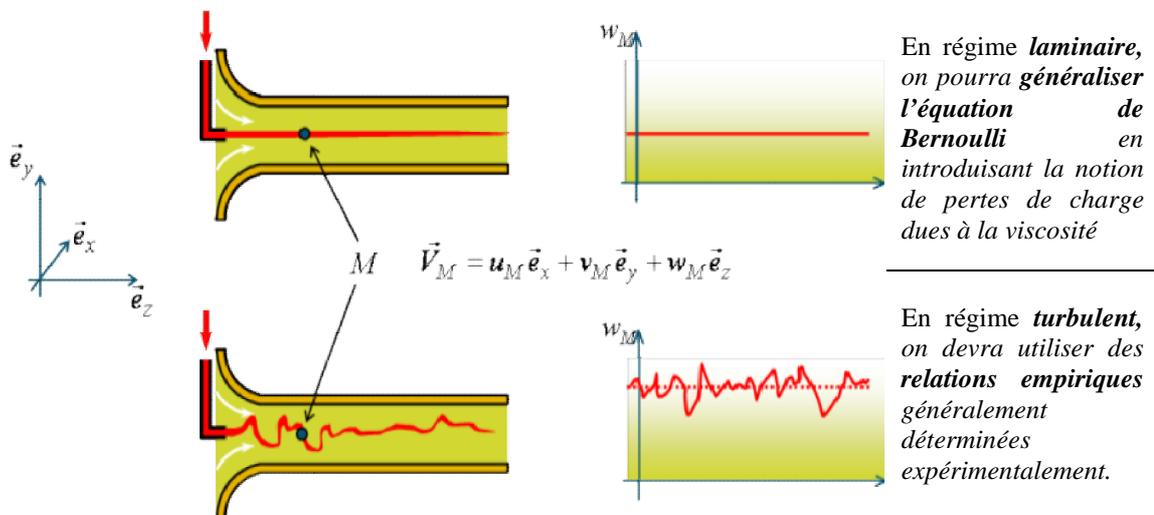


Figure 4.1 : Régimes d'écoulement

## 4.2 Expérience de Reynolds

Les expériences réalisées par Osborne **Reynolds** (1883), (figure 4.2) consiste à injecter un liquide coloré dans une masse liquide en mouvement à l'intérieur d'un tube en verre. Si on ouvre légèrement le robinet de vidange, le liquide coloré commence à passer lentement dans le tube en verre et ne se mélange pas avec les autres couches du liquide. Les lignes de courant dans le tube sont toujours rectilignes de telle sorte que la coloration reste uniforme.

*Ce régime s'appelle **Régime laminaire**.*

Si on augmente l'ouverture du robinet, la vitesse d'écoulement s'accroît et on remarque des oscillations dans le tube. L'augmentation de la vitesse entraîne le mélange du liquide coloré avec les autres couches du liquide dont laquelle chaque particule est projetée dans toutes les directions d'une manière irrégulière et désordonnée. *Ce régime s'appelle **Régime turbulent**.*

Si on désigne par  $V$  la vitesse moyenne dans le tube, par  $D$  le diamètre intérieur du tube et par  $\nu$  le coefficient de viscosité cinématique du liquide en mouvement, le nombre adimensionnel appelé « nombre de Reynolds »  $R_e = \frac{VD}{\nu}$

Peut servir à caractériser le régime d'écoulement, certes, le point de passage d'un régime à l'autre est assez imprécis et correspond à un nombre de Reynolds de 2000 :

L'écoulement laminaire pour  $R_e < 2000$ .  
 - Il devient turbulent pour  $R_e > 2000$

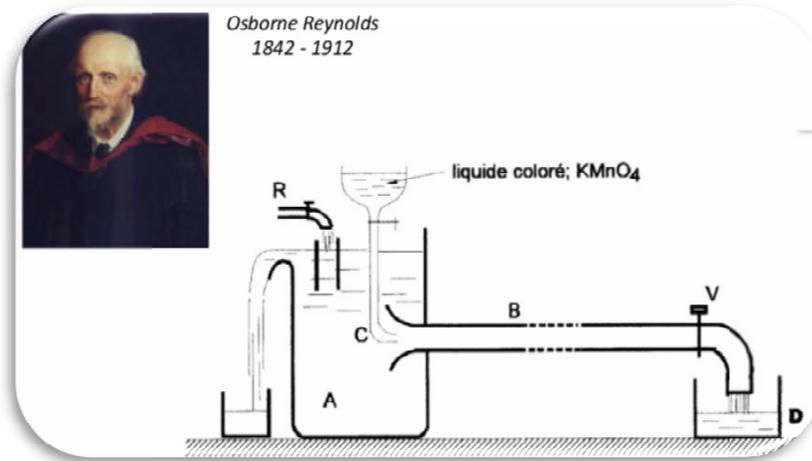


Figure 4.2 : Expérience de Reynolds : dispositif expérimental

Pour des tubes de diamètre variable et des fluides de viscosité et densité différent, il existe une relation qui prévoit le passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent. Entre les deux valeurs de  $R_e$ , le régime est qualifié d'intermédiaire (si  $R_e = 2000 = R_{ec}$  c'est le régime transitoire, critique ou encore) (figure 4.3).

Dans tous les problèmes usuels de l'hydraulique (sauf pour l'hydraulique souterraine) c'est au régime turbulent que l'on a affaire. Quand le régime est turbulent, les frottements augmentent donc la perte de charge augmente dans une canalisation.

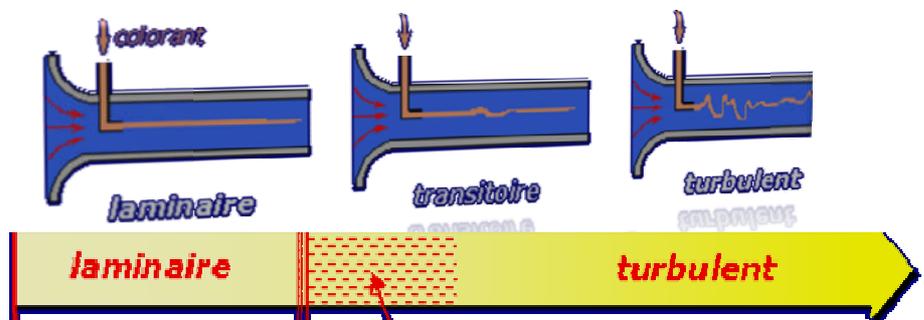


Figure 4.3 : Régime intermédiaire (transitoire)  $R_{ec}$

### 4.2.1 Ecoulement laminaire et pertes de charges régulières

Partons de l'équation de Navier-Stokes obtenue pour un fluide newtonien

incompressible :  $\rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{\nabla}\rho + \mu\Delta\vec{V} + \rho\vec{g}$

Pour un écoulement stationnaire, on a :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} \nearrow^0 + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} = (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}V^2 - \vec{V}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{V})$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2}\rho\vec{\nabla}V^2 - \rho\vec{V}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{V}) = -\vec{\nabla}\rho + \mu\Delta\vec{V} + \rho\vec{g}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) - \rho\vec{V}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{V}) = -\vec{\nabla}\rho + \mu\Delta\vec{V} - \vec{\nabla}(\rho gz)$$

$$\vec{\nabla}\left(P + \rho gz + \frac{1}{2}\rho V^2\right) = \mu\Delta\vec{V} + \rho\vec{V}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{V}) = \mu\Delta\vec{V} + 2\rho\vec{V}\wedge\Omega$$

$$\vec{\nabla}\left(P + \rho gz + \frac{1}{2}\rho V^2\right) = \mu\Delta\vec{V} + 2\rho\vec{V}\wedge\Omega$$

Projetons cette égalité vectorielle le long d'une ligne de courant puis sur chacun des trois axes d'un repère cartésien :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(P + \rho gz + \frac{1}{2}\rho V^2\right) = \mu\Delta V_x \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(P + \rho gz + \frac{1}{2}\rho V^2\right) = \mu\Delta V_y \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(P + \rho gz + \frac{1}{2}\rho V^2\right) = \mu\Delta V_z \end{cases}$$

Supposons que l'écoulement laminaire s'effectue suivant l'axe x. dans ces conditions, on

a :

$$\begin{cases} V_x = V \\ V_y = 0 \\ V_z = 0 \end{cases} \quad \text{si on pose } \left(P + \rho gz + \frac{1}{2}\rho V^2\right) = Pt \quad \begin{cases} \frac{\partial Pt}{\partial x} = \mu\Delta V \\ \frac{\partial Pt}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Pt}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$Pt(x, y, z) = Pt(x)$$

$$\frac{dPt}{dx} = \mu\Delta V = \mu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$

D'après l'équation de continuité on a :  $\vec{\nabla}\vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \nearrow^0 + \frac{\partial V_z}{\partial z} \nearrow^0 = 0$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dPt}{dx} = \mu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = C^{te}\nabla(x, y, z)$$

On peut en déduire que la charge varie linéairement avec la distance parcourue par le fluide.

$$P_{t1} = P_{t2} + \Delta P_t$$

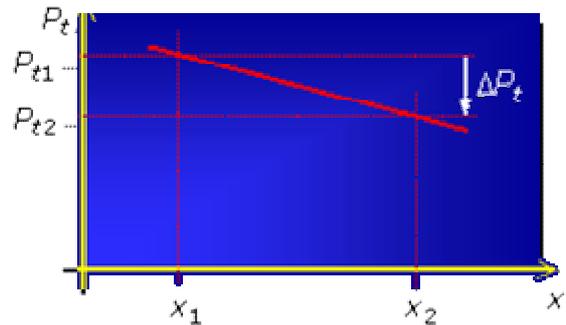
$$\frac{dP_t}{dx} = \frac{P_{t2} - P_{t1}}{X_2 - X_1} = \frac{\Delta P_t}{X_2 - X_1}$$

$$\Delta P_t = -\frac{dP_t}{dx} (X_2 - X_1)$$

$$P_{t1} = P_{t2} - \frac{dP_t}{dx} (X_2 - X_1)$$

$$\Rightarrow P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 - \frac{dP_t}{dx} (X_2 - X_1)$$

pression totale en (1) = pression totale en (2) - perte de charge régulière  $\Delta P_t > 0$



Il reste alors à caractériser le gradient de pression totale  $\frac{dP_t}{dx}$ .

### 4.2.1.1 Ecoulement de poiseuille

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux dans un long tube cylindrique de rayon R et de longueur  $L \gg R$ . Le tube est horizontal (orienté suivant Oz) et l'écoulement est assuré grâce à l'existence d'une différence de pression  $\Delta p$  entre l'entrée du tube et la sortie du tube (figure 4.4).

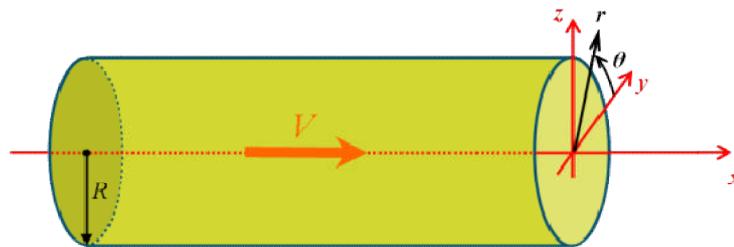


Figure 4.4 : Ecoulement d'un fluide visqueux dans un tube cylindrique

$$\vec{V} = V\vec{e}_x \Rightarrow V_\theta = 0 \text{ dans ces conditions on peut écrire : } \frac{dP_t}{dx} = \mu \Delta V$$

L'équation de continuité impose :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) \nearrow 0 + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \nearrow 0 + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Et géométrie du système est telle qu'il y a symétrie de révolution :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad \text{donc, finalement} \quad V(x, r, \theta) = V(r)$$

Par conséquent, le Laplacien s'exprime comme :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \nearrow^0 + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \nearrow^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right)$$

$$\frac{dPt}{dx} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = C^{te} = A$$

Il est alors possible d'enduire le profil de vitesse  $V(r)$  par simple intégration :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{A}{\mu} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = \frac{A}{\mu} r \Rightarrow r \frac{dV}{dr} = \frac{A}{\mu} \frac{r^2}{2} + B$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{A}{\mu} \frac{r}{2} + \frac{B}{r} \Rightarrow V(r) = \frac{A}{\mu} \frac{r^2}{4} + B \ln r + C$$

B et C : constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites

Au contact des parois de la conduite, en  $r = R$ , le fluide est immobile :

$$V(R) = 0 \Rightarrow \frac{A}{\mu} \frac{R^2}{4} + B \ln R + C = 0$$

Sur l'axe de la conduite, en  $r = 0$ , la vitesse est nécessairement de valeur finie :

$$V(0) \neq \infty \Rightarrow B \ln 0 + C \neq \infty \Rightarrow B = 0 \Rightarrow C = -\frac{A}{\mu} \frac{R^2}{4}$$

$$V(r) = 0 \Rightarrow \frac{A}{4\mu} (R^2 - r^2) \text{ (profil de vitesse parabolique (figure 4.5))}$$

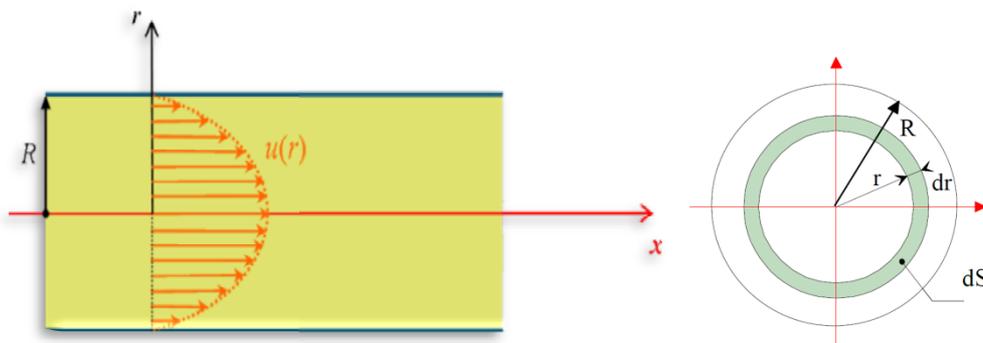


Figure 4.5 : profil de vitesse parabolique

Calcul du débit volumique à travers une section du tube (figure 3.11):

$$dq_v = V(r) dS \text{ ou } dS = 2\pi r dr$$

$$q_v = \int_0^R V(r) 2\pi r dr = -\frac{A}{4\mu} 2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

$$q_v = -2\pi \frac{A}{4\mu} \left[ R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = -2\pi \frac{A}{4\mu} \frac{R^4}{4} = -\pi \frac{A}{8\mu} R^4$$

$$\text{Ou } \frac{dPt}{dx} = A \text{ et } R = \frac{D}{2}$$

$$q_v = -\frac{\pi}{128\mu} \left( \frac{dPt}{dx} \right) D^4$$

On peut alors définir une vitesse moyenne de l'écoulement :  $V_m = \frac{q_v}{S}$

Par ailleurs, si on considère une conduite de longueur  $L$ , la perte de charge totale s'exprime :

$$\Delta P_t = (P_{t1} - P_{t2}) = \int_2^1 \frac{dPt}{dx} dx \quad \text{Avec} \quad \frac{dPt}{dx} = C^{te}$$

$$\Delta P_t = \frac{dPt}{dx} \int_2^1 dx = \frac{dPt}{dx} \underbrace{(X_1 - X_2)}_{-L} \Rightarrow \Delta P_t = - \left( \frac{dPt}{dx} \right) L$$

On constate que la perte de charge est proportionnelle à la distance parcourue  $\Rightarrow$  on dit que la perte de charge est régulière

Or, on a trouvé l'expression du débit :  $q_v = -\frac{\pi}{128\mu} \left( \frac{dPt}{dx} \right) D^4$

$$q_v = -\frac{\pi}{128\mu} \left( \frac{\Delta P_t}{L} \right) D^4 \quad \text{Il s'agit de la formule de Poiseuille}$$

On peut exprimer la perte de charge totale en fonction du débit ou de la vitesse moyenne de l'écoulement :

$$q_v = V_m S = \frac{\pi}{128\mu} \left( \frac{\Delta P_t}{L} \right) D^4 \Rightarrow \Delta P_t = 128 \mu L V_m \left( \frac{S}{\pi D^4} \right) = 128 \mu L V_m \frac{\pi D^2/4}{\pi D^4}$$

$$\Delta P_t = \frac{32 \mu L V_m}{D^2}$$

Il est d'usage d'exprimer une perte de charge en fonction de la pression cinétique de l'écoulement dans la conduite. La pression cinétique est générée par le mouvement (elle correspond à l'énergie cinétique par unité de volume) et s'exprime :  $\frac{1}{2} \rho V_m^2$

$$\text{Dans ce cas : } \Delta P_t = \frac{32 \mu L V_m}{D^2} = \left( \frac{32 \mu L V_m}{D^2} \frac{2}{\rho V_m^2} \right) \frac{1}{2} \rho V_m^2$$

$$\frac{64 \mu L}{\rho V_m D^2} = \frac{64 \mu L}{\rho V_m D D} = \frac{64 L}{Re D} = \lambda \frac{L}{D}$$

Donc pour un écoulement laminaire dans une conduite, on a  $\Delta P_t = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho V_m^2$

Avec  $\lambda = \frac{64}{Re}$  : coefficient sans dimension est appelé **coefficient de perte de charge régulière**

*Remarque : ceci n'est valide que pour  $Re < 2000$*

D'un point de vue pratique, cette formulation est particulièrement adaptée pour évaluer l'ensemble des pertes de charge occasionné par un circuit hydraulique comportant une succession de différents tronçons de conduite, comme l'illustre la **figure 4.6**.

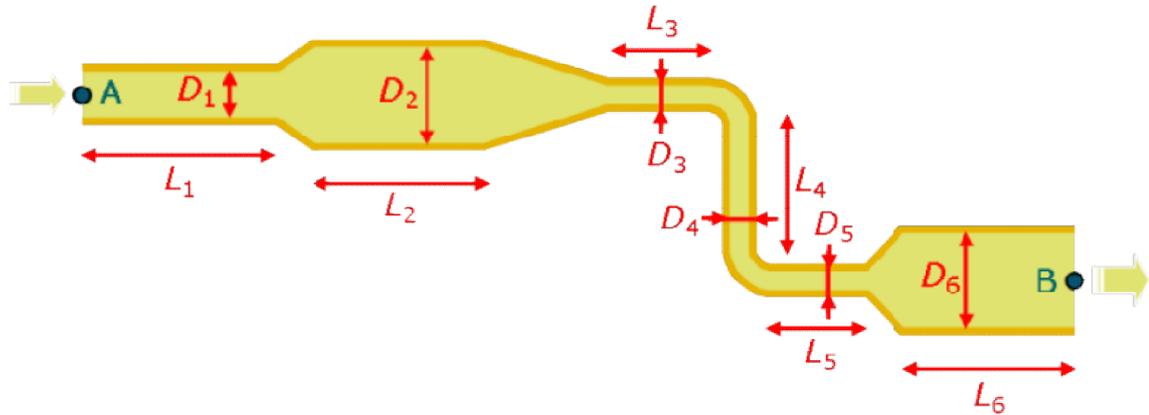


Figure 4.6 : Un circuit hydraulique comportant une succession de différents tronçons de conduite

On peut alors généraliser l'équation de Bernoulli :

$$P_{tA} = P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2$$

$$P_{tB} = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho V_B^2$$

$$\Delta P_t = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \dots + \lambda_6 \frac{L_6}{D_6} \frac{1}{2} \rho V_6^2 + \text{pertes de charges singulières}$$

$$P_{tA} = P_{tB} + \Delta P_t$$

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho V_B^2 + \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{1}{2} \rho V_i^2 + \text{pertes de charges singulières}$$

**Remarque :**

Cette équation reste valable même si l'écoulement n'est pas laminaire ( $Re < 2000$ ) ; la seule différence réside en l'expression du coefficient de perte de charge régulière qui doit être déterminé expérimentalement ou tiré d'abaques  $\lambda \neq \frac{64}{Re}$

Pour un écoulement turbulent  $\lambda \neq \frac{64}{Re}$  , le coefficient de perte de charge régulière est déterminé, par l'équation empirique de **Colebrook**.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left[ \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right]$$

Permet le calcul du coefficient  $\lambda$  ; cette équation est une équation implicite peu facile à manipuler ; nous utiliserons plutôt le diagramme de Moody, tracé à partir de l'équation précédente (figure 4.7).

Diagramme de Moody

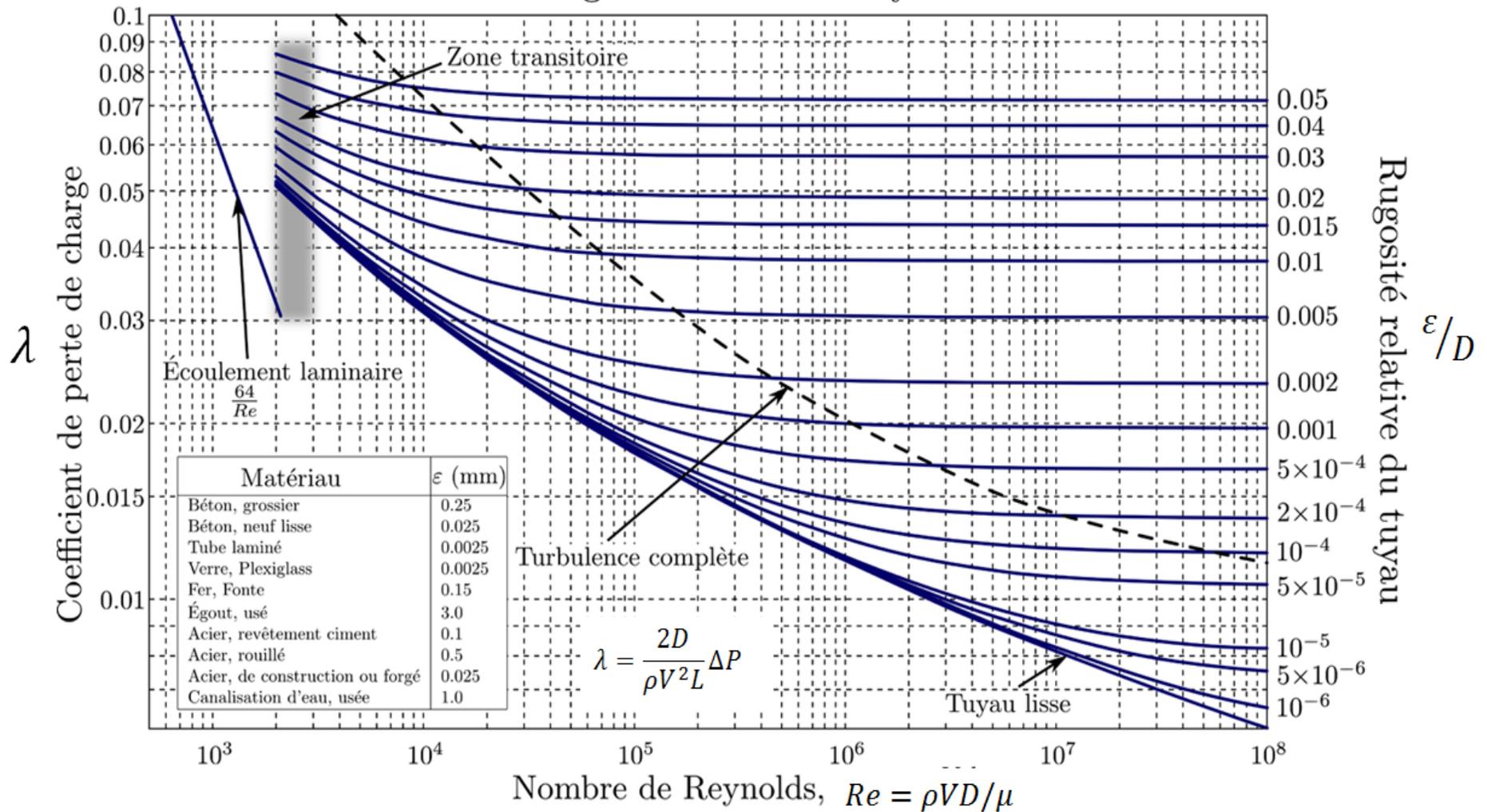


Figure 4.7 : Diagramme de MOODY

### 4.2.2 Pertes de charges singulières – théorème de Bélanger

Considérons l'écoulement d'un fluide incompressible dans une conduite horizontale présentant un élargissement brusque (figure 4.8), ce qui constitue une singularité :

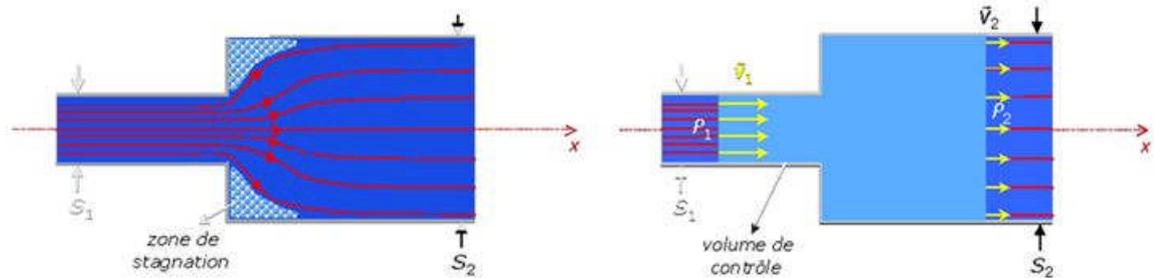


Figure 4.8 : Conduite horizontale présentant un élargissement brusque

Du à son inertie, le fluide ne suit pas complètement les changements brusques de direction : il se crée des **zones de turbulences** ou il y a dissipation d'énergie.

Ces zones, où le fluide est globalement stagnant, sont responsables de **pertes de charges singulières**. On choisit un volume de contrôle sur lequel on applique le théorème d'Euler. On suppose que sur une même section (en amont et en aval du rétrécissement) les vitesses et pressions sont uniformes donc on néglige les pertes de charges régulières au cours du rétrécissement. Dans ces conditions, par projection sur l'axe x, on obtient :

$q_m(V_2 - V_1)$  : Projection sur x de la résultante des forces exercées sur le volume de contrôle.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Poussée en amont: } + P_1 S_1 \\ \text{contre - poussée en aval: } - P_2 S_2 \\ \text{Poussée de la paroi verticale sur la partie stagnante du fluide:} \\ \quad + P(S_2 - S_1) \text{ ou } P = P_1 \text{ (lois de l'hydrostatique)} \end{array} \right.$$

$$q_m(V_2 - V_1) = P_1 S_1 - P_2 S_2 + P(S_2 - S_1) = (P_2 - P_1) S_2 \Rightarrow q_m(V_2 - V_1) = (P_2 - P_1) S_2$$

Or, le fluide étant supposé incompressible, on doit avoir conservation du débit massique :  $q_m = \rho V_2 S_2 = \rho V_1 S_1 \Rightarrow q_m(V_2 - V_1) = \rho V_2 S_2 (V_2 - V_1) = (P_2 - P_1) S_2$

$$P_1 = P_2 + \rho V_2^2 - \rho V_2 V_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 - \rho V_2 V_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 - \frac{1}{2} \rho V_1^2$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \rho (V_1 - V_2)^2}_{\text{perte de charge due à la singularité}}$$

Exprimons cette perte de charge en fonction de la pression cinétique dans la conduite amont :

$$\frac{1}{2}\rho(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\rho(V_1 - V_1 \frac{S_1}{S_2})^2 = \frac{1}{2}\rho V_1^2 (1 - \frac{S_1}{S_2})^2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 K$$

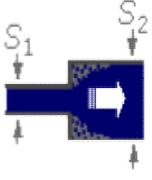
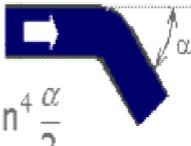
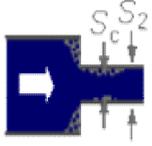
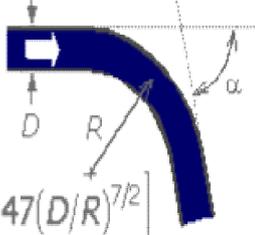
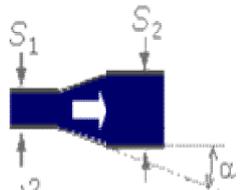
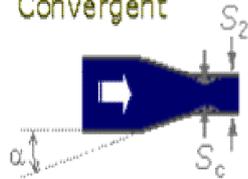
$$K = (1 - V_1 \frac{S_1}{S_2})^2 \text{ Coefficient de perte de charge singulière due à un élargissement brusque ( sans dimension ) :}$$

On peut ainsi compléter l'équation de Bernoulli généralisée **figure 4.6**:

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{1}{2}\rho V_i^2 + \sum_j K_j \frac{1}{2}\rho V_j^2$$

Coefficient de perte de charge singulière associées à chaque singularité rencontrée au cours de l'écoulement.

### 4.3 quelques singularités typiques

<p><b>Elargissement brusque</b></p> $K = (1 - S_1/S_2)^2$ 	<p><b>Coude brusque</b></p> $K = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$ 
<p><b>Rétrécissement brusque</b></p> $K = (1/\mu - 1)^2$ $\mu = S_c/S_2$ 	<p><b>Coude arrondi</b></p> $K = \frac{\alpha}{\pi} [0,131 + 1,847(D/R)^{7/2}]$ 
<p><b>Divergent</b></p> $K = (1 - S_1/S_2)^2 \sin \alpha$ 	<p><b>Convergent</b></p> $K = (1/\mu - 1)^2 \sin \alpha$ 
<p><b>Entrée d'une canalisation</b></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>Entrée brusque</p>  <p><math>K = 0,5</math></p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Entrée progressive</p>  <p><math>K = 0,04</math></p> </div> </div>	

### 4.4 Calcul des réseaux de distribution d'eau

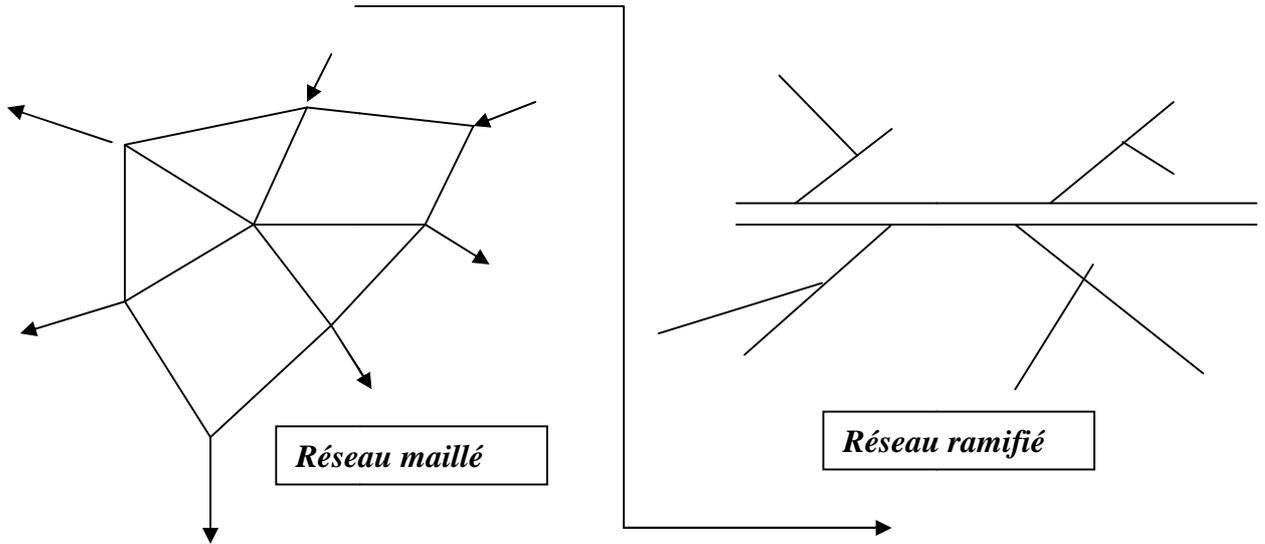


Figure 4.9 : Réseaux maillé et ramifié

#### 4.4.1 Réseaux

##### 4.4.1.1 Réseau ramifié

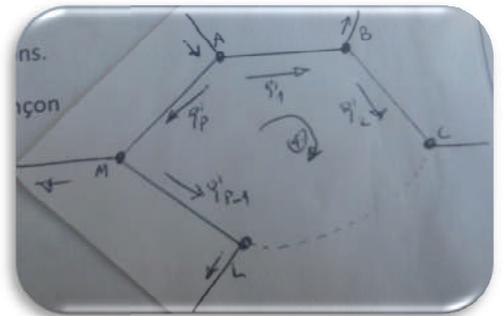
Le calcul se ramène à l'exécution d'une série de problèmes de conduites simples (figure 4.9).

##### Principe

Pour chaque tronçon, on connaît :

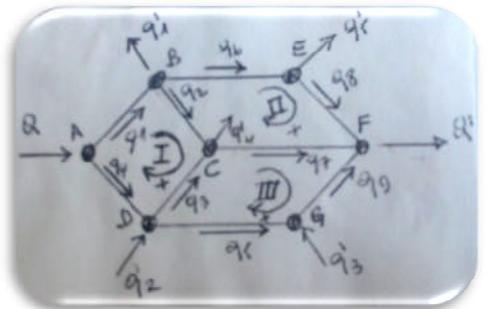
$Q_i$  (besoins),  $H_i$  (pression nécessaire min en chaque point) ; le tracé et le profile en longueur du tronçon (imposé par la topographie).

Déterminer «  $d_i$  ».



$$h_i = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}$$

$$h_i = 8\lambda \frac{l}{\pi^2} \frac{Q^2}{gd^5}$$



#### 4.4.1.2 Réseau maillé

Constitué d'une série de tronçons disposés de manière à former une ou plusieurs boucles fermés en suivant son tracé. Contrairement aux réseaux ramifiés, un réseau maillé présente une indétermination sur les grandeurs et les signes (sens) des débits et des pertes de charge dans chaque tronçon.

On connaît « Q » et « H » en A ;  $h_i$  ;  $d_i$  ;  $q_i$  ;  $Q = Q' + \sum q_i'$

**Déterminer** «  $q_i$  » dans chaque tronçon avec leur sens (signe) et les pertes de charges «  $h_i$  » le long de chaque tronçon c.à.d  $H_i$  .

##### **Principe de calcul**

La méthode est basée sur deux principes qui sont la traduction des lois de KIRCHOFF en électricité.

##### **a) principe d'équations de débits**

En chaque nœud la somme algébrique des débits = 0.

(+) débits entrants ; (-) débits sortants.

En A :  $Q - q_1 - q_4 = 0$

En B :  $q_1 - q_1' - q_2 - q_6 = 0$

##### **b) principe d'équations de pertes de charges**

Le long de chaque maille, la somme algébrique des pertes de charges égale à 0.

Avec :  $h_i$  est positif si le débit dans le tronçon a le même sens que celui proposé, et  $h_i$  négatif dans le sens contraire.

Pour ABCD :  $h_{AB} + h_{BC} - h_{CD} - h_{DA} = 0$

##### **c) Méthode de HARDY-CROSS**

Considérons une maille à plusieurs tronçons. On propose de débits  $q_i'$  dans chaque tronçon. En respectant le 1<sup>er</sup> principe  $h = R \cdot q^n$

$$\sum h_i = \sum R q^n = 0$$

$q$  = débit réel,  $q_1'$  diffère du débit réel  $q_1$  d'une quantité «  $\Delta q$  ».

$\Delta q$  : correction à apporter au débit  $q_1'$  pour satisfaire le 2<sup>ème</sup> principe.

$q_1 = q_1' + \Delta q_1$  (algébrique).

$$\sum R (q_1' + \Delta q)^n = 0 \text{ -----(1) } \quad \{q' \text{ et } Rq'^n \text{ ont le même signe}\}$$

Puisque  $\Delta q$  est supposé très petit /  $q'$  en développant (1) et en négligeant les termes infiniment petit ordre supérieur ou égale à 2.

$$\Delta q = \frac{-\sum R q'^n}{\sum n \cdot R q'^{n-1}} \quad \frac{\text{algébrique}}{\text{arithmétique}}$$

### 4.4.2 Application

Vérifier l'équation des nœuds avec les débits corrigés.

**Solution** Correction des débits

$$\Delta q = \frac{\sum Rq^2}{\sum 2Rq} \quad \text{avec } n=2$$

$$K = \lambda \frac{l}{12.1 d^5}$$

1<sup>ère</sup> correction

Maille (I)	$K q^2$	$2kq$	$\Delta q$
AB	2592	144	3,68
BC	512	64	
AC	-4900	280	
$\Sigma.$	-1796	488	

Maille (II)	$K q^2$	$2kq$	$\Delta q$
AD	-2523	174	-4,52
DC	-196	28	
CA	4900	280	
$\Sigma.$	2181	482	

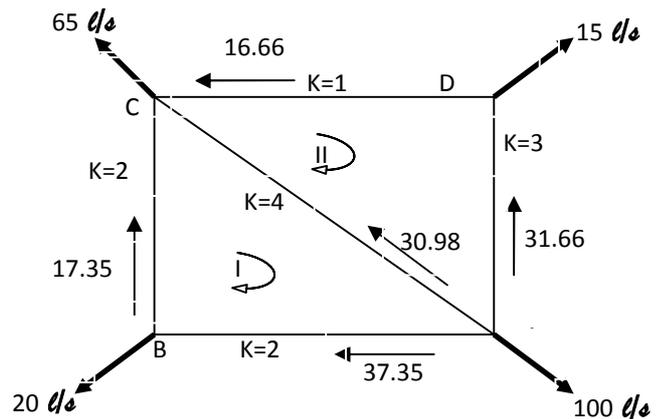
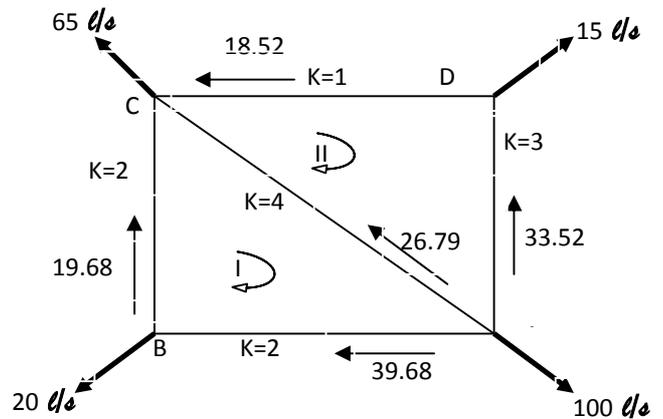
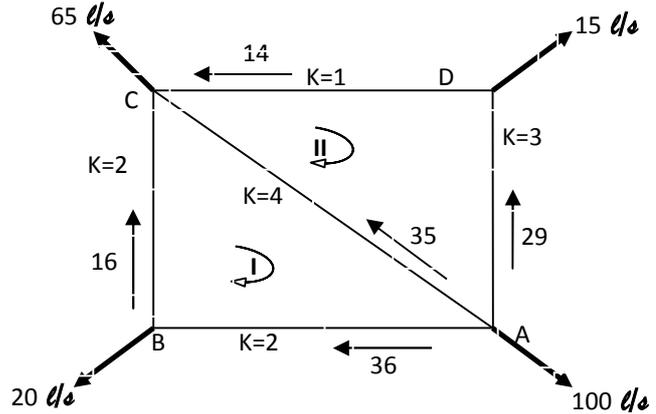
Donc l'erreur =  $\frac{\Delta q}{q_{min}} = \frac{3.68}{16.5} = 20.16\%$

2<sup>ème</sup> correction

Maille (I)	$K q^2$	$2kq$	$\Delta q$
AB	3149,00	158,72	-2,33
BC	774,60	78,72	
AC	-2870,82	-214,32	
$\Sigma.$	1052,79	451,76	

Maille (II)	$K q^2$	$2kq$	$\Delta q$
AD	-3370,77	-201,12	1,86
DC	-342,99	-37,04	
CA	2870,82	214,32	
$\Sigma.$	-842,95	452,48	

Donc l'erreur =  $\frac{\Delta q}{q_{min}} = \frac{1.86}{16.66} = 11.18\%$

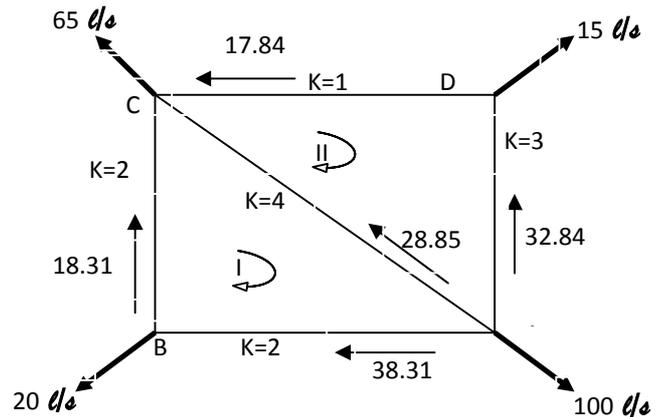


3<sup>eme</sup> correction

Maille (I)	K q <sup>2</sup>	2kq	Δq
AB	2790,05	149,4	0,96
BC	602,05	69,4	
AC	-3839,04	-247,84	
Σ.	-446,95	466,64	

Maille (II)	K q <sup>2</sup>	2kq	Δq
AD	-3007,07	-189,96	-1,18
DC	-277,56	-33,32	
CA	3839,04	247,84	
Σ.	554,42	471,12	

Donc l'erreur =  $\frac{\Delta q}{q_{min}} = \frac{0,96}{17,84} = 6.6\%$

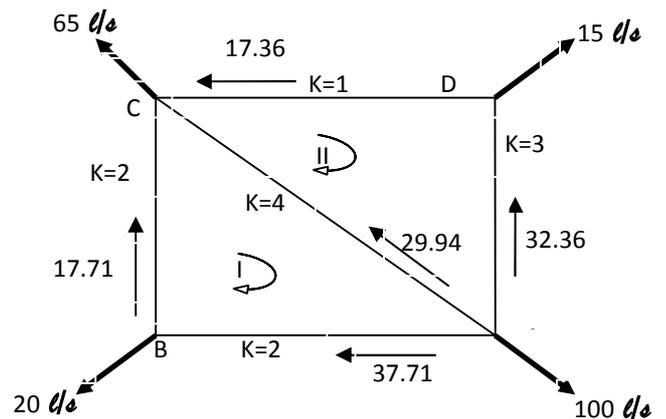


4<sup>eme</sup> correction

Maille (I)	K q <sup>2</sup>	2kq	Δq
AB	2935,31	153,24	-0,6
BC	670,51	73,24	
AC	-3329,29	-230,8	
Σ.	276,53	457,28	

Maille (II)	K q <sup>2</sup>	2kq	Δq
AD	-3235,40	-197,04	0,48
DC	-318,27	-35,68	
CA	3329,29	230,8	
Σ.	-224,37	463,52	

Donc l'erreur =  $\frac{\Delta q}{q_{min}} = \frac{0,48}{17,36} = 2.8\%$



D'après le résultat de la 4<sup>eme</sup> correction nous constatons que l'erreur est inférieure à 5%, e < 5%, on arrête les corrections est on adopte les corrections des débits finaux.

# CHAPITRE 5

## ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE ET

## HYDROLOGIE

## 5.1 Ecoulements dans les canaux ouverts

### 5.2 Introduction

L'écoulement dans un canal ouvert se produit lorsqu'un liquide, coulant par gravité, n'est que partiellement contenu dans sa limite solide. Dans l'écoulement en canaux ouverts (figure 5.1), le liquide qui s'écoule à une surface libre et n'a d'autres pressions que celle qui est créée par son propre poids et la pression atmosphérique.

P : périmètre mouillé

h : tirant d'eau

S : surface mouillée

$$D_h = \frac{S}{P} [m] : \text{Diamètre hydraulique}$$

$$R_h = \frac{S}{P} [m] : \text{Rayon hydraulique}$$

$$I = \frac{\Delta H}{L} [\%] : \text{Pente}$$

$$B = \frac{dS}{dh} [m] : \text{Largeur au miroir}$$

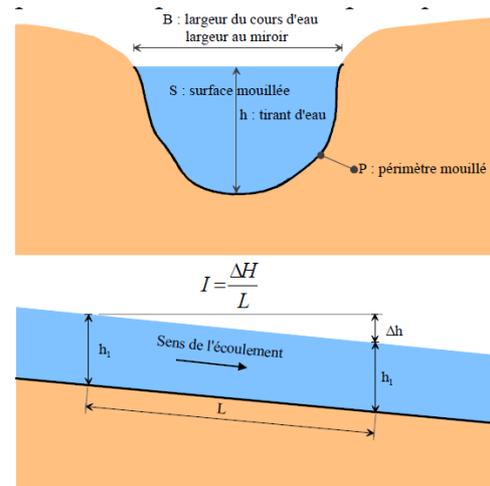


Figure 5.1 : Ecoulement dans un canal ouvert

Supposons un canal à section constante, à pente constante et avec une hauteur h et un débit constant  $Q_v$ . Créons une perturbation grâce à une vanne que l'on ferme et que l'on ouvre très rapidement (figure 5.2).

Au niveau de la surface libre, il se crée deux ondes (ondes de gravité) :

- 1) l'une se propage toujours vers l'aval ;
- 2) l'autre se propage vers l'amont si la vitesse dans le canal est inférieure à la vitesse de l'onde de gravité ; elle s'oriente vers l'aval dans le cas contraire.

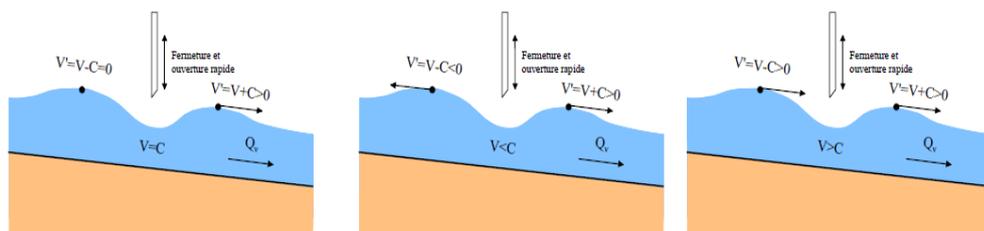


Figure 5.2 : Création de perturbations dans un canal ouvert

Dans le cas où la vitesse du fluide est supérieure à la vitesse de l'onde c, l'amont n'est pas influencé par les conditions hydrauliques à l'aval (régime torrentiel) ; alors que, dans le cas

contraire, on a une remontée de l'onde qui va perturber l'amont (régime fluvial), ce phénomène est appelé influence aval.

La célérité de l'onde de gravité est donnée par la relation :  $C^2 = g \cdot D_h$

Le nombre de Froude a été défini pour caractériser l'écoulement d'un fluide ainsi que son pilotage.

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{g \cdot D_h}} \quad \text{avec } v : \text{vitesse d'écoulement.}$$

Pour un nombre de Froude  $F_r$  inférieur à 1, l'écoulement est dit de type Fluvial, sinon, il est dit torrentiel. Dans le cas d'un écoulement fluvial, c'est l'aval qui pilote l'écoulement.

Dans le cas d'un écoulement torrentiel, c'est l'amont qui pilote l'écoulement. Au nombre de Froude égale à 1 correspond un tirant d'eau particulier  $h_c$  appelé hauteur critique.

### 5.3 Profil des vitesses et des vitesses limites

#### *Répartition des vitesses dans une section transversale*

Avec la viscosité, la distribution des vitesses dans une section droite d'un canal n'est pas uniforme. Comme dans les canalisations elle est faible au voisinage des parois puis elle augmente en s'éloignant de la paroi jusqu'à un maximum. Ensuite elle diminue car il existe une force de frottement au contact de l'atmosphère et donc l'air se trouve entraîné par l'eau. On voit ci contre les courbes d'iso vitesse dans une section de forme régulière.

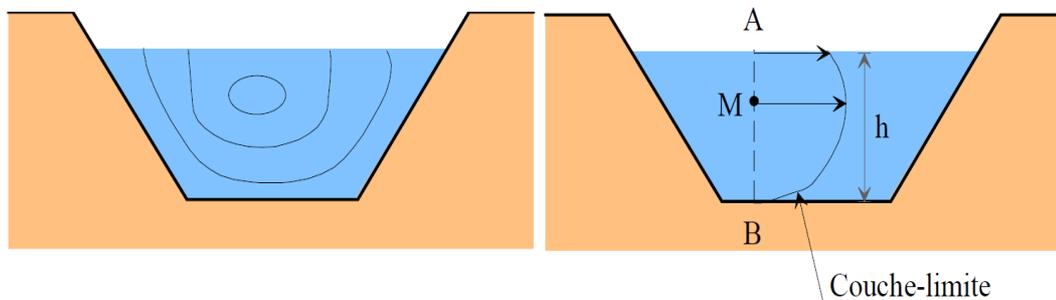


Figure 5.3 : distribution des vitesses dans une section droite d'un canal

### 5.4 Écoulement uniforme et permanent

#### *Pertes de charge évaluées par Manning-Strickler*

L'équation de Chézy nous donne :

$$V_m = C \cdot \sqrt{I \cdot R_h}$$

$C$  ; Chézy selon résistance de coefficient

$I$  : Charge de ligne la de pente

Plusieurs formules empiriques permettent de calculer le coefficient  $C$ . La plus connue est celle de Manning-Strickler :

$$C = K_s \cdot R^{\frac{1}{6}}$$

Cette équation n'est valable que pour des écoulements turbulents dans un domaine rugueux, ce qui correspond à  $40 \leq K_s \leq 80$ . Nous en déduisons alors le débit moyen à travers la section par la relation :

$$Q_v = K_s \cdot S \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{I}$$

Tableau 5.1 : Quelques valeurs de  $K_s$  données à titre d'exemple :

Caractéristique des chenaux	$K_s$	$n = \frac{l}{K_s}$
Planche avec joints mal soignés, grès	80	0,0125
Béton avec de nombreux joints	75	0,0134
Maçonnerie ordinaire	70	0,0142
Béton vieux et très rugueux, terre	60	0,0167
Rivière en lit rocheux	40 à 50	0,0225

A partir de l'équation de Manning, nous avons :  $Q_v = K_s \cdot S \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{I}$

$$I = \frac{h_l}{L}$$

$h_l$  : Perte de charge en [mCE]

$L$  : longueur du chenal en [m]

$$\left( \frac{V_m}{K_s \cdot R_h^{\frac{2}{3}}} \right)^2 \cdot l = h_l$$

### 5.4.1 La profondeur normale $h_n$

Une fois fixée la nature de la paroi et la pente, nous disposons, en régime permanent et uniforme, d'une relation reliant la profondeur  $h$  au débit  $Q$  :

$$\frac{Q_v}{\sqrt{I}} = K_s \cdot S \cdot R_h^{\frac{2}{3}}$$

Cette équation nous permet de relier le tirant d'eau  $h$  à un régime donné permanent et uniforme que nous appellerons profondeur normale  $h_n$  (figure 5.4):

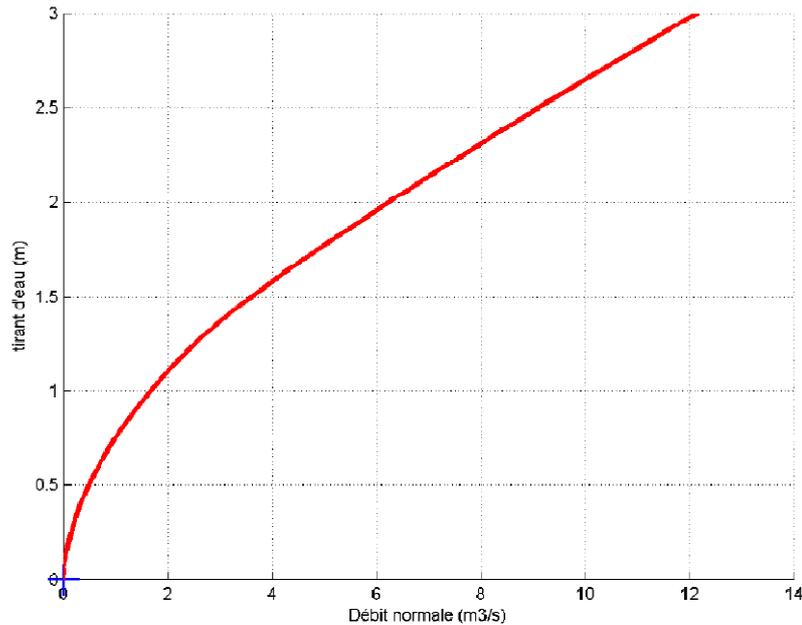


Figure 5.4: distribution des vitesses dans une section droite d'un canal

Dans les sections évasées, le débit croît toujours lorsque la profondeur de l'eau augmente. Par contre, il n'en est pas de même pour les sections voûtées, puisque dans la partie supérieure de ces dernières, le périmètre mouillé croît plus rapidement que la superficie, ce qui entraîne une diminution du diamètre hydraulique et en conséquence du débit.

## 5.5 Les déversoirs

Un déversoir est une brèche dans l'enceinte d'un réservoir par laquelle s'écoule la tranche supérieure de l'eau qu'il contient.

Quel que soit le déversoir, on peut trouver son débit par la formule :

$$Q_v = m \cdot l \cdot h \cdot \sqrt{2gh}$$

$m$  : coefficient de débit fonction du (type de réservoir)

$l$  : longueur de déversoir [m].

$h$  : hauteur d'eau au dessus du seuil [m].

### 5.5.1 Déversoir à paroi mince

On remarque que quand la nappe d'eau est libre (on doit faire les mesures dans ce cas) on a une aération de la nappe juste en aval du déversoir (figure 5.5).

Dans tous les cas de déversoirs on remarquera que le niveau d'eau au dessus du déversoir et un peu en amont est inférieur au niveau amont lointain. Dans ce cas de figure, nous avons, d'après l'expérimentation de Bazin :

$$m = \left( 0.405 + \frac{0.003}{h} \right) \left[ 1 + 0.05 \left( \frac{h}{p+h} \right)^2 \right]$$

En première approximation nous pouvons prendre :  $0,40 < m < 0,50$ .

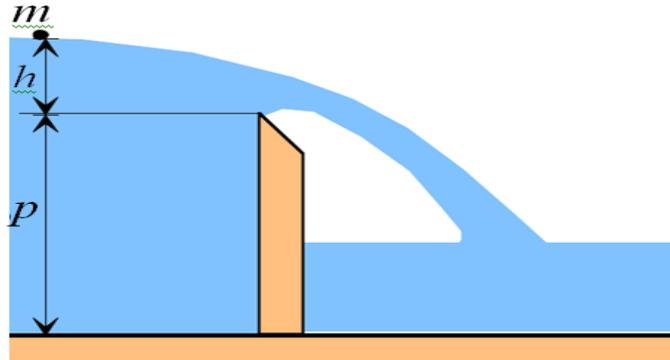


Figure 5.5: Déversoir à paroi mince

### 5.5.2 Déversoir à paroi mince avec contraction latérale

On remarque sur la figure 5.6 , que le fait d'avoir une contraction latérale diminue plus que de la valeur de la contraction la section de passage du fluide.

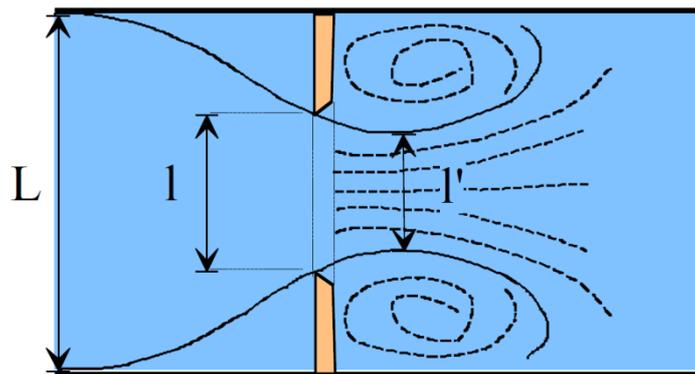


Figure 5.6: Vue en plan du déversoir

Dans ce cas de figure, nous avons, d'après l'expérimentation de Hégly :

$$m = \left( 0.405 - 0.003 \frac{L-1}{L} + \frac{0.0027}{h} \right) \left[ 1 + 0.05 \left( \frac{l}{L} \right)^2 \left( \frac{h}{p+h} \right)^2 \right]$$

En première approximation on peut prendre  $m \approx 0.4$

### 5.5.3 Déversoir à paroi mince triangulaire

La vitesse d'écoulement de l'eau dans la tranche d'eau de largeur  $x$  et de hauteur  $dz$  située à une profondeur  $z$  sous le niveau de l'eau est :

$$v = \sqrt{2gz} \quad (\text{Figure 5.7}).$$

D'après Thalès, nous avons la relation :

$$\frac{x}{l} = \frac{h-z}{h} \rightarrow x = l \cdot \frac{h-z}{h}$$

Soit  $\mu$  le coefficient de débit :

$$dQ_v = \mu \cdot x dz \cdot \sqrt{2gz} \Rightarrow dQ_v = \mu \cdot l \cdot \frac{h-z}{h} dz \cdot \sqrt{2gz}$$

$$Q_v = \int_0^h dQ_v = \int_0^h \mu \cdot l \cdot \frac{h-z}{h} dz \cdot \sqrt{2gz} = \frac{\mu \cdot l}{h} \sqrt{2g} \cdot \int_0^h (h-z) dz \cdot \sqrt{z}$$

$$Q_v = \frac{\mu \cdot l}{h} \sqrt{2g} \cdot \int_0^h (h\sqrt{z} - z^{\frac{3}{2}}) dz = \frac{\mu \cdot l}{h} \sqrt{2g} \cdot \left[ \frac{2}{3} h z^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} \right]_0^h = \frac{\mu \cdot l}{h} \sqrt{2g} \left( \frac{2}{3} h^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} \right)$$

Dans le cas du triangle il sera plus pratique de travailler avec l'angle  $\alpha$  qu'avec la longueur  $l$  puisqu'elle varie en fonction du niveau d'eau. Dans le triangle rectangle on a

$$\frac{\alpha}{2}, \frac{l}{2}, h \text{ et on a la relation } \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{l/2}{h} = \frac{l}{2h} \text{ ce qui nous donne } l = 2 \cdot h \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$Q_v = \frac{8}{15} \mu \cdot h^2 \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{2gh}$$

Dans ce cas de figure, nous avons, d'après l'expérimentation de Heyndrickx :

$$\mu = (0.5775 + 0.214h^{-1.25}) \left[ 1 + \frac{h^2}{l^2 \cdot (h+z)^2} \right] \quad \text{Avec } h, l \text{ et } z \text{ en (cm)}$$

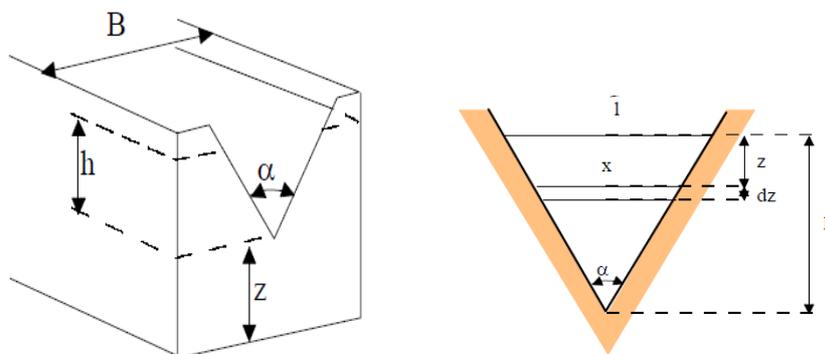


Figure 5.7: déversoir à paroi mince triangulaire

### 5.5.4 Déversoir à seuil épais

Ecrivons Bernoulli de M à M' :

$$\frac{P_M}{\rho g} + \frac{1}{2g} V_M^2 + h = \frac{P_{M'}}{\rho g} + \frac{1}{2g} V_{M'}^2 + h$$

Nous pouvons effectuer les hypothèses suivantes :

- la vitesse en M est négligeable devant la vitesse en M' ;
- les pressions  $P_M$  et  $P_{M'}$  sont égales.

$$v_{M'} = \sqrt{2g(h - h')}$$

Et le débit ;

$$Q_v = l \cdot h \cdot \sqrt{2g(h - h')}$$

La fonction s'annule pour  $h' = 0$  et  $h' = h$ . Elle présente donc un maximum pour une valeur de  $h'$  comprise entre 0 et  $h$ .

Dérivons cette fonction par rapport à  $h'$  pour trouver ce maximum.

Posons  $u = (h - h')$ , donc  $u' = -1$

On peut écrire :

$$Q_v = l \cdot h \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{(h - h')}$$

$$\frac{dQ_v}{dh'} = l \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{(h - h')} - 1 \cdot h \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{1}{2\sqrt{(h - h')}} = 1 \cdot \sqrt{2g} \cdot \left( \sqrt{(h - h')} - \frac{h'}{2\sqrt{(h - h')}} \right)$$

$$\frac{dQ_v}{dh'} = 0 \text{ pour } \sqrt{(h - h')} - \frac{1}{2\sqrt{(h - h')}} = 0 \text{ soit } 2(h - h') - h' = 0$$

$$\text{Avec } h' = \frac{2h}{3} \text{ donc } Q_v = l \cdot \frac{2}{3} h \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\left(h - \frac{2}{3}h\right)}$$

$$Q_v = \frac{2}{3\sqrt{3}} h \cdot l \cdot \sqrt{2g \cdot h} \Rightarrow$$

$$Q_v = 0.385 \cdot l \cdot h \cdot \sqrt{2gh}$$

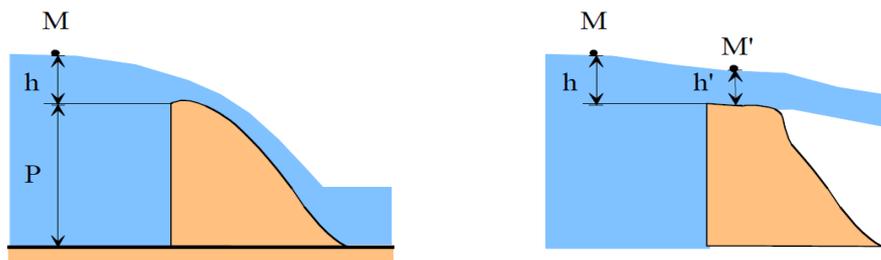


Figure 5.8: déversoir à seuil épais

## BIBLIOGRAPHIE

Mécanique des fluides et hydraulique (cours et exercices) série schaum.

LENCASTRE. A(1966): Hydraulique générale, édition: Eyrolles

CARLIER. M (1972) : Hydraulique générale appliquées, Paris, France, édition: Eyrolles

COMOLET R. (1985) : Mécanique Expérimentale des Fluides. Tome II : Dynamique des Fluides Réels, Turbomachines. Paris, F. Edition. Masson.

GRAF W. & ALTINAKAR M.S. (1998) : Hydrodynamique. Volume 14.

FOCH A. (1932) : introduction à la mécanique des fluides.