UNIVERSITÉ ABDERAHMANE MIRA BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique
TD_2-Analyse 4

Exercice 1. Etudier la nature des intégrales impropres suivantes en se servant du critère de la primitive :

$$1. \int_2^{+\infty} \frac{dt}{tlnt}; 2. \int_1^2 \frac{dt}{t\ln t}; 3. \int_1^{+\infty} \frac{dt}{tlnt}; 4. \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}; 5. \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, 6. \int_0^{+\infty} \sin t dt;$$

$$7. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}; 8. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}, 10. \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^2}, 11. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^2}, 12. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)}$$

Exercice 2. Etudier la nature des intégrales suivantes

$$1. \int_0^1 \frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t^2} dt; 2. \int_0^{+\infty} \sin e^t dt; 3. \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\cos t} dt, 4. \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt, 5. \int_0^{+\infty} \cos t^2 dt.$$

Exercice 3. Soit l'intégrale impropre suivante :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^p}, p \in \mathbb{R}$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre réel p est elle convergente.
2. Pour quelles valeurs du paramètre réel p est elle absolument convergente. Conclure.

Exercice 4. 1. Démontrer que les deux intégrales sont de même nature

$$I_1 = \int_0^\infty \sin t^2 dt; I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

2. Démontrer l'inégalité suivante

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \leq \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

3. En déduire la non convergence absolue de I_2, puis démontrer sa convergence simple. ?

Solution

ExO.1. Etudier la nature des intégrales impropres suivantes en se servant du critère de la primitive :

1.
$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t}$$

Par définition, on a

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t} = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{\frac{1}{t}}{\ln t} dt = \lim_{x\to+\infty} [\ln(\ln t)]_2^x = \lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) = +\infty$$

Ce qui veut dire que l'intégrale impropre

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{tlnt}$$

diverge.

2.
$$\int_1^2 \frac{dt}{t\ln t}$$
$$\int_1^2 \frac{dt}{tlnt} = \lim_{x\to 1}\int_x^2 \frac{\frac{1}{t}}{lnt}dt = \lim_{x\to 1}[\ln(\ln t)]_x^2 = \lim_{x\to 1}\ln(\ln x) - \ln(\ln 2) = -\infty$$
donc l'intégrale impropre
$$\int_1^2 \frac{dt}{t\ln t}$$
diverge.

3.
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t}$$
Par définition, cette intégrale converge si et seulement si les deux intégrales
$$\int_1^c \frac{dt}{t\ln t} \text{ et } \int_c^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t}$$
converge pour tout $c \in]1,+\infty[$.
Puisque pour $c = 2$ l'intégrale
$$\int_1^2 \frac{dt}{t\ln t}$$
diverge, alors l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t}$$
diverge.

4.
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}]_1^x \text{ si } \alpha \neq 1; \\ \lim_{x\to+\infty} \ln t]_1^x \text{ si } \alpha = 1. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)}(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-1}} - 1) \text{ si } \alpha \neq 1; \\ +\infty \text{ si } \alpha = 1. \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \text{ si } \alpha > 1; \\ +\infty \text{ si } \alpha \leq 1. \end{cases}$$
Par conséquent l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$
converge si et seulement si $\alpha > 1$ et sa valeur est : $\frac{1}{1-\alpha}$.

5.
$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}]_1^x \text{ si } \alpha \neq 1; \\ \lim_{x\to 0} \ln t]_1^x \text{ si } \alpha = 1. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)}(1 - \lim_{x\to 0} \frac{1}{t^{\alpha-1}}) \text{ si } \alpha \neq 1; \\ -\infty \text{ si } \alpha = 1. \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \text{ si } \alpha < 1; \\ -\infty \text{ si } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Par conséquent l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

converge vers $\dfrac{1}{1-\alpha}$ si et seulement si $\alpha < 1$

6.

$$\int_0^{+\infty} \sin t dt$$

$$\int_0^{+\infty} \sin t dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \sin t dt = \lim_{x \to +\infty} [\cos t]_0^x = \lim_{x \to +\infty} \cos x - cos 0$$

cette limite n'existe pas, donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sin t dt$$

diverge

7.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \to +\infty} [\arctan t]_0^x = \lim_{x \to +\infty} \arctan x - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$$

8.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

Cette intégrale converge si et seulement si les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

convergent
On vient de voir que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

converge.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \to -\infty} [\arctan t]_x^0 = \arctan 0 - \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

9.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x (1 - \frac{1}{1+t^2}) dt = \lim_{x \to +\infty} [t - \arctan t]_0^x = +\infty$$

10.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^2}$$

11.
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)}$$
Ici, nous avons deux points singuliers : 0 et $+\infty$. Posons

12.
$$I_1 = \int_0^1 \frac{1dt}{t(1+t)} \text{ et } I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1dt}{t(1+t)}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t(1+t)}dt = \lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{1}{t(1+t)}dt = \lim_{x\to 0}[\ln \frac{t}{t+1}]_x^1 = \ln\frac{1}{2} - \lim_{x\to 0}\ln\frac{x}{x+1} = +\infty$$
donc
$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{t}$$
diverge. Par conséquent
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)}$$
diverge

Exo.2. Étudier la nature des intégrales suivantes

1.
$$\int_0^1 \frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t^2}dt$$
On pose $x = \frac{1}{t^2} \Rightarrow t = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $dt = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}dx$

Quand t tend 0, x tend vert $+\infty$ et quand t tend vers 1, x tend vers 1. Donc
$$\int_0^1 \frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t^2}dt = \int_{+\infty}^1 \frac{-\sin x}{2x\sqrt{x}}dx = \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{2x\sqrt{x}}dx$$
On applique la règle d'Abel à l'intégrale
$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{2x\sqrt{x}}dx$$
On pose
$$f(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} : g(x) = \sin x$$
Il en résulte que la fonction f est décroissante car $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$ et
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ , ce qui implique la premiere condition d'Abel}$$
$$\forall y \in [1, +\infty[, |\int_1^{+\infty} \sin x dx| = |\cos y - \cos 1| \leq 2$$
Ainsi, il existe $k = 2$ tel que
$$\forall y \in [1, +\infty[, |\int_1^{y} \sin x dx| \leq 2 \text{ , ce qui implique la condition 2 d'Abel}$$
D'après la règle d'Abel l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ converge c'est à dire } \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{2x\sqrt{x}}dx \text{ converge.}$$
Par conséquent, l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}dt \text{ converge.}$$

2.
$$\int_0^{+\infty} \sin e^t dt$$

On pose $x = e^t \Rightarrow t = \phi(x) = \ln x$ et $dt = \dfrac{1}{x}dx$

Quand t tend 0, x tend vert 1 et quand t tend vert l'infinie, x tend vers l'infinie. Donc

$$\int_0^{+\infty} \sin e^t dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Et d'après la règle d'Abel, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ converge}$$

Par conséquent, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sin e^t dt \text{ converge.}$$

3.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\cos t} dt$$

On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, 2+\cos t \leq 3, \text{ donc } \frac{1}{2+\cos t} \geq \frac{1}{3}$$

Puisque

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{3} dt \text{ diverge, alors } \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\cos t} dt \text{ diverge.}$$

4.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \text{ converge si et seulement si les intégrales}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \text{ et } I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \text{ convergent.}$$

D'après la règle d'Abel, l'intégrale I_2 converge. Pour l'intégrale I_1, on

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{|\cos t|}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

et

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} = \lim_{x\to 0} 2\sqrt{t}]_x^1 = 2 \text{ converge}$$

ceci implique que l'intégrale I_1 converge absolument et donc converge. Par conséquent, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \text{ converge.}$$

5.
$$\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$$
On pose $x = t^2$, donc $t = \sqrt{x} = \varphi(x)$ et $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$
$t \to 0 \Rightarrow x \to 0$
$t \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty$
Il en résulte que φ est une bijection de classe C^1 croissante qui applique $[0, +\infty[$ à lui même. D'après le théorème de changement de variable

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{2\sqrt{x}} \text{ qui converge d'après Abel.}$$

Exo.3.Soit l'intégrale impropre suivante :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^p}, p \in \mathbb{R}$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre réel p est elle convergente. Si $p > 0$, l'intégrale I est convergente d'après la règle d'Abel.
   Si $p \leq 0$, l'intégrale I diverge. En effet, on utilise le contraire de la règle de Cauchy :
   I diverge si et seulement si $\exists \epsilon > 1, \forall c > 1, \exists x, y \in [1, +\infty[$ tels que
   $$x > c \text{ et } y > c \text{ et } |\int_x^y \frac{\sin t}{t^p} dt| \geq \epsilon$$
   Remarquons que
   $$\sin t \geq 0 \text{ pour } t \in [2\pi n, 2\pi n + \pi], n \in \mathbb{N}; n > 0.$$
   Posons
   $$x_n = 2\pi n, y_n = 2\pi n + \pi$$
   Il vient que
   $$|\int_{x_n}^{y_n} \frac{\sin t}{t^p} dt| \geq \min\{\frac{1}{t^p}, t \in [2\pi n, 2\pi n+\pi]\} \int_{x_n}^{y_n} \sin t dt = (\frac{1}{2\pi n})^p \int_{x_n}^{y_n} \sin t dt = \frac{2}{(2\pi n)^p} \geq 2 > 0$$
   Puisque $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, alors pour $\epsilon = 2$ la négation du critère de Cauchy est établi.
2. Pour quelles valeurs du paramètre réel p est elle absolument convergente. Conclure
   · Pour $p > 1$, I converge absolument car
   $$\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t^p}| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}$$
   et puisque $p > 0$, alors $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^p}$ converge, ceci implique que $\int_1^{+\infty} |\dfrac{\sin t}{t^p}| dt$ converge, c'est à dire I converge absolument.

· Pour $0 < p \leq 1$, on a

$$\forall t, \frac{|\sin t|}{t^p} \geq \frac{\sin^2 t}{t^p} = \frac{1 - \cos 2t}{2t^p} = \frac{1}{2t^p} - \frac{\cos 2t}{2t^p}$$

On a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t^p} \text{ converge d'après la règle d'Abel}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^p} \text{ diverge car } p \leq 1$$

On en déduit que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2t}{2t^p} \text{ est divergente}$$

Par conséquent I ne converge pas absolument (c'est à dire elle est semi convergente)
Conclusion : On déduit que l'intégrale I est :

— Convergente pour $p > 0$;
— Divergente pour $p \leq 0$
— Absolument convergente pour $p > 1$;
— Semi convergente pour $0 < p \leq 1$.

Exo.4.

1. Démontrer que les deux intégrales sont de même nature

$$I_1 = \int_0^{\infty} \sin t^2 dt; I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

Dans l'intégrale I_1 posons $x = t^2$, donc $t = \sqrt{x} = \varphi(x)$ et $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx$
$t \to 0 \Rightarrow x \to 0$
$t \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty$
Il en résulte que φ est une bijection de classe C^1 croissante qui applique $[0, +\infty[$ à lui même. D'après le théorème de changement de variable ci dessus, on a

$$\int_0^{+\infty} \sin t^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} I_2.$$

Donc les deux intégrales sont de même nature.

2. Démontrer l'inégalité suivante

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \leq \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

On a

$$\sin t \geq 0 \text{ pour } t \in [2k\pi, (2k+1)\pi]; k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Donc } \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \text{ est positive sur } [2k\pi, (2k+1)\pi]$$

Il vient que

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \geq \Big(\min_{[2k\pi,(2k+1)\pi]} \frac{1}{\sqrt{t}} \Big) \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin t dt = \frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin t dt \Rightarrow$$

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \geq \frac{2}{\sqrt{(2k+1)\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{2k+1}} > 0$$