

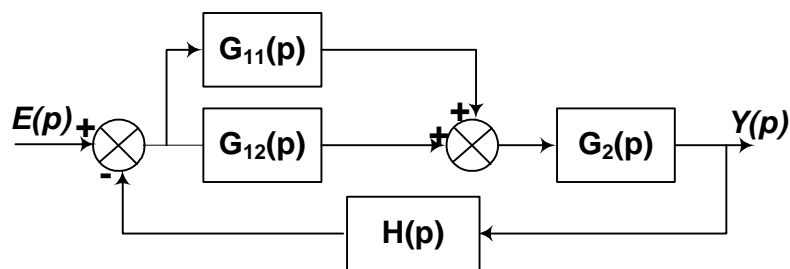
Républiques Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de BEJAIA
Faculté de Technologie



Département de Génie Electrique

Systèmes Linéaires Continus

Cours et Exercices



Dr. GUENOUNOU Ouahib
Maître de Conférences classe B

Année universitaire 2013-2014

TABLE DES MATIERES

Chapitre I: Introduction aux systèmes asservis	Pages: 01-07
Chapitre II: Transformée de Laplace	Pages: 08-18
Chapitre III: Réponses temporelles des systèmes fondamentaux.....	Pages: 19-36
Chapitre IV: Analyse fréquentielle	Pages: 37-51
Chapitre V: Performances des systèmes asservis.....	Pages: 52-76
Chapitre VI: Correction.....	Pages: 77-95

I.1 Notion de système

Un système est un ensemble d'éléments liés entre eux dans le but de réaliser une tâche donnée. Ce dispositif soumis aux lois physiques est caractérisé par des grandeurs de types : entrées et sorties. Les entrées sont des grandeurs de commande du système ou encore des signaux de parasites appelés *perturbations*. Les sorties caractérisent l'état du système.

Exemple 1 : Four à combustible

Entrée de commande : débit de combustible, *Entrée de perturbation* : déperdition de chaleur, *Sortie* : température à l'intérieur du four.

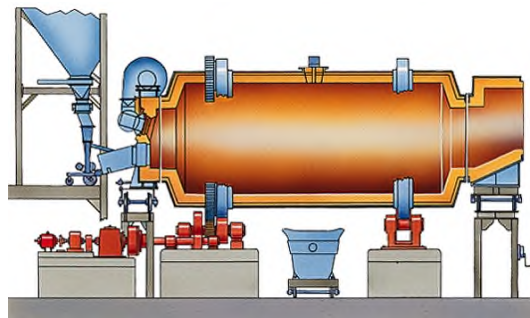


Figure I.1 : Four à combustible

Exemple 2 : Circuit RC

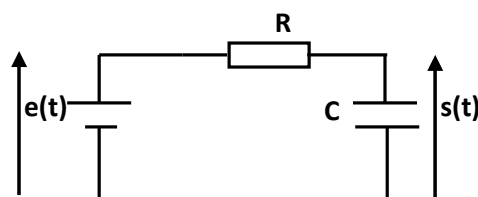


Figure I.2 : Circuit RC

La tension $e(t)$ représente le signal d'entrée et la tension $s(t)$ aux bornes du condensateur C représente le signal de sortie. La relation entre le signal $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$ peut être décrite par l'équation différentielle suivante :

$$e(t) = RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) \quad (\text{I. 1})$$

La figure I.3 montre la représentation d'un système à plusieurs entrées et sorties.

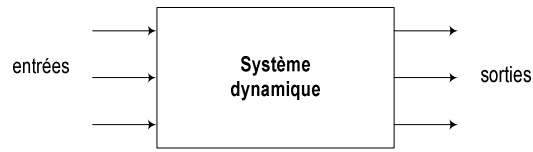


Figure I.3 : Système Dynamique

Les entrées et les sorties sont en générale multiples (systèmes multi-variable ou en anglais système MIMO, Multi Inputs Multi Outputs). Lorsqu'il n'y a qu'une entrée de commande et une sortie, le système est dit mono-variable ou en anglais système SISO (Single input single output). Dans ce qui suit nous allons considérer uniquement les systèmes mono-variables.

I.1.1 Nature des signaux d'entrée

Les signaux d'entrée sont des fonctions du temps. Ils seront dits aléatoires ou déterministes selon que le hasard intervient ou non dans leur génération. On s'intéressera dans la suite qu'aux signaux déterministes causaux, c'est-à-dire nuls pour $t < 0$.

Les signaux les plus utilisés dans l'étude des systèmes asservis sont :

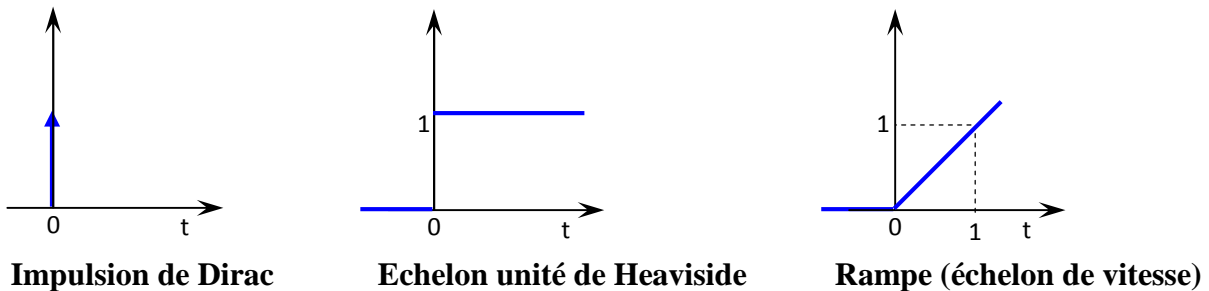


Figure I.4 : Signaux d'entrée les plus utilisés en Automatique

I.2 Système automatique

Un « *système automatique* » est un système capable d'effectuer une ou plusieurs opérations sans l'intervention de l'homme.

Exemples :

- Machines à laver automatique ;
- Pilotage automatique d'avion.

Les systèmes automatiques permettent de :

- Réaliser les opérations trop complexes pénibles ou délicates et ne pouvant être confiées à l'homme.
- Substituer la machine à l'homme dans les opérations trop répétitives ou dénuées d'intérêt.

Notons que ces systèmes copient le plus souvent le comportement de l'homme dans les trois phases essentielles de son travail :

- 1^{ère} phase : observation ;
- 2^{ème} phase : réflexion ;
- 3^{ème} phase : action.

Puis retour à la première phase.

Exemple :

Remplir une cuve à une hauteur donnée d'eau

Les trois phases sont alors :

- Observation du niveau d'eau actuel dans la cuve
- Comparaison avec le niveau souhaité
- Action sur le robinet (ouverture, fermeture)

Puis **retour** à la phase d'observation.

Ce **retour** constitue l'une des notions fondamentales de l'automatique. On dit encore que l'on réalise un **bouclage** (feedback en anglais).

I.2.1 Définition du bouclage

Un bouclage apparait chaque fois qu'an cours d'une opération, un système prend en compte de l'observation et de son état pour le modifier.

Exemple de systèmes bouclés :

- Bicyclette+cycliste réalisant l'opération de conduite sur route (système non automatique)
- Régulation de la température d'un fer à repasser (système automatique).

I.3 Régulations et asservissements

Parmi les systèmes automatiques on distingue :

- **Les systèmes programmés et séquentiels** où l'automatisation porte sur un nombre fini d'opérations prédéterminées dans leur déroulement.
Exemples : machine à laver, ascenseur, etc.
- **Les systèmes asservis**, où tous les cas possibles n'étant pas prévisibles, le déroulement d'une opération ne peut être connu à l'avance (présence de perturbations, ..., etc). Les systèmes asservis sont nécessairement bouclés.
Exemple : Antenne de radar asservie à la poursuite d'un avion.

Parmi les systèmes asservis on distingue : Les régulations et les asservissements

I.3.1 Régulation

On parle de régulation, lorsque la tâche à réaliser consiste à maintenir une ou plusieurs grandeurs physiques à des valeurs fixes.

Exemples : *Régulation* de température d'un four.

Régulation de la vitesse d'un moteur électrique.

1.3.2 Asservissements lorsque la tâche à réaliser consiste à suivre une loi non fixée à l'avance à une ou plusieurs grandeurs physiques.

Exemple : Direction asservie d'un engin

I.4 Structure d'un système asservi

Un système asservi est un système bouclé.

La structure générale est alors la suivante :

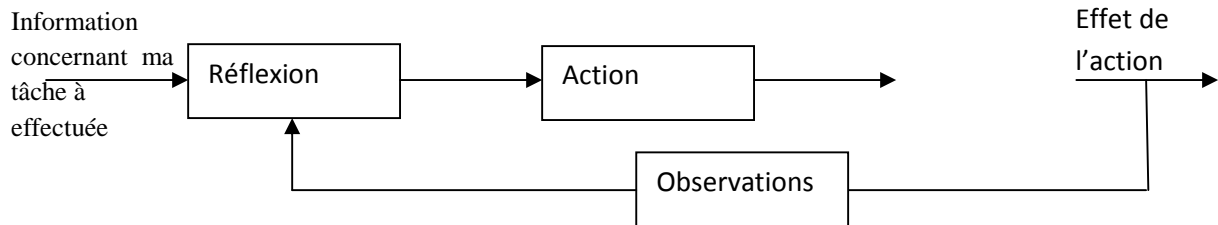


Figure I.5 : Structure d'un système asservi

Exemple :

Régulation automatique du niveau d'eau dans une cuve à fuite.

L'ouverture ou la fermeture de la vanne est commandée par la position relative du flotteur.

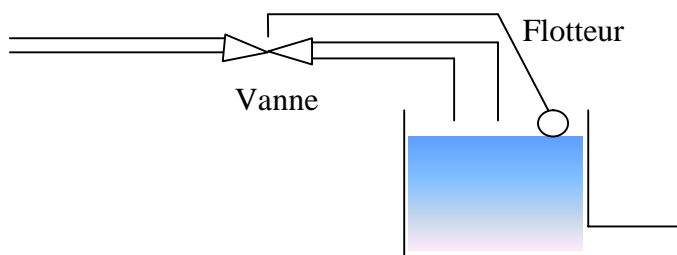


Figure I.6 : Exemple de régulation

Le fonctionnement de cette régulation peut être décrit par le schéma général ci-dessous :

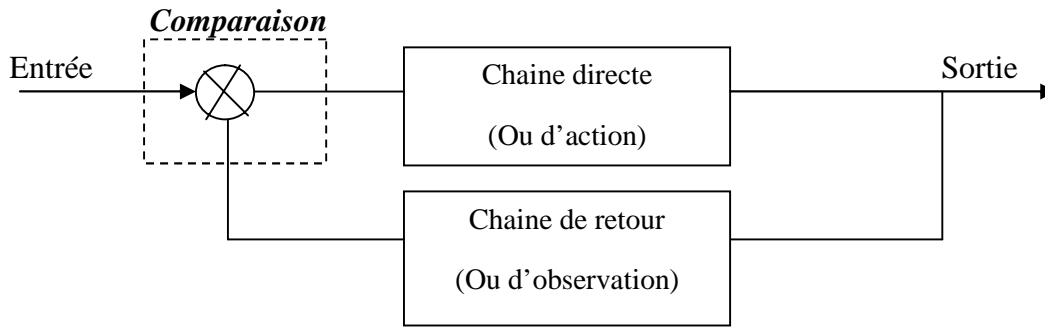


Figure I.7 : Schéma bloc d'un système bouclé

L'entrée représente le niveau d'eau désiré. La sortie est le niveau d'eau réel. L'action se fait après comparaison des deux niveaux, désiré et réel.

On représente habituellement ce schéma appelé schéma fonctionnel ou schéma bloc de la manière suivante :

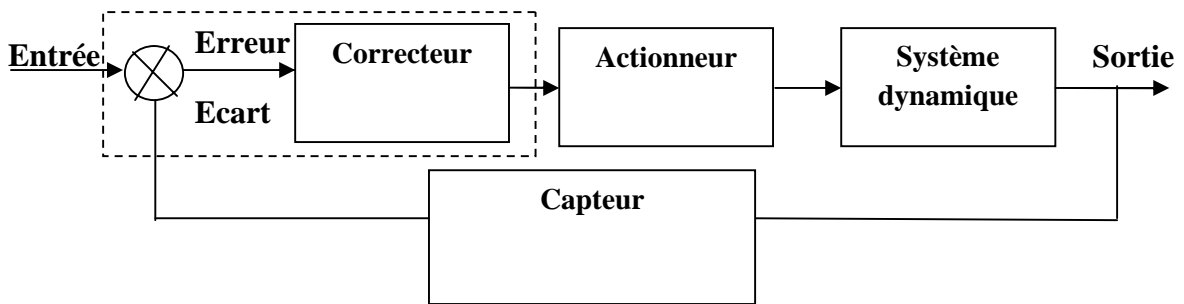


Figure I.8 : Schéma bloc détaillé d'un système bouclé

1. **Le correcteur** élabore l'ordre de commande à partir du signal d'erreur ε : c'est l'organe "intelligent".
2. **L'actionneur** ou organe d'action apporte en général, la puissance nécessaire à la réalisation de la tâche : c'est l'organe de puissance.
3. **Le système dynamique** évolue selon l'action suivant des lois physiques qui lui sont propres. La sortie est, en générale, une grandeur de sortie physique qui caractérise la tâche à réaliser. De plus cette sortie peut fluctuer en fonctions des perturbations extérieures, en général, imprévisible.
Ex : four dont la température est fonction de la consommation en combustible et de déperdition de chaleur.
4. **Le capteur** délivre à partir de la sortie une grandeur caractérisant l'observation. La principale qualité est la précision dont dépendra la précision du système globale.

Remarque : le signal ε (écart ou erreur) caractérise la qualité de fonctionnement d'un système asservi. On vise à obtenir un écart nul ou faible.

I.5. Concepts utiles à l'étude des systèmes dynamique

Dans l'analyse des systèmes asservis, nous distinguerons l'aspect statique et l'aspect dynamique :

- a) **L'aspect statique** concerne l'étude des systèmes asservis en régulation (entrée fixe). On définit **l'erreur statique** comme la différence entre la tâche demandée et la tâche réalisée.
Au cours de la synthèse des systèmes asservis, on s'efforcera d'annuler cette erreur statique.
- b) **L'aspect dynamique**, essentiel en automatique, s'étudie par les notions de précision dynamique, de rapidité et de stabilité.

b.1) La précision dynamique est caractérisée par l'erreur avec laquelle la sortie suit la loi d'entrée imposée au système

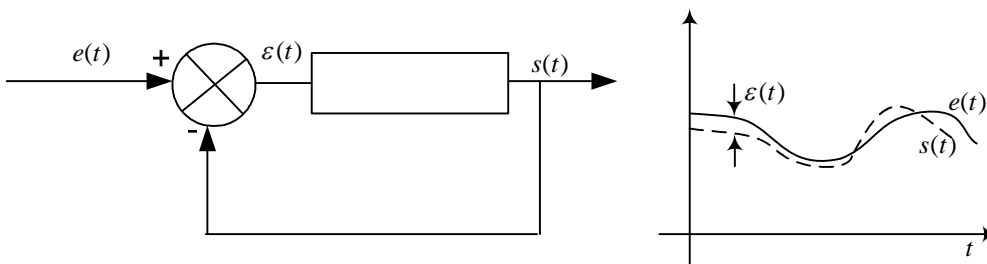


Figure I.9 : Précision dynamique

b.2) La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (*temps de réponse !!*). Cette notion est fortement liée à la précision dynamique (plus un système est **rapide** plus il est **précis**).

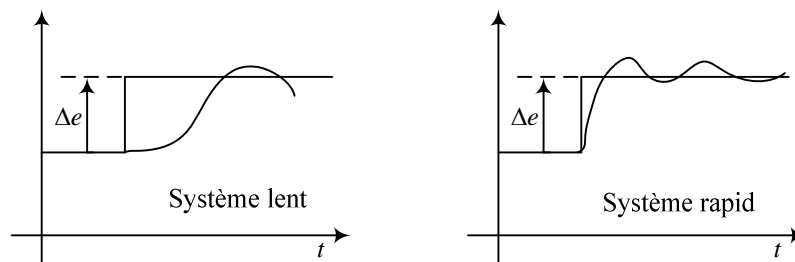


Figure I.10 : Rapidité

b.2) La stabilité : la présence d'un bouclage risque d'introduire une divergence ou une oscillation de la sortie. Ce comportement est intolérable pour un système asservi. On s'efforce au cours de la synthèse d'éviter ce risque en définissant une "**marge**" de stabilité.

Exemple : Un système asservi présentant une marge de stabilité suffisante sera caractérisé par une réponse, à une variation brusque d'entrée (réponse indicielle), convenablement amortie.

Ces trois aspects dynamiques sont étroitement liés.

On cherche à rendre compatible la rapidité ou précision et un bon amortissement au cours de la synthèse des correcteurs.

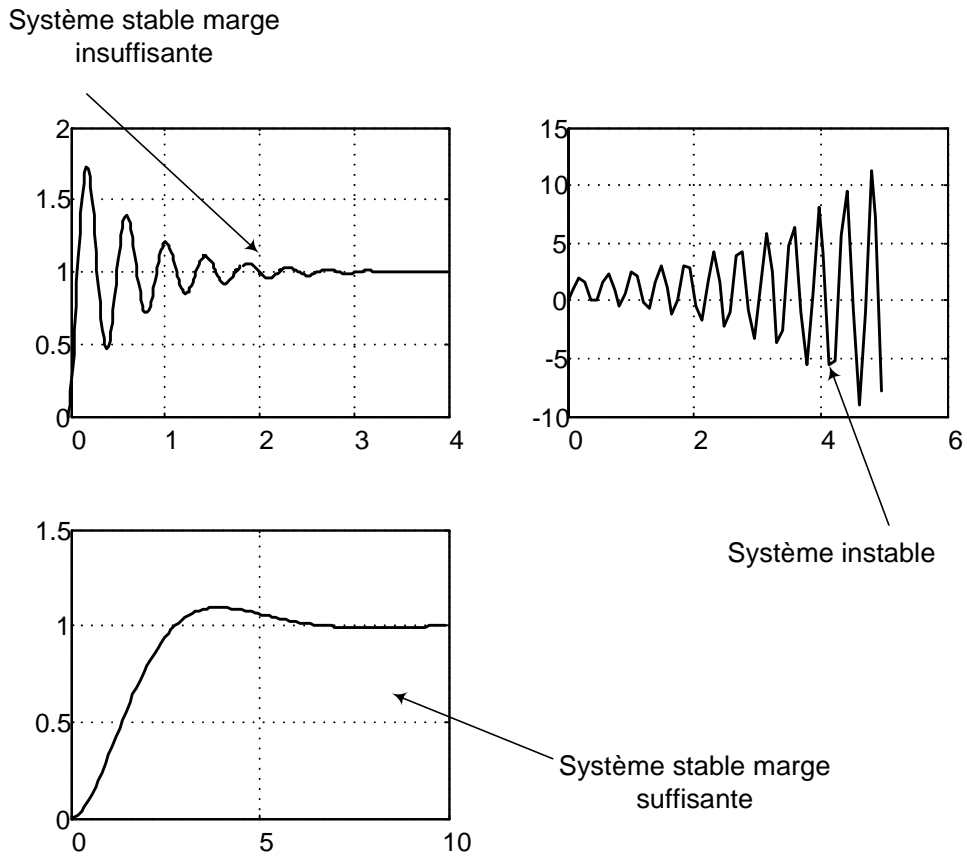


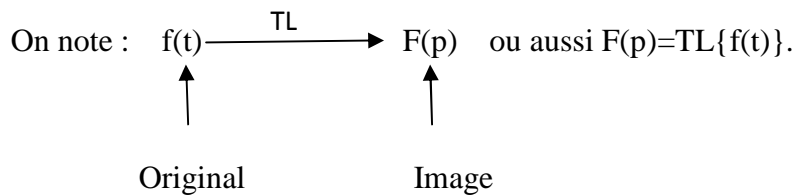
Figure I.11 : Stabilité

II.1 Transformée de Laplace

Soit $f(t)$ une fonction nulle pour $t < 0$. On appelle transformée de Laplace de $f(t)$ (si elle existe), la fonction de la variable complexe p définie :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \tag{II.1}$$

$$p = \sigma + j\omega$$



II.1.1 Condition suffisante d'existence

$F(p)$ existe en $p = \sigma + j\omega$ si $\int_0^{+\infty} |f(t)| \cdot e^{-\sigma t} dt$ existe d'où :

Si $f(t)$ est bornée dans tout intervalle fini et si pour $t \geq t_0 > 0$ on a

$$|f(t)| \leq A \cdot e^{kt} \quad A > 0, k \text{ réel}$$

alors $F(p)$ existe pour $\sigma = \text{Re}(p) > k$

On démontre qu'il existe un nombre σ_0 tel que l'intégrale soit absolument convergente pour $\sigma > \sigma_0$ et ne le soit pas pour $\sigma < \sigma_0$.

Ce nombre σ_0 s'appelle l'abscisse de convergence absolue ou abscisse de sommabilité.

II.1.2 Exemple :

- $f(t) = u(t)$: échelon unité de Heaviside :
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{II.2}$$

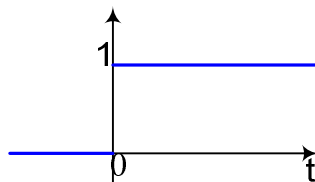


Figure II.1 : échelon

$$F(p) = \text{TL}\{f(t)\}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p}$$

$$F(p) = TL\{u(t)\} = \frac{1}{p} \quad \text{pour } Re(p) > 0$$

- $f(t) = \sin(\omega_0 t)$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \sin(\omega_0 t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(j\omega_0 - p)t} - e^{-(j\omega_0 + p)t}}{2j} dt$$

$$F(p) = \frac{1}{2j} \left[\frac{e^{(j\omega_0 - p)t}}{(j\omega_0 - p)} + \frac{e^{-(j\omega_0 + p)t}}{(j\omega_0 + p)} \right]_0^{+\infty}$$

$$F(p) = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{(p - j\omega_0)} - \frac{1}{(p + j\omega_0)} \right] = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$F(p) = TL\{\sin(\omega_0 t)\} = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \quad \text{pour } Re(p) > 0$$

II.2 Propriétés de transformée de Laplace

1. Linéarité

$$\begin{aligned} F(p) &= TL\{f(t)\} \\ G(p) &= TL\{g(t)\} \end{aligned} \Rightarrow TL\{\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)\} = \lambda \cdot F(p) + \mu \cdot G(p) \quad (\text{II. 3})$$

2. Dérivation temporelle

$$F(p) = TL\{f(t)\} \Rightarrow TL\{f'(t)\} = p \cdot F(p) - f(0) \quad (\text{II. 4})$$

Plus généralement

$$TL\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (\text{II. 5})$$

3. Intégration par rapport au temps

$$F(p) = TL\{f(t)\} \Rightarrow TL\left\{ \int_0^t f(\theta) d\theta \right\} = \frac{F(p)}{p} \quad (\text{II. 6})$$

4. Théorèmes de la valeur finale et de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p), \quad \text{Si la limite existe} \quad (\text{II. 7})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p) \quad (\text{II. 8})$$

5. Translation ($a > 0$)

$$F(p) = TL\{f(t)\} \Rightarrow TL\{e^{-at} f(t)\} = F(p + a) \quad (\text{II. 9})$$

6. Théorème du retard

Soit $f(t) = 0$ pour $t < 0$ (*fonction causale*)

$$F(p) = TL\{f(t)\} \Rightarrow TL\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau p} F(p) \quad (\text{II. 10})$$

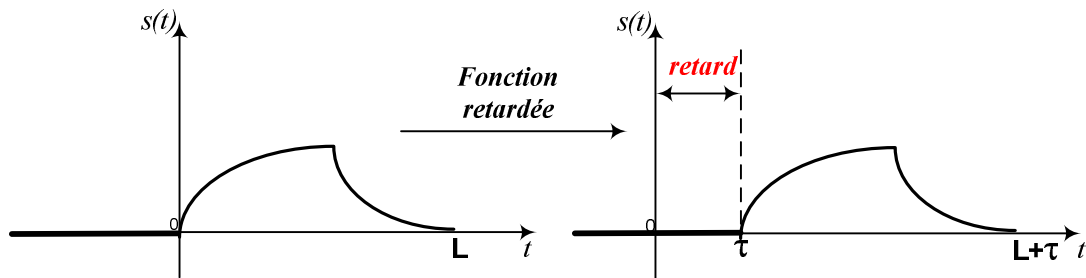


Figure II.2 : Fonction causale retardée de τ

7. Changement d'échelle des temps ($a > 0$)

$$F(p) = TL\{f(t)\} \Rightarrow TL\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = a \cdot F(a \cdot p) \quad (\text{II. 11})$$

8. Dérivation par rapport à p

$$F(p) = TL\{f(t)\} \Rightarrow TL\{-t f(t)\} = \frac{dF(p)}{dp} \quad (\text{II. 12})$$

Et plus généralement

$$TL\{(-t)^n f(t)\} = \frac{d^n F(p)}{dp^n} \quad (\text{II. 13})$$

9. Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Définition : le produit de convolution de deux fonction f et g est :

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (\text{II. 14})$$

Soit :

$$F(p) = TL\{f(t)\} \text{ et } G(p) = TL\{g(t)\}$$

Alors

$$Y(p) = TL\{f(t) * g(t)\} = F(p) \cdot G(p) \quad (\text{II. 15})$$

II.3 Transformée de Laplace inverse

Pour retrouver l'originale d'une fonction $F(p)$ donnée, on décompose cette fonction (en général, une fraction rationnelle en p) en éléments simples dont on prendra l'original dans la table de transformation.

Exemple

$$F(p) = \frac{1}{(p+2)(p+3)}$$

$$f(t) = TL^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$$

$$F(p) = \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3}$$

$$f(t) = TL^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} - TL^{-1}\left\{\frac{1}{p+3}\right\}$$

$$f(t) = \exp(-2t) + \exp(-3t) \quad t > 0$$

Question : comment décomposer en général une fonction **F(p)** !!!!

II.3.1. Méthode de décomposition

Soit une fonction F(p) de la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Chacune des valeurs de **p** qui annule soit le numérateur, soit le dénominateur, s'appelle une **racine**. Chacune des valeurs de **p** qui annule le **numérateur** est appelée un **zéro**. Chacune des valeurs de **p** qui annule le **dénominateur** est appelée un **pôle**.

L'idée consiste alors à mettre l'expression du dénominateur sous forme d'un produit de facteurs où apparaît chacune des racines :

$$D(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_k) \dots (p - p_n)$$

Ceci permettra de décomposer **F(p)** sous la forme d'une somme de fractions simples. Dans tous les cas qui vont suivre nous considérerons que **N(p)** est **d'ordre polynomial inférieur** à **D(p)**. Si ce n'est pas le cas, il faudra d'abord extraire la partie entière par division polynomiale. Puis traiter uniquement la partie fractionnaire.

Exemple :

$$F(p) = \frac{p^5 + 2p^4 + p^2}{p^3 - 3p^2 + 3p - 1}$$

$$F(p) = \underbrace{p^2 + 5p + 12}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{23p^2 - 31p + 12}{p^3 - 3p^2 + 3p - 1}}_{\text{partie fractionnaire}}$$

Cas 1 : tous les pôles **p_k** sont des **racines simples** (distinctes) :

Dans ce cas la forme décomposée de **F(p)** sera :

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1) \dots (p - p_k) \dots (p - p_n)} = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \dots + \frac{A_k}{(p - p_k)} + \dots + \frac{A_n}{(p - p_n)} \quad (\text{II. 16})$$

Chaque coefficient **A_k** est obtenu par :

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) F(p) \quad (\text{II. 17})$$

et la solution dans le domaine temporel est :

$$f(t) = A_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t) + \dots + A_k \exp(p_k t) + \dots + A_n \exp(p_n t) \quad t > 0$$

Exemple :

Soit à trouver la solution dans le domaine temporel de :

$$Y(p) = \frac{p + 1}{p^3 + p^2 - 6p}$$

1) Mettre le dénominateur sous forme de produit :

$$Y(p) = \frac{p + 1}{p^3 + p^2 - 6p} = \frac{p + 1}{p(p - 2)(p + 3)}$$

2) Mettre **F(p)** sous la forme d'une somme de fractions partielles :

$$Y(p) = \frac{p + 1}{p(p - 2)(p + 3)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p - 2} + \frac{A_3}{p + 3}$$

3) Calcule de la valeur de chaque coefficient :

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow 0} p Y(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p + 1}{(p - 2)(p + 3)} = -\frac{1}{6}$$

$$A_2 = \lim_{p \rightarrow 2} (p - 2) Y(p) = \lim_{p \rightarrow 2} \frac{p + 1}{p(p + 3)} = +\frac{3}{10}$$

$$A_3 = \lim_{p \rightarrow -3} (p + 3) Y(p) = \lim_{p \rightarrow -3} \frac{p + 1}{p(p - 2)} = -\frac{2}{15}$$

4) Exprimer la solution en **p**:

$$Y(p) = \frac{p + 1}{p(p - 2)(p + 3)} = -\frac{1}{6} \frac{1}{p} + \frac{3}{10} \frac{1}{p - 2} - \frac{2}{15} \frac{1}{p + 3}$$

5) Exprimer la solution dans le domaine temporel :

$$y(t) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10} e^{2t} - \frac{2}{15} e^{-3t}$$

pour t > 0 (à ne pas oublier)

Cas 2 : il existe un pôle **p_k** qui est une racine de multiplicité **m** :

C'est à dire que :

$$F(p) = \frac{N(p)}{\dots (p - p_k)^m \dots} = \dots + \frac{A_1}{(p - p_k)} + \frac{A_2}{(p - p_k)^2} \dots + \frac{A_i}{(p - p_k)^i} + \dots + \frac{A_n}{(p - p_k)^n} + \dots \quad (\text{II. 18})$$

Chaque coefficient A_i est obtenu par :

$$A_i = \frac{1}{(m-i)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m-i}}{dp^{m-i}} (p-p_k)^m F(p) \quad (\text{II. 19})$$

Exemple :

Soit à trouver la solution dans le domaine temporel de :

$$Y(p) = \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{p^2(p-2)(p-1)}$$

$$Y(p) = \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{p^2(p-2)(p-1)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{B}{(p-2)} + \frac{C}{(p-1)}$$

La détermination des coefficients va donner le résultat suivant :

$$A_2 = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 Y(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{(p-2)(p-1)} = 2$$

$$A_1 = \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} [p^2 Y(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left[\frac{p^3 - 4p^2 + 4}{(p-2)(p-1)} \right] = 3$$

$$B = \lim_{p \rightarrow 2} (p-2) Y(p) = \lim_{p \rightarrow 2} \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{p^2(p-1)} = -1$$

$$C = \lim_{p \rightarrow 1} (p-1) Y(p) = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{p^2(p-2)} = -1$$

$$Y(p) = \frac{p^3 - 4p^2 + 4}{p^2(p-2)(p-1)} = \frac{3}{p} + \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}$$

La solution dans le domaine temporel est alors :

$$f(t) = 3 + 2t - \exp(2t) - \exp(t), \quad t > 0$$

II.4. Systèmes Linéaires Continus et Invariants

a) Système continu

Un système est dit continu, par opposition à un système discret, lorsque les grandeurs physiques le caractérisant délivrent une information à tout instant. La plupart des systèmes physiques sont continus.

b) Système linéaire

Un système est dit **linéaire** s'il répond au principe de superposition.

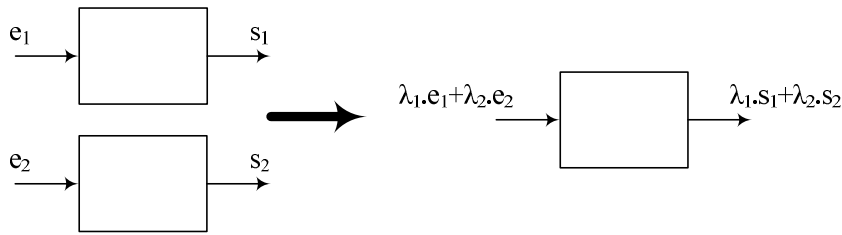


Figure II.3 : Illustration du principe de superposition

c) **Système invariant**

Un système est dit invariant s'il obéit à la loi suivante :

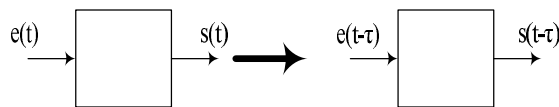
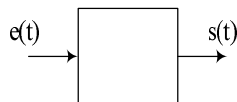


Figure II.4 : Système invariant

Un système qui ne vieillit pas est invariant !!!.

II.4 Représentation des systèmes linéaires continus et invariants

II.4.1 Représentation par équation différentielle et fonction de transfert



On représente classiquement l'évolution d'un système dynamique par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée-sortie.

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 e(t)$$

La réalisabilité physique impose d'avoir $m \leq n$. n est appelé l'ordre du système.

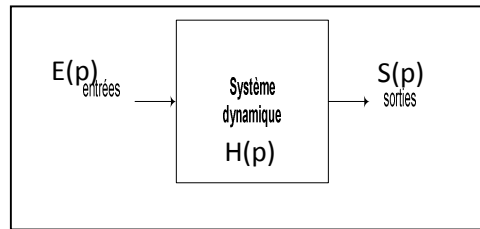
Partant de conditions initiales nulles (système au repos à l'origine), par transformée de Laplace, l'équation ci-dessus devient :

$$a_n p^n S(p) + a_{n-1} p^{n-1} S(p) + \dots + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + b_{m-1} p^{m-1} E(p) + \dots + b_0 E(p)$$

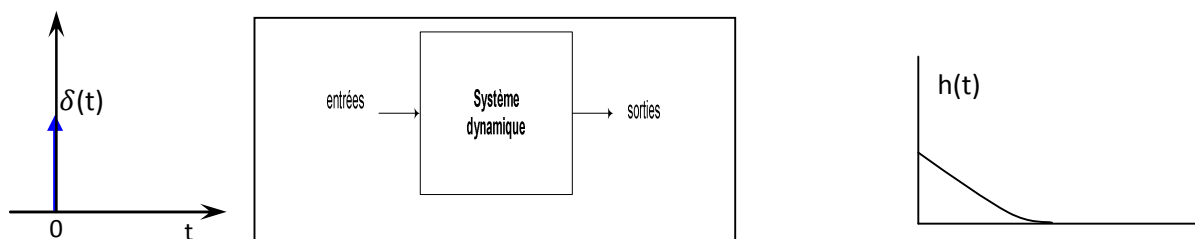
Soit encore :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = H(p) \tag{II. 20}$$

$H(p)$ est la fonction de transfert du système (transmittance), elle s'exprime par le rapport de deux polynômes en p construit à partir des coefficients de l'équation différentielle.



III.4.2 Représentation par réponse impulsionnelle



-Chaque système est caractérisé par une réponse impulsionnelle $h(t)$ qui est la réponse du système à l'impulsion.

-L'expression de la sortie $s(t)$ correspondante à une entrée $e(t)$ s'écrit :

$$s(t) = \int_0^t e(\theta)h(t - \theta)d\theta = e(t) * h(t)$$

On peut écrire aussi :

$$s(t) = \int_0^t h(\theta)e(t - \theta)d\theta = h(t) * e(t)$$

Relation entre la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle

Nous avons :

$$s(t) = \int_0^t e(\theta)h(t - \theta)d\theta = e(t) * h(t)$$

Nous avons :

Par transformée de Laplace, on obtient :

$$S(p) = E(p).TL\{h(t)\}$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = TL\{h(t)\} = H(p) \tag{II. 21}$$

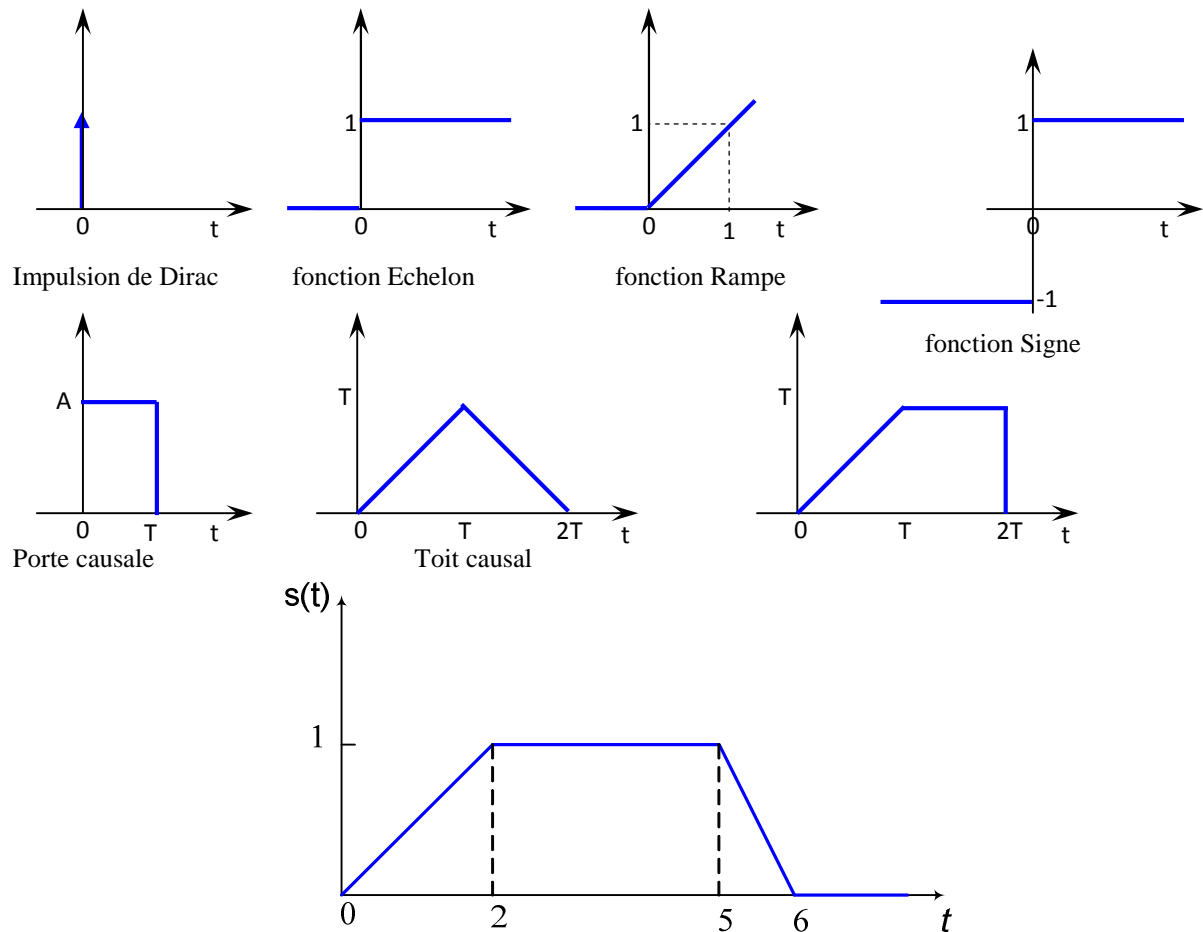
Note :

La fonction de transfert $H(p)$ d'un système est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle $h(t)$.

Exercices sur le chapitre 2

Exercice N°01

Quelles sont les transformées de Laplace des signaux suivants :



Exercice N°02

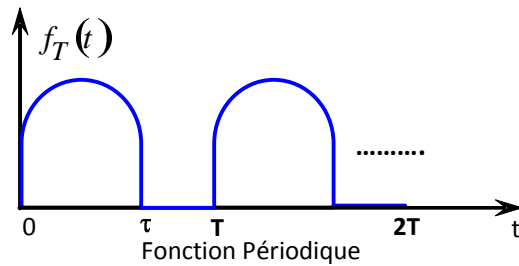
Trouver les transformées de Laplace des fonctions suivantes (à l'aide de la table).

$$f_1(t) = (t^2 + 3t - 4)u(t) \quad , \quad f_2(t) = t^3 \exp(-t) \quad , \quad f_3(t) = \sin(2t) \quad , \quad f_4(t) = \cos(t)$$

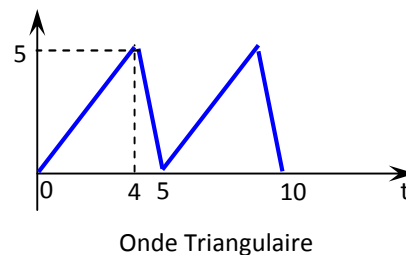
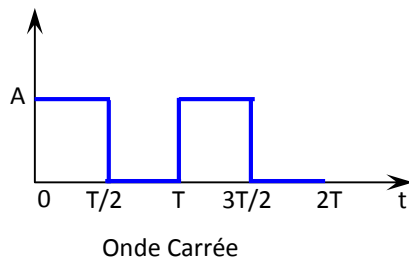
$$f_5(t) = \sin(2t) \exp(+t) \quad , \quad f_6(t) = \cos(t) \exp(3t) \quad , \quad f_7(t) = (\cos(t) * \cos(3t)) \exp(3t) .$$

Exercice N°03

Donner la transformée de Laplace d'une fonction bornée $(0, \tau)$ et périodique $(0, T)$ pour $t > 0$ (on considère $T \geq \tau$).



- Utiliser le résultat obtenu pour trouver les transformées de Laplace de fonctions périodiques suivantes :



Exercice N°04

Retrouver les originales des fonctions rationnelles en p suivantes

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2+p+1}, \quad F(p) = \frac{p}{(p-1)^2(p+1)}, \quad F(p) = \frac{6p^3}{(p-1)(p+1)(p+3)}, \quad F(p) = \frac{p}{(p-1)^2(p+1)} e^{-3p}$$

Exercice N°05

Soit un système de 2^{ème} ordre régi par l'équation différentielle suivante :

$$a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 e(t).$$

1. Donner la fonction de transfert ($Y(p)/E(p)$) du système dans le cas où le système part du repos.
2. Donner la relation qui lie $Y(p)$ et $E(p)$ le cas où le système ne partant pas du repos.

Application :

$$\ddot{y}(t) + 5 \dot{y}(t) + 6 y(t) = \sin(2t)$$

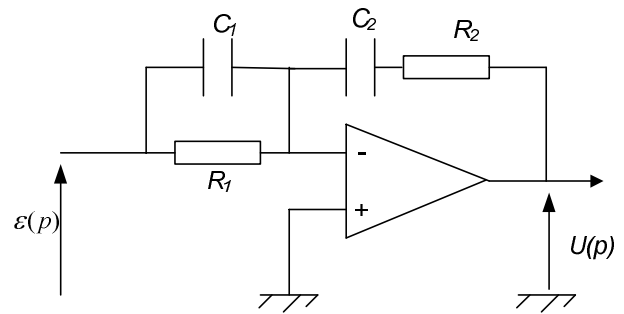
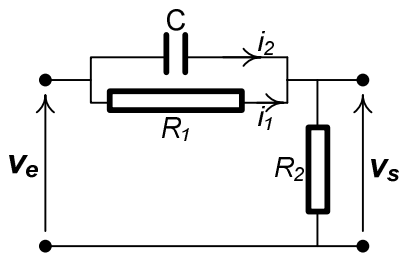
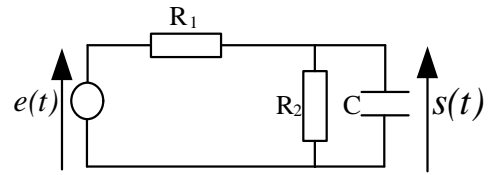
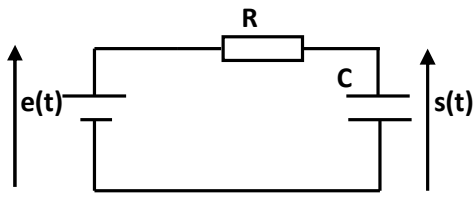
$$\dot{y}(0) = -2 \text{ et } y(0) = -1$$

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6 y(t) = 12t + 20$$

$$\dot{y}(0) = 0 \text{ et } y(0) = 0$$

Exercice N°06

-Calculer pour chaque montage ci-dessous, la fonction de transfert $F(p)$.



Chapitre III

Réponses temporelles des systèmes fondamentaux (Systèmes du premier et du second ordre)

INTRODUCTION

Il existe un nombre important de systèmes réels (Circuits RC, RLC, système Masse Ressort, ...etc) qui peuvent être décrits par des simples équations différentielles du premier et du second ordre. La complexité d'un système est en réalité est dû à la multitude de sous-systèmes d'ordre inférieur ou égal à 2 qui le composent. Par exemple un système de troisième ordre peut être décomposé, en trois sous-systèmes du premier ordre ou en un système du premier ordre et un système du second ordre. Il est donc très important de comprendre et de maîtriser les comportements et les caractéristiques des systèmes du premier et du second ordre.

III.1 SYSTEME DU PREMIER ORDRE

Un système est dit du premier ordre s'il est régi par une équation différentielle de premier ordre de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (\text{III. 1})$$

avec : $e(t)$ et $s(t)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du système

En supposant que les conditions initiales soient nulles ($CI=0$), il est possible de calculer la fonction de transfert $G(p)$ du système en appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (III.1):

$$\begin{aligned} \tau[pS(p) - s(0)] + S(p) &= KE(P) \\ S(p)[\tau p + 1] &= KE(P) \\ \frac{S(p)}{E(p)} &= \frac{K}{1 + \tau p} \\ G(p) &= \frac{K}{1 + \tau p} \end{aligned} \quad (\text{III. 2})$$

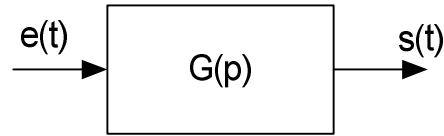
Les paramètres de la fonction de transfert ou du système sont alors :

K : Gain statique

τ : Constante de temps

III.1.1 Réponse Impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système est sa réponse à l'impulsion de Dirac $\delta(t)$. Elle caractérise aussi l'identité du système.



Nous avons dans ce cas-là $e(t) = \delta(t)$, et puisque la transformée de Laplace de $\delta(t)$ vaut 1, le signal de sortie s'exprime comme suit :

$$S(p) = E(p)G(p) = G(p)$$

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (\text{III. 3})$$

La sortie temporelle correspondante $s(t)$ s'écrit :

$$s(t) = TL^{-1} \left\{ \frac{K}{1 + \tau p} \right\} = TL^{-1} \left\{ \frac{K}{\tau} \times \frac{K}{p + \frac{1}{\tau}} \right\}$$

$$s(t) = \frac{K}{\tau} TL^{-1} \left\{ \frac{K}{p + \frac{1}{\tau}} \right\}$$

$$s(t) = \frac{K}{\tau} \times e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (\text{III. 4})$$

L'allure de cette réponse est représentée par la Figure 1.

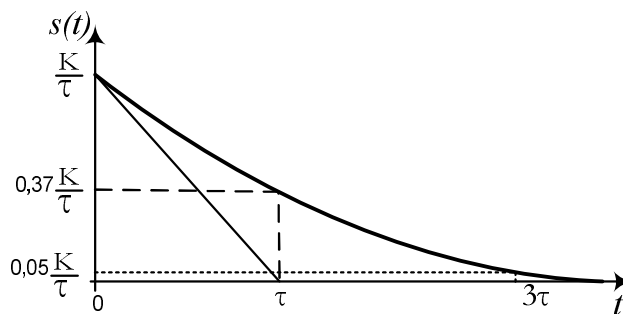


Figure III.1: Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

Les points particuliers de cette réponse sont donnés dans le tableau ci-dessous :

➤ Point de départ :

$$s(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pS(p) = \frac{K}{\tau} \quad [\text{théorème de la valeur initiale}]$$

➤ Point d'arrivé :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = 0 \quad [\text{théorème de la valeur finale}]$$

t	0	τ	3τ	$+\infty$
$s(t)$	$\frac{K}{\tau}$	$0,37 \frac{K}{\tau}$	$0,05 \frac{K}{\tau}$	0
$ds(t)/dt$	$-\frac{K}{\tau^2}$	$-0,37 \frac{K}{\tau^2}$	$-0,05 \frac{K}{\tau^2}$	0

Remarque : il est possible d'identifier les deux paramètres $\{K \text{ et } \tau\}$ de la fonction de transfert d'un système du premier ordre à partir de la courbe de sa réponse impulsionnelle.

III.1.2 Réponse Indicielle

La réponse indicielle d'un système est sa réponse quand un échelon d'amplitude E_0 est appliqué à son entrée. Dans ce cas-là :

$$S(p) = \frac{E_0}{p} \times G(p) \quad \left(\text{car la TL}\{E_0 u(t)\} = \frac{E_0}{p} \right)$$

$$S(p) = \frac{E_0}{p} \times \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{\frac{E_0 K}{\tau}}{p \left(p + \frac{1}{\tau} \right)}$$

Nous avons deux pôles ($p=0$ et $p=-1/\tau$), alors $S(p)$ s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{\tau}} = \frac{KE_0}{p} - \frac{KE_0}{p + \frac{1}{\tau}}$$

La réponse indicielle temporelle a comme expression :

$$s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ pour } t \geq 0 \quad (\text{III. 5})$$

La courbe correspondante est donnée par la figure ci-dessous

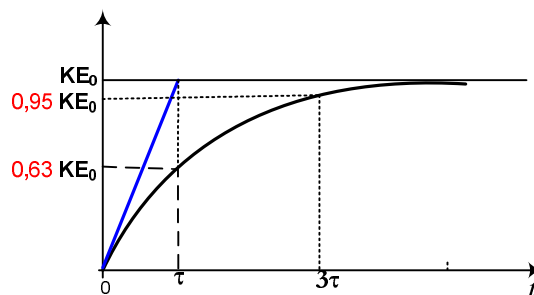


Figure III.2: Réponse indicielle d'un système du premier ordre

Les points particuliers de cette réponse sont donnés dans le tableau ci-dessous :

➤ Point de départ :

$$s(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pS(p) = 0 \quad [\text{théorème de la valeur initiale}]$$

➤ Point d'arrivé :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = KE_0 \quad [\text{théorème de la valeur finale}]$$

t	0	τ	3τ	4τ	$+\infty$
$s(t)$	0	$0,63KE_0$	$0,95KE_0$	$0,98KE_0$	KE_0
$ds(t)/dt$	$\frac{KE_0}{\tau}$	-	-		0

- Le temps de réponse à 5% vaut 3τ ($t_{r5\%}=3\tau$)
- Le signal de sortie atteint **63%** de la valeur finale en τ unités de temps
- La dérivée à $t=0$ vaut :

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{KE_0}{\tau} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ pour } t \geq 0 \quad (\text{III. 6})$$

-Il est important de remarquer que plus τ est faible, plus le système est rapide.

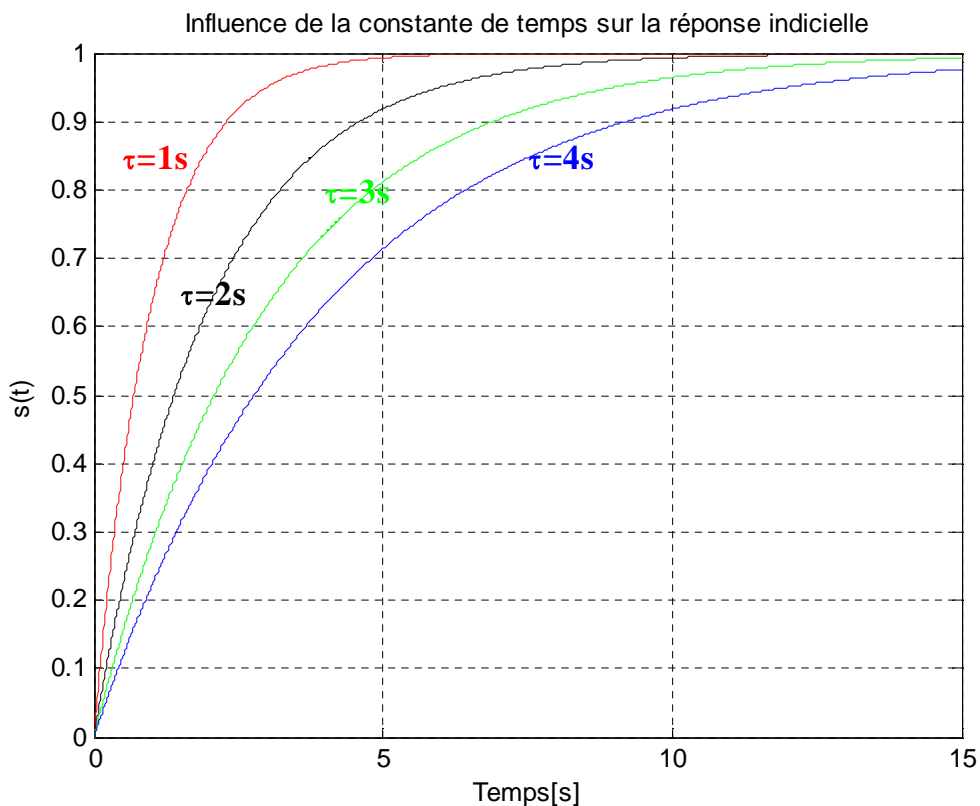


Figure III.3: Influence de la constante de temps (τ) sur la réponse d'un système du premier ordre

III.1.3 Réponse à une rampe

Supposons que le système du premier ordre soit excité par un signal de type rampe :

$e(t) = \mathbf{B.r(t)} = \mathbf{B.t.u(t)}$. La transformée de Laplace de ce signal d'entrée est : $E(p) = \frac{B}{p^2}$

La sortie du système a pour expression :

$$S(p) = \frac{B}{p^2} \times \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{\frac{BK}{\tau}}{p^2 \left(p + \frac{1}{\tau} \right)}$$

$$S(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{C}{p + \frac{1}{\tau}} = \frac{-\tau BK}{p} + \frac{BK}{p^2} + \frac{\tau BK}{p + \frac{1}{\tau}}$$

Le signal temporel correspondant s'écrit :

$$S(p) = BK \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ pour } t > 0 \quad (\text{III. 7})$$

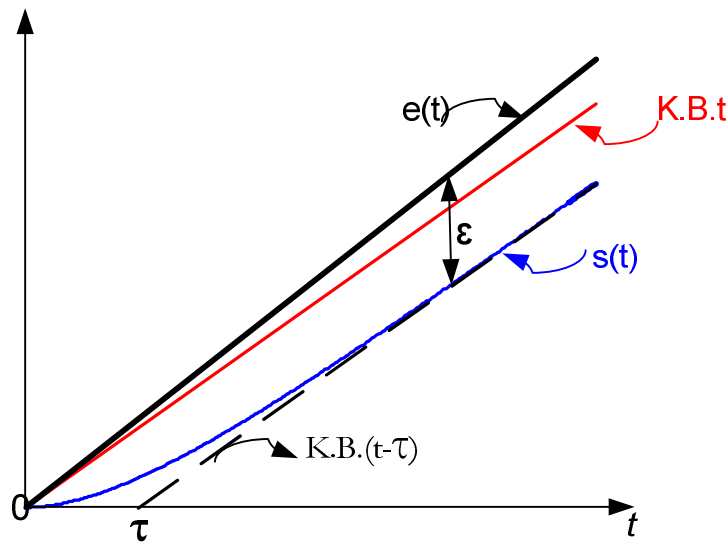


Figure III.4: Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

La figure ci-dessus représente la courbe de cette réponse. L'asymptote à la courbe est : $a(t) = BK(t - \tau)$. L'ecart ϵ , en régime établi, entre l'entrée et la sortie vaut $+\infty$ si $\mathbf{K} < \mathbf{1}$, $-\infty$ si $\mathbf{K} > \mathbf{1}$ et $\mathbf{B}\tau$ si $\mathbf{K} = \mathbf{1}$. Il est baptisé erreur de traînage lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{1}$.

III.2 SYSTEME DU SECOND ORDRE

Un système est dit du second ordre s'il est régi par une équation différentielle de second ordre de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (\text{III. 8})$$

En supposant que les conditions initiales soient nulles, il est possible de calculer la fonction de transfert $G(p)$ du système en appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (III.8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0^2} [p^2 S(p) - ps(0) - s(\dot{0})] + \frac{2\zeta}{\omega_0} [pS(p) - s(0)] + S(p) &= KE(P) \\ \left(\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + 1 \right) S(p) &= KE(P) \\ G(p) &= \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + 1} \end{aligned} \quad \text{(III. 9)}$$

avec :

K : le gain statique, **ζ** le facteur ou coefficient d'amortissement et **ω₀** la pulsation naturelle.

III.2.1 Réponse indicielle

Comme le dénominateur de la fonction de transfert est d'ordre 2, il est nécessaire d'étudier le lieu de ces racines afin de connaître le comportement du système.

Le discriminant du dénominateur est

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} (\zeta^2 - 1)$$

Pour $\zeta > 1$

Le polynôme $D(p) = \frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + 1$ possède deux racines réelles négatives $p_1 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$ et $p_2 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$. La fonction de transfert correspond alors à la mise en série de deux systèmes du premier ordre :

$$D(p) = \frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + 1 = (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$$

avec:

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_1} \quad \wedge \quad \tau_2 = -\frac{1}{p_2}$$

Pour $\zeta = 1$

Les racines sont doubles $p_{12} = -\omega_0 = -\frac{1}{\tau}$, le polynôme s'écrit sous la forme :

$$D(p) = \frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + 1 = (1 + \tau p)^2$$

Pour $\zeta < 1$

Les racines sont complexes conjuguées $p_1 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$ et $p_2 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$. La fonction de transfert ne correspond pas à la mise en série de deux systèmes du premier ordre car il s'agit de pôles complexes pas réels (*le dénominateur n'est pas factorisable en termes réels*).

La figure ci-dessous donne la position des pôles dans le plan complexe en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement.

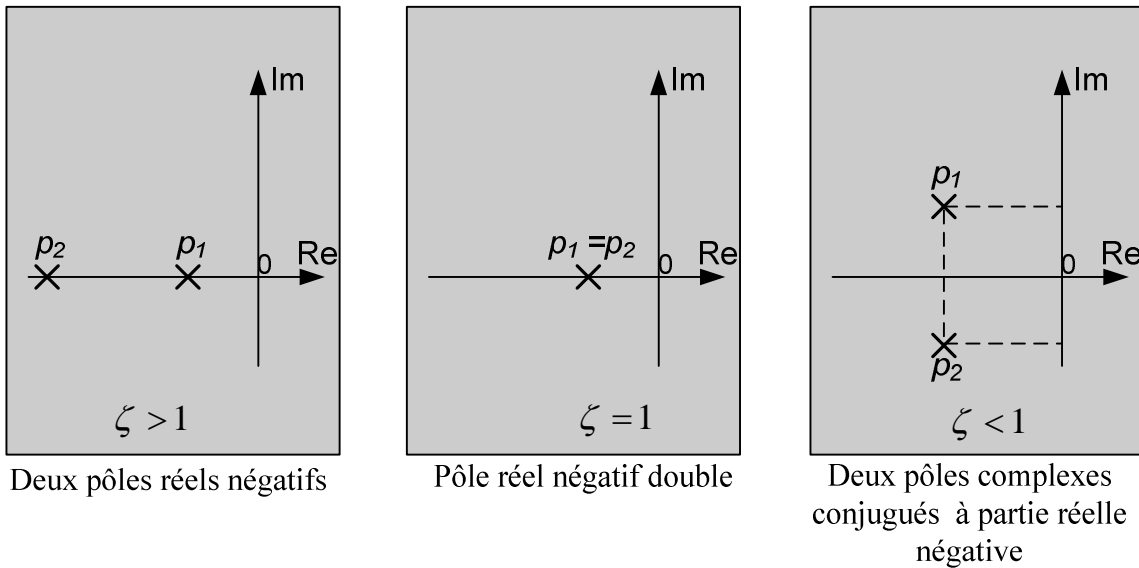


Figure III.5: Position des pôles d'un système du second ordre

III.2.1.1 Etude pour $\zeta > 1$

Comme dans le cas du système du premier ordre, l'entrée appliquée est un échelon d'amplitude E_0

$$G(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

$$S(p) = \frac{KE_0}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

La réponse temporelle $s(t)$ correspondante s'écrit :

$$s(t) = KE_0 \left(1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right) \quad t > 0 \tag{III. 10}$$

avec :

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{2\zeta}{\omega_0} \quad \wedge \quad \tau_1 \times \tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$$

Etude de $s(t)$

$$s(0) = 0 \qquad \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = KE_0$$

$$\dot{s}(t) = \frac{KE_0}{\tau_1 - \tau_2} \left[e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] \qquad \dot{s}(0) = 0$$

Puisque $\tau_1 > \tau_2$; alors :

$$\frac{1}{\tau_1} < \frac{1}{\tau_2} \quad \wedge \quad e^{-\frac{t}{\tau_1}} > e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

d'où quelques que soient les valeurs de τ_1 et τ_2 , $\dot{s}(t) > 0$ pour $t > 0$, $s(t)$ est monotone croissante sur \mathbb{R}^+ , donc pas de dépassement. La réponse est alors qualifiée d'apériodique puisqu'elle ne présente aucun dépassement relativement à la valeur finale. Plus le facteur d'amortissement est grand, plus le temps de réponse est conséquent.

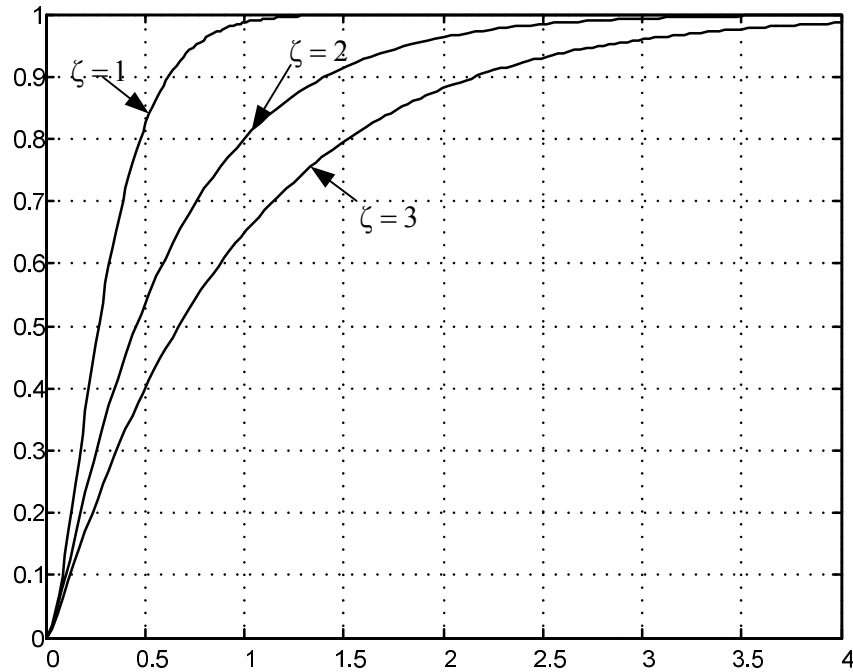


Figure III.6: Réponses apériodiques d'un système du second ordre

La réponse est dans ce cas est très semblable à celle d'un premier ordre. La différence est remarquable à $t=0$: le premier ordre démarre directement avec une pente différente de zéro alors que le système du second ordre présente une pente nulle (on dit que la réponse est de *forme S*).

Si le coefficient d'amortissement ζ est assez grand ($\zeta \gg 1$) l'un des pôles (p_1) l'emporte nettement sur l'autre (p_2) et l'on a:

$$s(t) \approx KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t\omega_0}{2\zeta}} \right) \quad t > 0 \quad \text{(III. 11)}$$

Le système est alors assimilé à un premier ordre.

III.2.1.2 Etude pour $\zeta = 1$

$$S(p) = \frac{KE_0}{p(1 + \tau p)^2} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{\omega_0}$$

La réponse temporelle $s(t)$ correspondante s'écrit :

$$s(t) = KE_0 [1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}] \quad t > 0 \quad \text{(III. 12)}$$

Etude de $s(t)$

$$s(0) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = KE_0$$

$$\dot{s}(t) = KE_0 \omega_0^2 t e^{-\omega_0 t} \quad \dot{s}(t) > 0 \text{ pour } t > 0, \quad \dot{s}(0) = 0$$

Il s'agit de la réponse apériodique la plus rapide. C'est le régime apériodique critique.

III.2.1.3 Etude pour $\zeta < 1$

$$S(p) = \frac{KE_0}{p \left(\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + 1 \right)} = \frac{KE_0}{p(p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2)}$$

$$p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2 = (p - p_1)(p - p_2)$$

avec:

$$\begin{cases} p_1 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \\ p_2 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

La réponse temporelle correspondante est de la forme :

$$s(t) = KE_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi) \right] \quad \text{(III. 13)}$$

avec :

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \zeta \\ \sin(\varphi) = \sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

La courbe de $s(t)$ est une sinusoïde amortie.

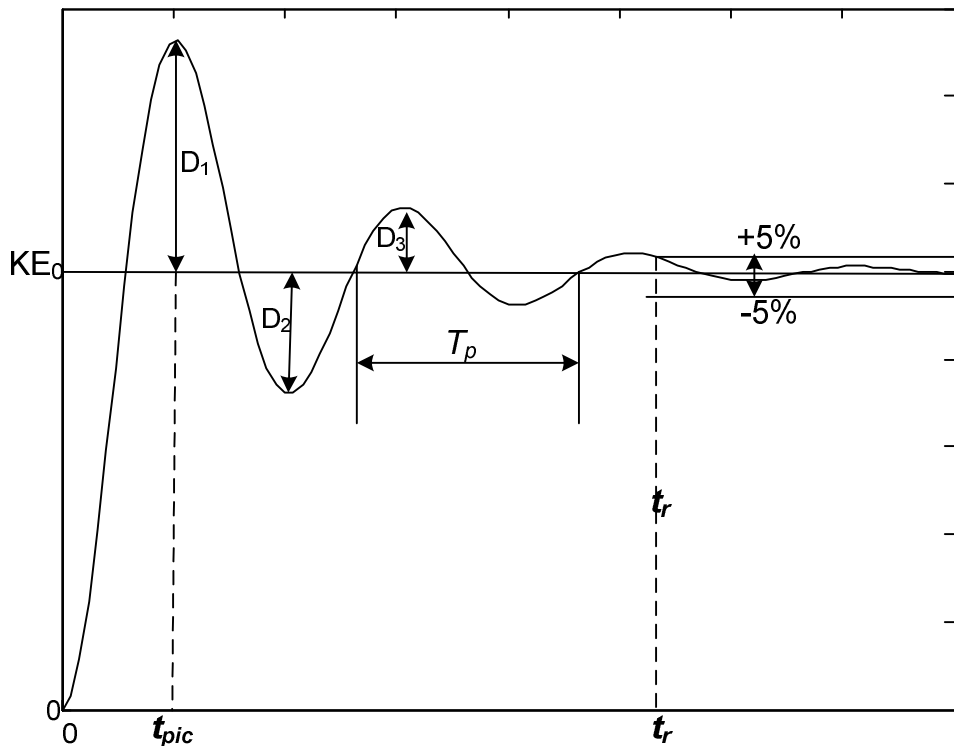


Figure III.7: Réponse oscillatoire amortie d'un système du second ordre

Les caractéristiques de la courbe sont :

• La pseudo-période

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{(III. 14)}$$

✚ La pseudo-pulsation

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{III. 15})$$

✚ Les extremums D_k sont donnés par :

$$D_k = KE_0 e^{\left(\frac{-k\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \quad (\text{III. 16})$$

qui se produisent aux instants :

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{III. 17})$$

Le premier extremum, valeur maximale de $s(t)$ est appelé le dépassement (exprimé en %) à l'instant t_{pic}

$$\begin{cases} D_{\%} = 100 e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \\ t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

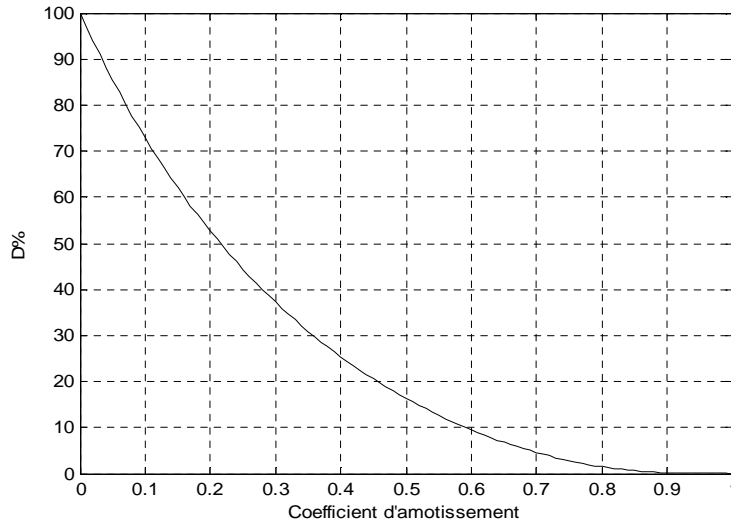


Figure III.8: Dépassement $D_{\%}$ en fonction de ζ

Le temps de montée t_m est défini comme l'instant pour lequel la valeur finale est atteinte pour la première fois.

$$s(t_m) = KE_0 \quad (\text{III. 19})$$

La résolution de l'équation (III.19), nous donne :

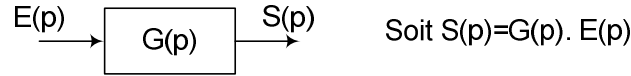
$$t_m = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{III. 20})$$

III.2.2 Temps de réponse

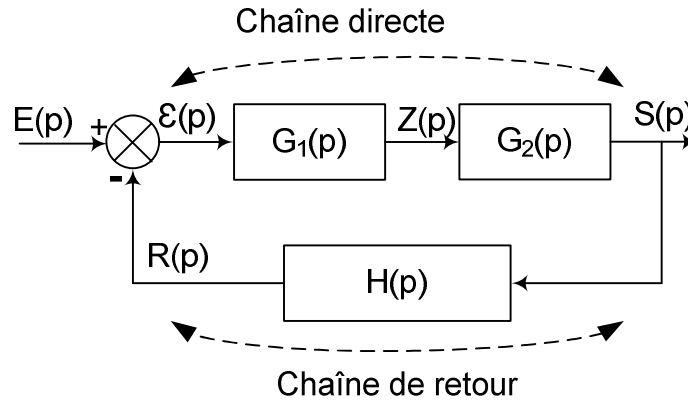
Le plus couramment utilisé est le temps de réponse à 5% que nous noterons t_r . Pour $\zeta = 0.7$ le temps de réponse est minimal et il est obtenu pour un dépassement de 5%. La courbe d'équation $\omega_0 t_r = \frac{\ln(20)}{\zeta}$ est une bonne approximation de $\omega_0 t_r$ pour $\zeta < 0.7$

III.3 Algèbre des schémas-blocs

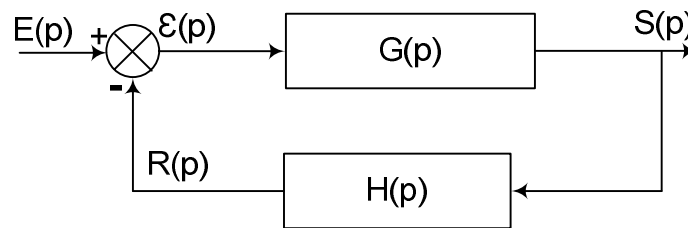
Un système de fonction de transfert $H(p)$, peut être représenté à l'aide d'un schéma bloc :



On peut de la même manière tracer le schéma bloc d'un système asservi :



En notant $G(p) = G_1(p) \times G_2(p)$, le schéma bloc du système ci-dessous peut se simplifier et se mettre sous une forme dite **forme canonique** :



$$\varepsilon(p) = E(p) - R(p) , \quad S(p) = G(p) \cdot \varepsilon(p), \quad R(p) = H(p) \cdot S(p)$$

Soit :

$$S(p) = G(p) \cdot (E(p) - R(p)) = G(p) \cdot (E(p) - H(p)S(p))$$

$$S(p)(1 + G(p) \cdot H(p)) = G(p) \cdot E(p)$$

$$S(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p) \cdot H(p)} E(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p) \cdot H(p)}$$

alors :

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p) \cdot H(p)} \tag{III. 21}$$

est la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)

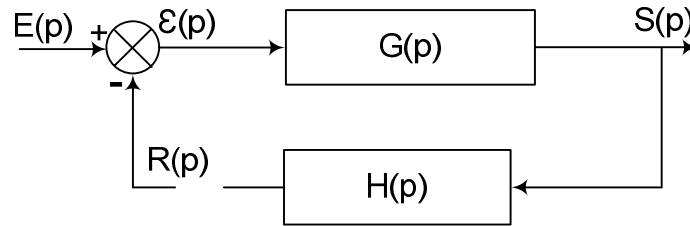
Ou encore :

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p) \cdot H(p)} = \frac{FTCD(p)}{1 + FTCD(p) \cdot FTCR(p)}$$

$FTCD(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne directe ;

$FTCR(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne de retour ;

Fonction de transfert en boucle ouverte FTBO d'un système asservi :



Le système mis sous forme canonique, étant considéré en boucle ouverte, on a :

$$\varepsilon(p) = E(p), \quad R(p) = \varepsilon(p).G(p).H(p)$$

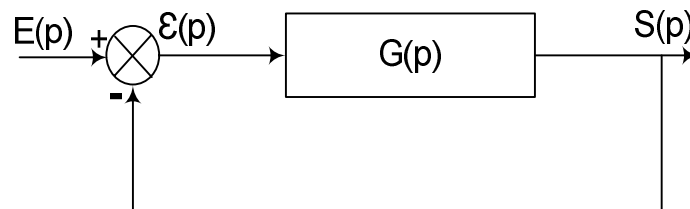
$$FTBO(p) = \frac{R(p)}{E(p)} = G(p).H(p)$$

$$FTBO(p) = T(p) = G(p).H(p) = FTCD(p).FTCR(p)$$

alors :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{G(p)}{1 + G(p).H(p)} = \frac{G(p)}{1 + T(p)} \\ &= \frac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)} \end{aligned} \quad \text{(III. 22)}$$

Fonction de transfert avec retour unitaire



Comme précédemment, mais avec $\mathbf{H(p)=1}$

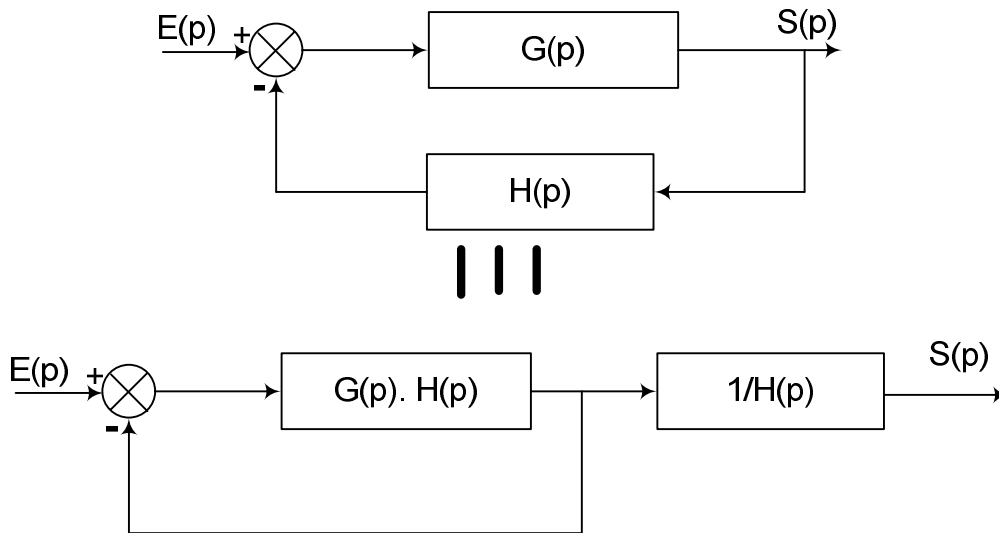
La fonction de transfert en boucle ouverte est : $T(p) = G(p)$

Et la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

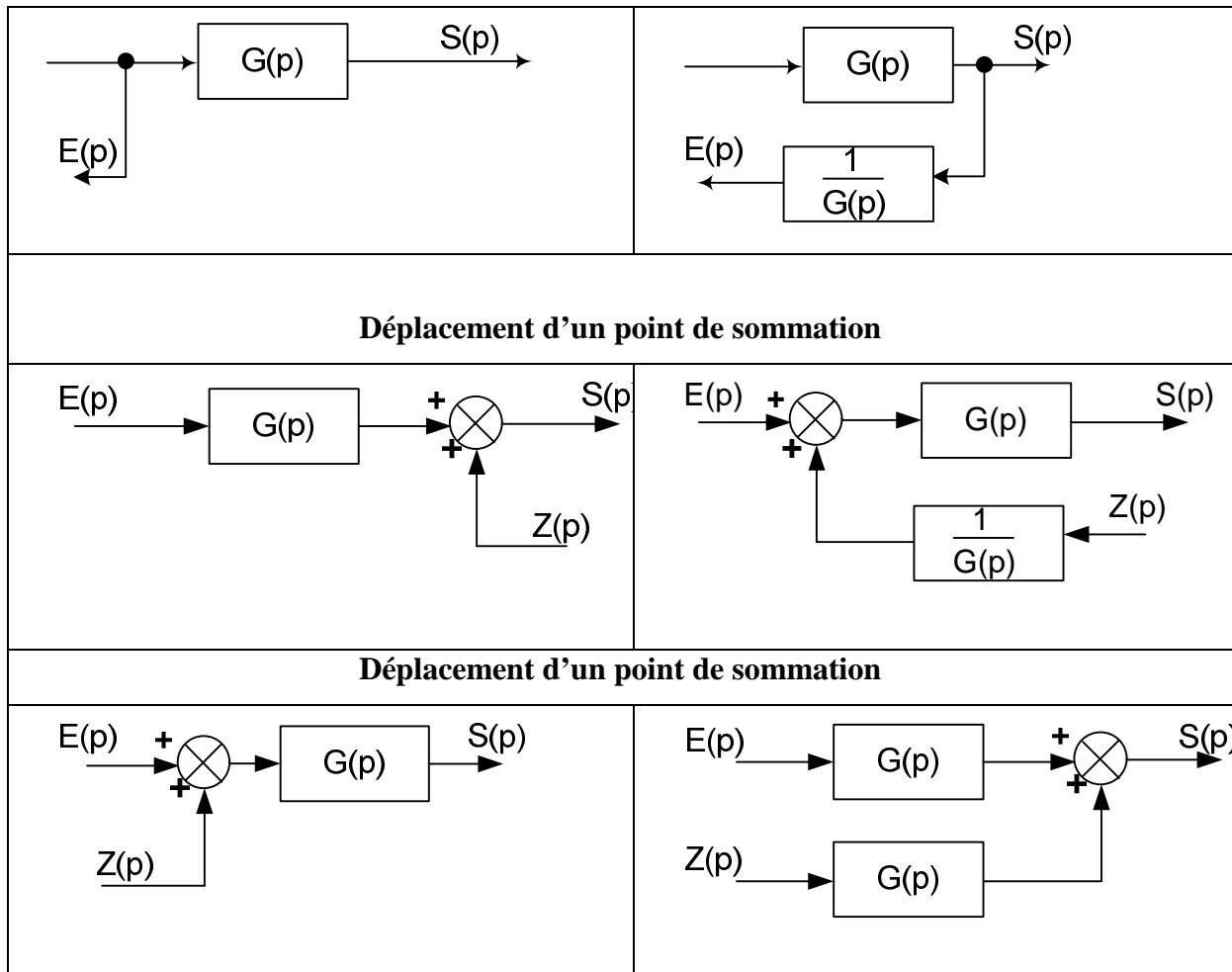
Remarque :

Tous les systèmes bouclés à retour non unitaire peuvent se ramener sous forme de systèmes à retour unitaire.



III.3.1 Schémas-blocs équivalents

Systèmes en série	
Systèmes en parallèle	
Déplacement d'un point de prélèvement	
Déplacement d'un point de prélèvement	



Ces équivalences sont généralement utilisées pour réorganiser des schémas-blocs qui présentent des difficultés pour calculer la fonction de transfert.

III.3.2 Systèmes à plusieurs entrées

Principe de superposition

Un système dynamique est linéaire si le principe de superposition peut être appliqué. Ainsi la réponse $s(t)$ d'un système linéaire dû à plusieurs entrées appliquées simultanément est égale à la somme des réponses de chaque entrée appliquée séparément.

Exemple :

Soit à calculer la sortie $S(p)$ du système, à deux entrées, représenté ci-dessous :

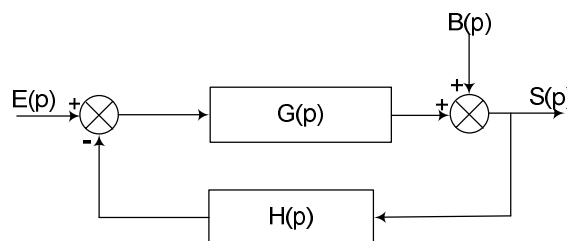
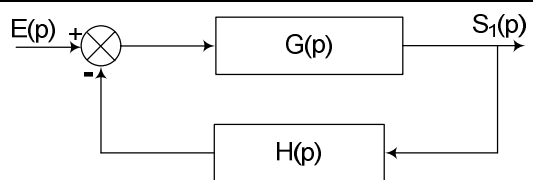
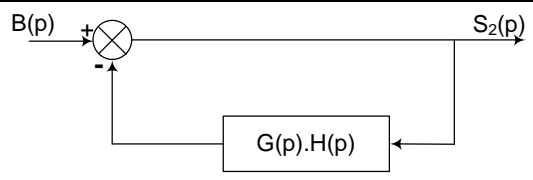


Figure III.9: Système à deux entrées

1 ^{ier} Cas $B(p)=0$ et $E(p)\neq 0$	2 ^{ème} Cas $E(p)=0$ et $B(p)\neq 0$
Schéma équivalent	Schéma équivalent
 $S_1(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p).H(p)} E(p)$	 $S_2(p) = \frac{1}{1 + G(p).H(p)} B(p)$
$S(p) = S_1(p) + S_2(p) = \frac{G(p)E(p) + B(p)}{1 + G(p).H(p)}$	

Exercices sur le chapitre III

Exercice N°01

Les figures ci-dessous représentent les réponses indicielles de trois systèmes (S_1 , S_2 et S_3) caractérisés respectivement par les fonctions de transfert $F_1(p)$, $F_2(p)$ et $F_3(p)$.

Trouver la figure correspondant à chaque système.

$$F_1(p) = \frac{1}{p+1}, \quad F_2(p) = \frac{1}{10p^2 + 11p + 1} \quad \text{et} \quad F_3(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

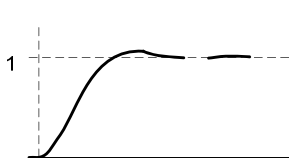


Figure 1

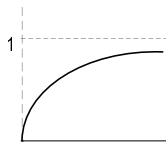


Figure 2

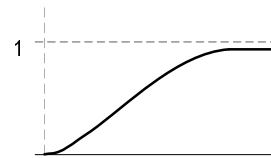
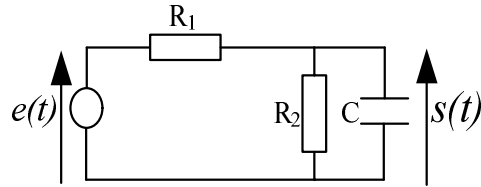


Figure 3

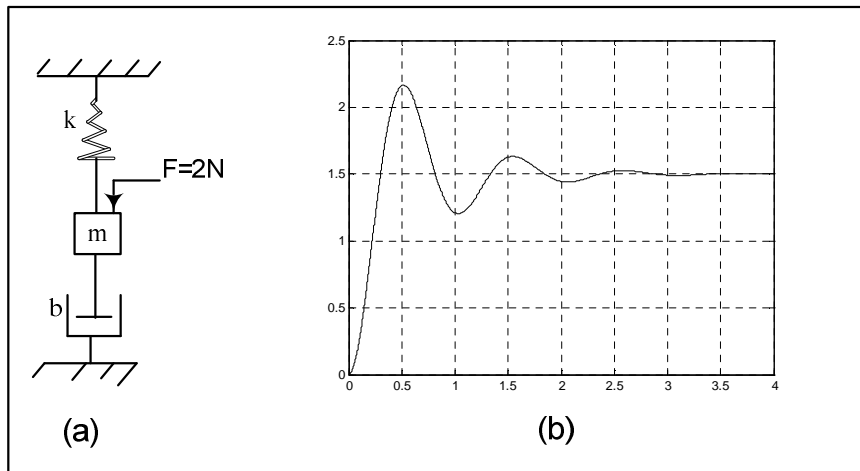
Exercice N°02

- Déterminer la fonction de transfert du circuit ci-dessous et montrer qu'il s'agit d'un système du premier ordre.
- Pour $C=2\mu\text{F}$ et $R_1=R_2=1\text{M}\Omega$, déterminer le gain statique K et la constante de temps τ .
- Donner l'expression de la réponse indicielle.



Exercice N°03

- Déterminer la fonction de transfert du système mécanique (figure a) et montrer qu'il s'agit d'un système du second ordre. Quand une force $F=2\text{N}$ est appliquée à l'instant $t=0$, la masse se met à osciller comme illustré par la figure (b).

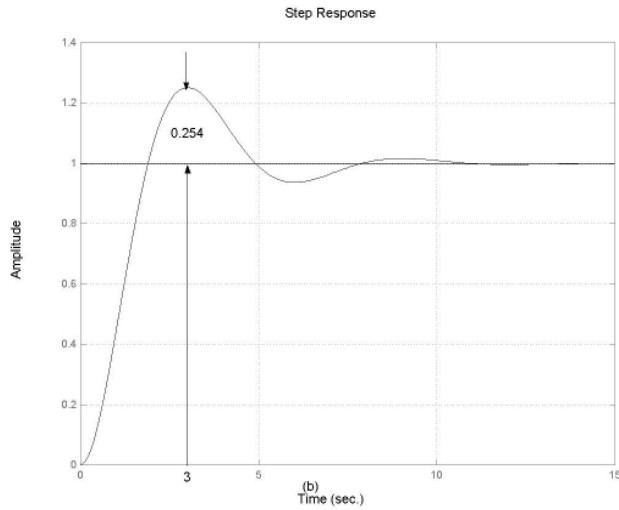


- Déterminer m , b et k à partir de la courbe de la figure (b).

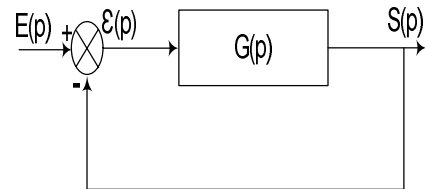
Exercice N°04

La figure (a) donne la réponse indicielle (échelon unitaire) du système bouclé de la figure (b).

- Donner l'expression de la fonction de transfert ou boucle ouverte ainsi que celle de la boucle fermée. ($G(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$)
- Déterminer les valeurs de T et K .



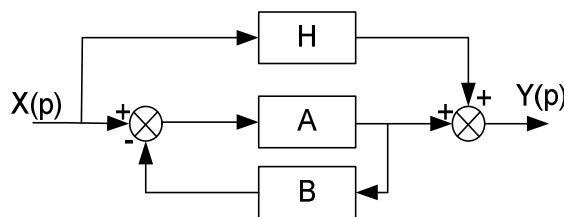
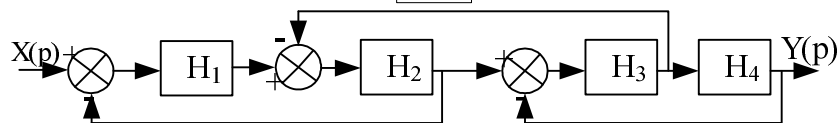
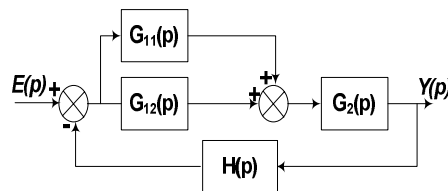
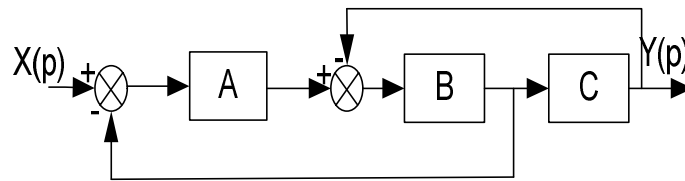
(a)



(b)

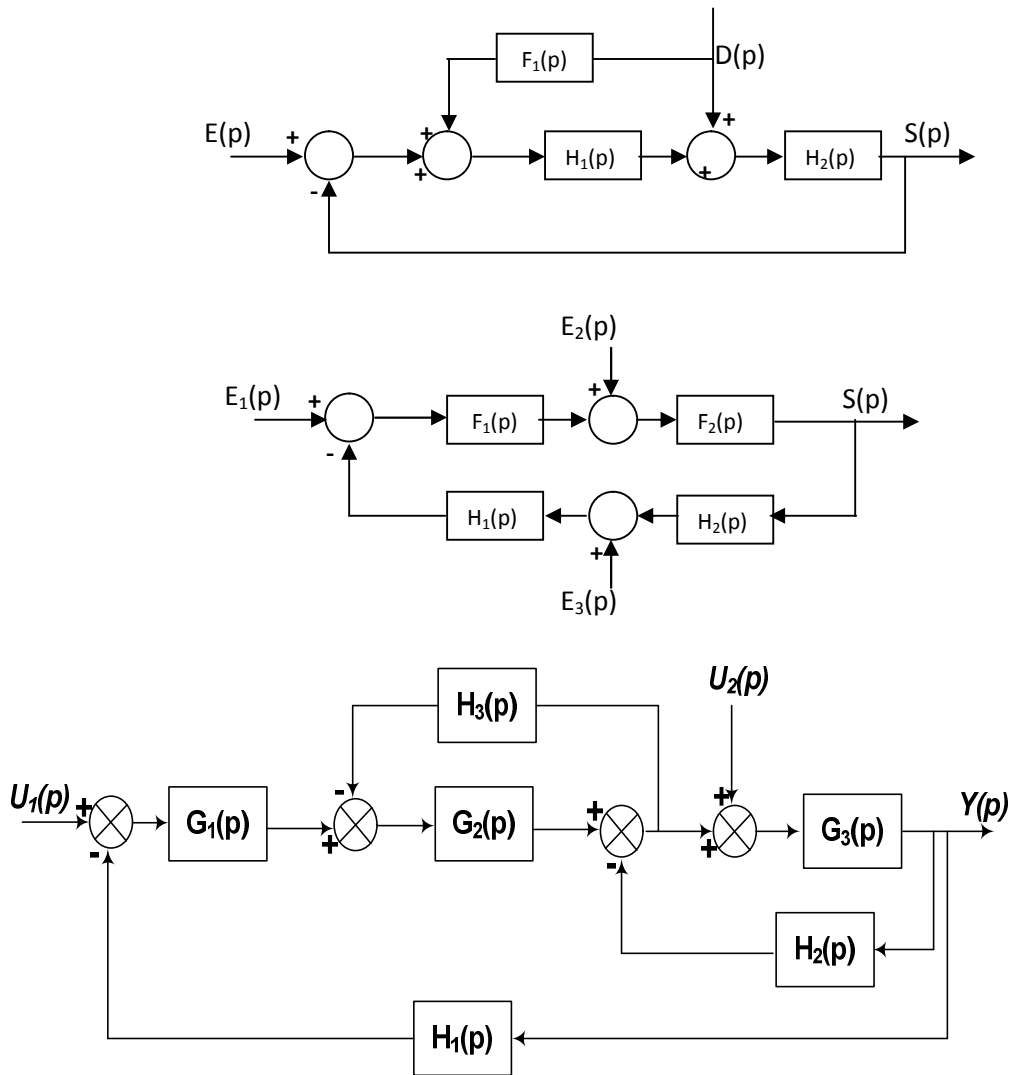
Exercice N°05

Simplifier les schémas bloc suivants puis calculer les fonctions de transfert $Y(p)/X(p)$:



Exercice N°06

Trouver l'expression de la sortie en fonction des différentes entrées pour les systèmes suivants:



Chapitre

IV

Analyse fréquentielle

Introduction

L'analyse fréquentielle est l'étude du comportement et de la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale. La réponse en fréquence du système est l'étude du régime permanent. La sortie d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale est de la forme sinusoïdale de même pulsation que le signal d'entrée mais d'amplitude différente et déphasé par rapport au signal d'entrée.

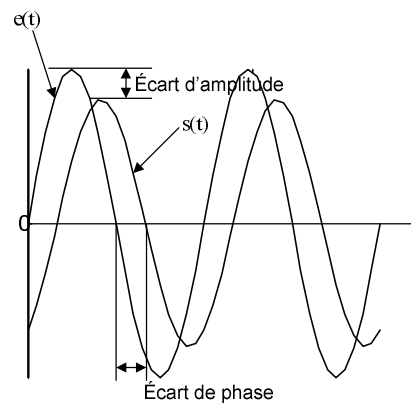
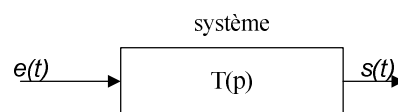


Figure IV.1 : Réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale

IV.1 Fonction de transfert complexe

La fonction de transfert d'un système linéaire continu invariant dans le temps est une fonction de la forme :



$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

où $E(p)$ et $S(p)$ sont les transformées dans le domaine de Laplace des fonction temporelles : $e(t)$ et $s(t)$.

On appelle fonction de transfert complexe ou transmittance, la fonction obtenue en remplaçant la variable de Laplace p par le terme $j\omega$ (imaginaire pur).

$$T(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \quad (\text{IV. 1})$$

IV.2 Lieu de transfert :

L'étude de la fonction complexe $T(j\omega)$ peut se faire d'une manière graphique. On distingue principalement trois types de représentation : le diagramme de **Bode**, la représentation de **Nyquist** et la représentation de **Black**.

IV.2.1 Diagramme de Bode

L'analyse par le diagramme de **Bode**, consiste à représenter séparément le module $A(\omega) = |T(j\omega)|$ et la phase $\varphi(\omega) = \text{Arg}(T(j\omega))$ de la fonction $T(j\omega)$ en fonction de la pulsation ω .

- L'échelle horizontale est le $\log_{10}(\omega)$
- L'échelle pour le module est le dB = $20\log_{10}(A(\omega))$.
- L'échelle pour la phase est le degré

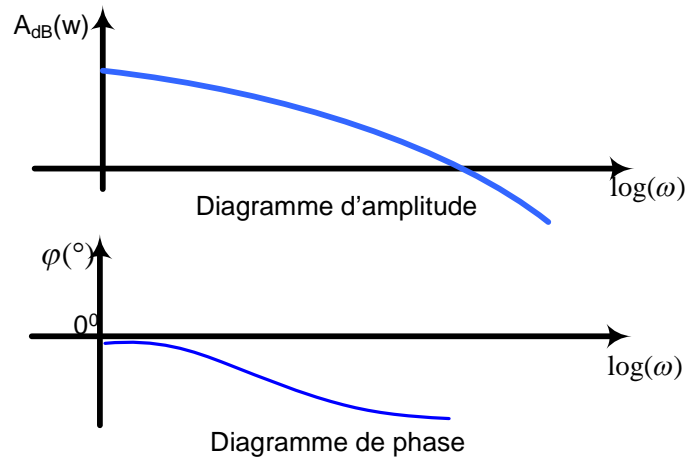


Figure IV.2 : Diagrammes de Bode

Cette représentation est bien adaptée pour l'analyse des fonctions de transfert, en effet si :

$T(j\omega) = T_1(j\omega) \times T_2(j\omega)$ (connexion en série) :

$$\begin{cases} A_{dB} = A_{1dB} + A_{2dB} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$$

Il suffit donc d'ajouter les diagrammes des fonctions T_1 et T_2 aussi bien sur le diagramme d'amplitude que sur le diagramme de phase.

Définitions

Gain en décibels (dB)

$$\|T(j\omega)\|_{dB} = 20 \log_{10} \|T(j\omega)\| \tag{IV. 2}$$

Exemples :

$$\begin{aligned} \|T(j\omega)\| = 2 &\Rightarrow \|T(j\omega)\|_{dB} = 20 \log_{10}(2) = 6dB \\ \|T(j\omega)\| = 10 &\Rightarrow \|T(j\omega)\|_{dB} = 20 \log_{10}(10) = 20dB \end{aligned}$$

Octave

C'est un intervalle dont les deux bornes sont distantes d'un rapport de **2**.

Exemples : [1 2], [10 20] et [5 10].

Décade

C'est un intervalle tel que ses bornes sont distantes d'un rapport de **10**.

Exemples : [1 10], [10 100] et [5 50].

Gain statique

Gain lorsque $\omega \rightarrow 0$, celui-ci doit être fini.

IV.2.2 Représentation de Nyquist

La représentation de Nyquist est la représentation dans le plan complexe de la fonction :

$$T(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega)$$

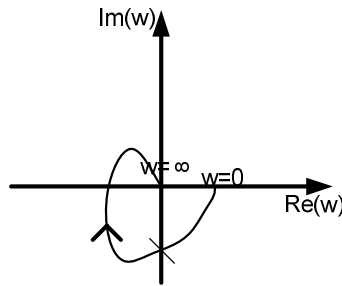


Figure IV.3 : Diagramme de Nyquist

Le graphique représentant la fonction de transfert doit être gradué dans le sens des ω croissants ($\omega: 0 \rightarrow +\infty$)

IV.2.3 Représentation de Black

On représente la phase $\varphi(\omega)$ en degré en abscisse et le module $A(\omega)$ en décibel en ordonnée. La courbe obtenue doit être graduée en pulsation.

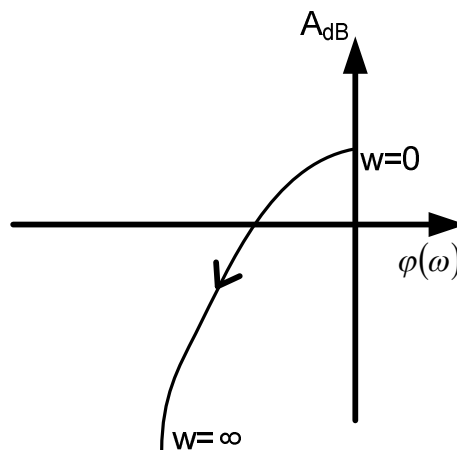


Figure IV.4 : Diagramme de Black

IV.3 Etude du système du premier ordre

Dans ce cas-là

$$T(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (\text{IV. 3})$$

soit :

$$T(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} \quad (\text{IV. 4})$$

IV.3.1 Diagramme de Bode

Diagramme d'amplitude

Le module de la fonction complexe $T(j\omega)$ est :

$$A = |T(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad (\text{IV. 5})$$

Le gain logarithmique de ce nombre est :

$$A_{dB} = 20 \log K - 10 \log(1 + (\omega\tau)^2) \quad (IV. 6)$$

Etude des asymptotes

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (A_{dB}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} (20 \log K - 10 \log(1 + (\omega\tau)^2)) = 20 \log K$$

La courbe du module est approximée par une droite horizontale (asymptote horizontale) d'équation :

$$y_1 = 20 \log K$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (A_{dB}) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (20 \log K - 10 \log(1 + (\omega\tau)^2))$$

Nous avons :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (1 + (\omega\tau)^2) = (\omega\tau)^2 \text{ (on néglige le nombre 1 devant } \omega\tau)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (A_{dB}) = 20 \log K - 20 \log(\omega\tau) = 20 \log \left(\frac{K}{\tau}\right) - 20 \log \omega$$

Dans le système de coordonnées du diagramme de Bode, l'asymptote est une droite d'équation :

$$y_2 = 20 \log \left(\frac{K}{\tau}\right) - 20 \log \omega$$

On dit que la pente est de -20dB par décade (le module diminue de 20dB pour une augmentation d'un facteur 10 de ω). C'est aussi équivalent à une pente de -6dB par octave (le module diminue de 6dB pour une augmentation d'un facteur 2 de ω).

Les deux asymptotes se croisent pour $\omega = \omega_c$, cette pulsation est appelée pulsation de cassure :

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} \quad (IV. 7)$$

$$\begin{cases} y_1 = 20 \log K \\ y_2 = 20 \log \left(\frac{K}{\tau}\right) - 20 \log \omega \end{cases}$$

au point d'intersection, nous avons $y_1 = y_2$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow 20 \log K = 20 \log \left(\frac{K}{\tau}\right) - 20 \log \omega \Rightarrow -20 \log \tau - 20 \log \omega = 0 \Rightarrow \log \omega\tau = 0$$

$$\omega\tau = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

Pour $\omega = \omega_c$

$$|T(j\omega_c)| = \left| \frac{K}{1+j} \right| = \frac{K}{\sqrt{2}} \quad (IV. 8)$$

$$A_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log K - 3dB$$

Pour la pulsation de cassure l'écart par rapport à l'asymptote est de **-3dB**.

Pour les pulsations **double** et **moitié** de ω_c , l'écart est de **-1dB**.

Diagramme de phase

La phase de la fonction complexe $T(j\omega)$ est :

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega\tau) \quad (IV. 9)$$

Le diagramme asymptotique a la forme d'une marche d'escalier, il n'est pas suffisamment précis pour représenter l'évolution de la phase.

Quelques points de la courbe

$$\varphi(\omega_c) = -\arctan(1) = -45^\circ$$

$$\varphi\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = -26,56^\circ$$

$$\varphi(2\omega_c) = -\arctan(2) = -63,43^\circ$$

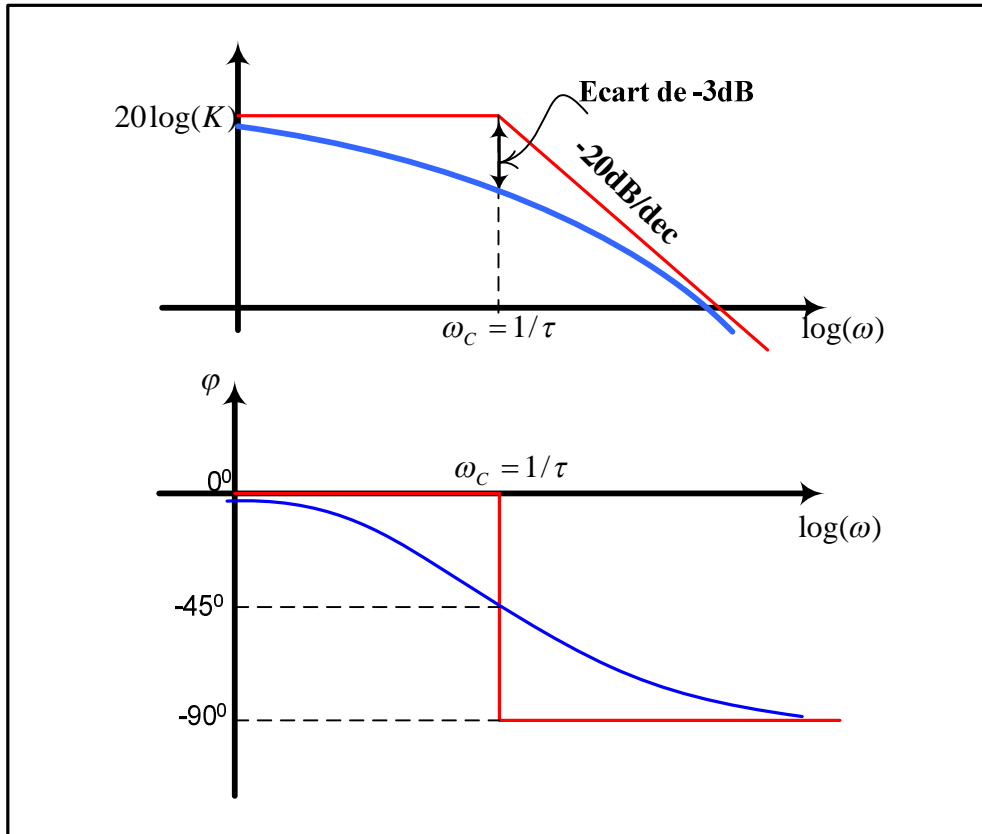


Figure IV.5 : Diagrammes de Bode d'un système du premier ordre

IV.3.2 Diagramme de Nyquist

$$T(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} = \frac{K(1 - j\omega\tau)}{1 + \tau^2\omega^2} = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} - j \frac{K\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} \quad (IV.10)$$

$$\begin{cases} x = \text{Re}(T(j\omega)) = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} > 0 \quad \forall \omega \in [0, +\infty[\\ y = \text{Im}(T(j\omega)) = -\frac{K\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} < 0 \quad \forall \omega \in [0, +\infty[\end{cases} \quad (IV.11)$$

Point de départ ($\omega=0$)

$$\begin{aligned} x_0 &= \lim_{\omega \rightarrow 0} x = K \\ y_0 &= \lim_{\omega \rightarrow 0} y = 0 \end{aligned}$$

Le point de départ est $(x_0, y_0) = (K, 0)$.

Point d'arrivée ($\omega \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} x_\infty &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} x = 0^+ \\ y_\infty &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} y = 0^- \end{aligned}$$

Le point d'arrivée est $(x_\infty, y_\infty) = (0^+, 0^-)$.

On peut vérifier que le lieu de Nyquist d'un système du premier ordre est demi-cercle de centre $(K/2, 0)$ et de rayon $K/2$. Le diagramme doit être gradué en ω pour être utilisable.

A la pulsation de cassure $\omega_c = 1/\tau$ correspond le point $(K/2, -K/2)$.

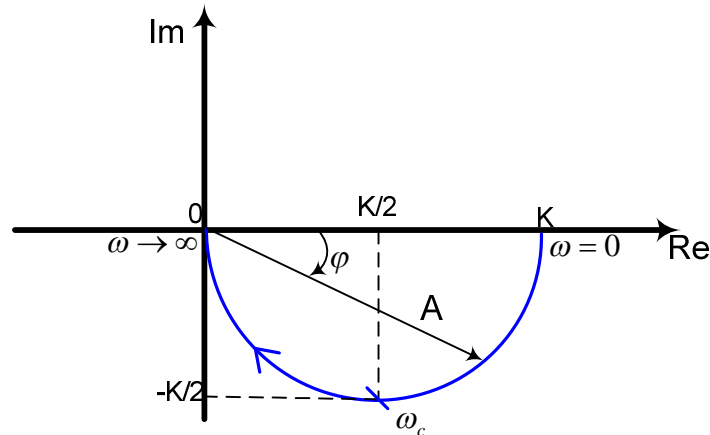


Figure IV.6 : Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre

IV.3.3 Diagramme de Black

On retrouve sur le tracé les points caractéristiques définis précédemment. Le lieu a une asymptote horizontale aux basse fréquences ($\omega=0$) et une asymptote verticale aux hautes fréquences ($\omega \rightarrow \infty$).

$$A_{dB}(\omega = 0) = 20 \log K$$

$$\varphi(\omega = 0) = 0^{\circ}$$

$$A_{dB}(\omega \rightarrow \infty) = -\infty$$

$$\varphi(\omega \rightarrow \infty) = -90^{\circ}$$

$$A_{dB}(\omega_c) = 20 \log K - 3dB$$

$$\varphi(\omega_c) = -45^{\circ}$$

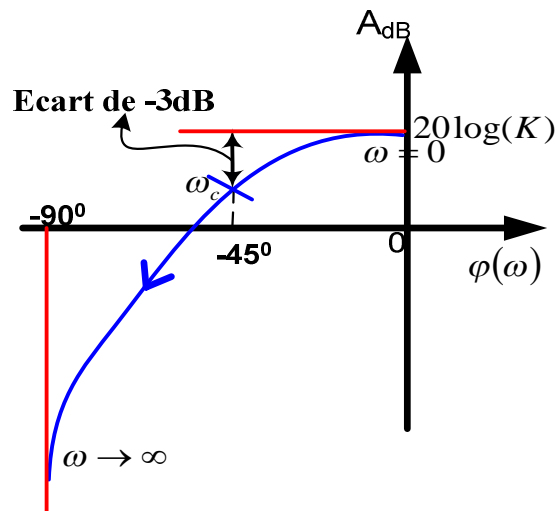


Figure IV.7 : Diagramme de Black d'un système du premier ordre

IV.4 Etude du système du second ordre

La fonction de transfert est de la forme :

$$T(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + 1} \quad (IV. 12)$$

IV.4.1 Diagramme de Bode

Pour $\zeta > 1$

La fonction de transfert correspond alors à la mise en série de deux systèmes du premier ordre

$$D(p) = \frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + 1 = (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$$

$$T(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\tau_1 \omega)(1 + j\tau_2 \omega)} \quad (IV. 13)$$

La représentation prend la forme ci-dessous :

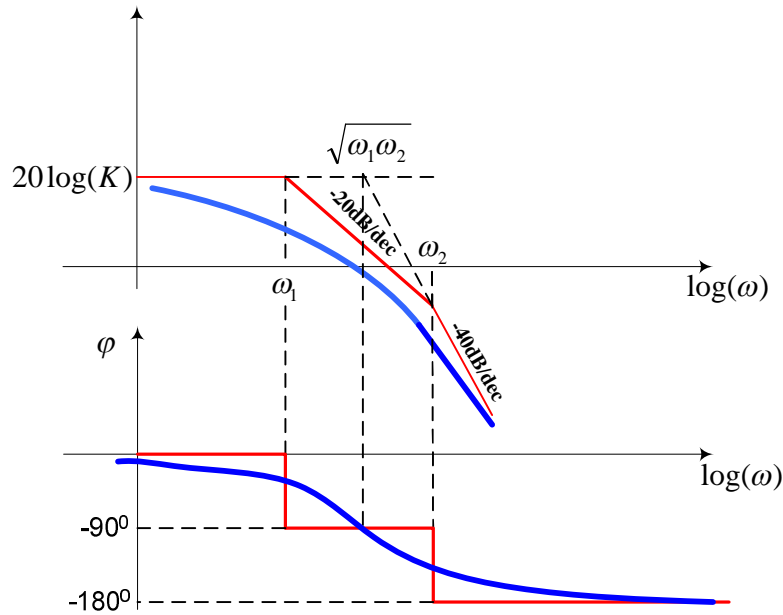


Figure IV.8 : Diagrammes de Bode d'un système du second ordre ($\zeta > 1$)

Points du diagramme

$$A_{dB}(\omega = 0) = 20 \log K$$

$$\varphi(\omega = 0) = 0^\circ$$

$$A_{dB}(\omega \rightarrow \infty) = -\infty$$

$$\varphi(\omega \rightarrow \infty) = -180^\circ$$

$$\varphi(\omega_0) = -90^\circ$$

Pour $\zeta = 1$

$$D(p) = \frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + 1 = (1 + \tau p)^2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

La représentation prend la forme ci-dessous :

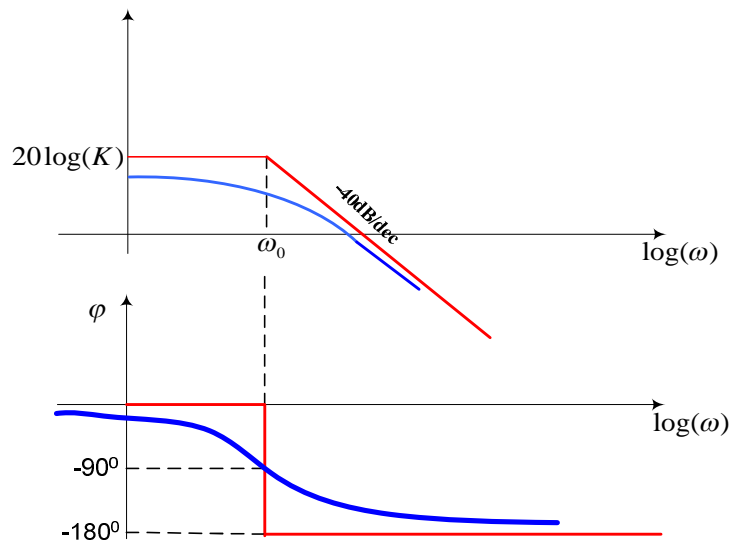


Figure IV.9 : Diagrammes de Bode d'un système du second ordre ($\zeta = 1$)

Points du diagramme

$$\begin{aligned}
 A_{dB}(\omega = 0) &= 20 \log K \\
 \varphi(\omega = 0) &= 0^0 \\
 A_{dB}(\omega \rightarrow \infty) &= -\infty \\
 \varphi(\omega \rightarrow \infty) &= -180^0 \\
 \varphi(\omega_0) &= -90^0
 \end{aligned}$$

Pour $\zeta < 1$

Les racines sont complexes conjuguées $p_1 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ et $p_2 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$. La fonction de transfert ne correspond pas à la mise en série de deux systèmes du premier ordre car il s'agit de pôles complexes pas réels (le dénominateur n'est pas factorisable en termes réels).

$$T(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}} \tag{IV.14}$$

Posons $X = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$\begin{aligned}
 T(j\omega) &= \frac{K}{1 - X^2 + 2j\zeta X} \\
 A = |T(j\omega)| &= \frac{K}{\sqrt{(1 - X^2)^2 + 4\zeta^2 X^2}} = K[(1 - X^2)^2 + 4\zeta^2 X^2]^{-\frac{1}{2}} = f(X)
 \end{aligned}$$

Etude de la fonction $f(X)$ pour $X \geq 0$

$$f(0) = 1, \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = 0$$

$$f'(X) = -\frac{1}{2}K[-4X(1 - X^2) + 8\zeta^2 X][(1 - X^2)^2 + 4\zeta^2 X^2]^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(X) = -2XK[X^2 - (1 - 2\zeta^2)][(1 - X^2)^2 + 4\zeta^2 X^2]^{-\frac{3}{2}}$$

Etude du signe de $f'(X)$

$$f'(X) = 0 \Rightarrow X = 0 \vee X^2 - (1 - 2\zeta^2) = 0$$

f' est strictement négative sur \mathbb{R}^{+*} si $\zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ car $X^2 - (1 - 2\zeta^2)$ est positif sur \mathbb{R}^{+*}

si $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ f' est positive pour $0 < X < \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

est nulle pour $X = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

est négative pour $X > \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

Le tableau ci-dessous donne les variations de $A_{dB} = |G(j\omega)|_{dB}$

$\zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$	X	0	$+\infty$
	ω	0	$+\infty$
	$f'(x)$	-	
	$ G(j\omega) $	K	0
	$ G(j\omega) _{dB}$	$20\log(K)$	$-\infty$
$\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$	X	0	$+\infty$
	ω	0	$+\infty$
	$f'(x)$	+	-
	$ G(j\omega) $	K	0
	$ G(j\omega) _{dB}$	$20\log(K)$	$-\infty$

Résonance

On a résonance pour des valeurs du coefficient d'amortissement $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$. La pulsation pour laquelle on a résonance est :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (IV. 15)$$

La valeur du gain à la résonance est :

$$A_{dB}(\omega_r) = 20 \log \left(\frac{K}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \quad (IV. 16)$$

Facteur de surtension Q

Le facteur de surtension exprimé en dB est la différence entre la valeur du gain à la résonance ($A_{dB}(\omega_r)$) et le gain statique ($A_{dB}(0)$) :

$$Q_{dB} = 20 \log \left(\frac{K}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) - 20 \log K = 20 \log \left(\frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \quad (IV. 17)$$

Le facteur de résonance est alors :

$$Q = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (1.18)$$

Asymptotes

$A_{dB}(\omega = 0) = 20 \log K$. La droite $A_{dB} = 20 \log K$ est une asymptote horizontale.

Nous avons :

$$A = |T(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - X^2)^2 + 4\zeta^2 X^2}} = K[(1 - X^2)^2 + 4\zeta^2 X^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{K}{X^2} \left[1 + \frac{2(2\zeta^2 - 1)}{X^2} + \frac{1}{X^4} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Le terme $1 + \frac{2(2\zeta^2 - 1)}{X^2} + \frac{1}{X^4}$ tend vers zéro en hautes fréquences ($\omega \rightarrow +\infty$)

Alors $A(\omega \rightarrow +\infty) = \frac{K}{X^2} \Rightarrow A_{dB}(\omega \rightarrow +\infty) = 20 \log \frac{K}{X^2}$

$$A_{dB}(\omega \rightarrow +\infty) = 20 \log \left(\frac{K}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right) = 20 \log \left(\frac{K\omega_0^2}{\omega^2} \right) = 20 \log(K\omega_0^2) - 40 \log \omega$$

La droite $A_{dB} = 20 \log(K\omega_0^2) - 40 \log \omega$ est une asymptote de la courbe du module en hautes fréquences. Elle présente une pente de -40dB/décade (-12dB/octave) et passe par le point $(\omega = \sqrt{K}\omega_0, 0dB)$

Les deux asymptotes se croisent pour $\omega = \omega_0$.

Diagramme de phase

La phase de la fonction de transfert est :

$$\varphi(X) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2\zeta X}{1 - X^2}\right) & \text{si } 1 - X^2 > 0 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{2\zeta X}{1 - X^2}\right) & \text{si } 1 - X^2 < 0 \end{cases} \quad (IV. 19)$$

Nous avons :

$$\varphi(\omega = 0) = 0, \varphi(\omega \rightarrow \infty) = -\pi \text{ et } \varphi(\omega = \omega_0) = -\frac{\pi}{2}$$

On peut vérifier que la fonction $\varphi'(X)$ est négative sur \mathbb{R}^+ . La fonction $\varphi(X)$ est monotone décroissante, d'où le tableau ci-dessous :

ω	0	ω_0	$+\infty$
φ	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$

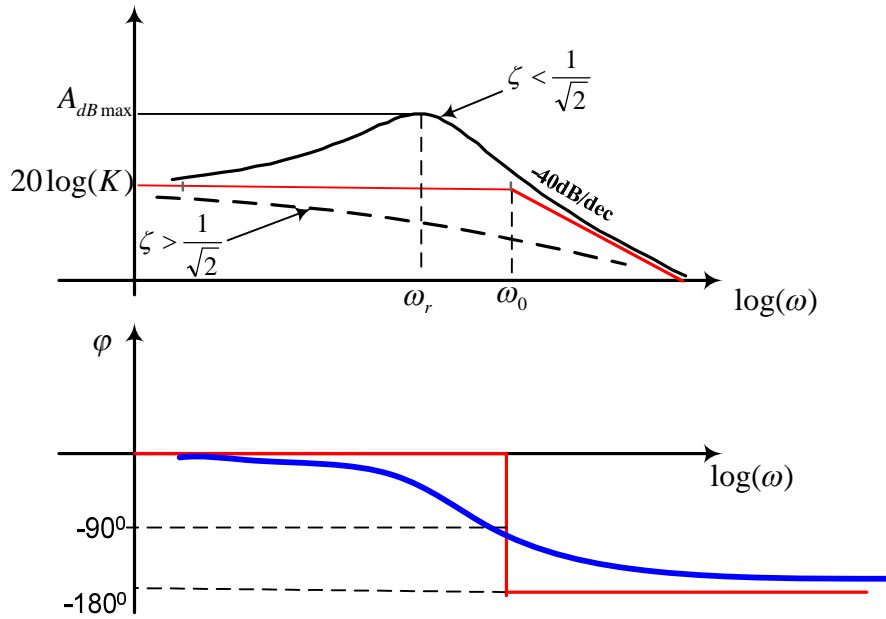


Figure IV.10 : Diagrammes de Bode d'un système du second ordre ($\zeta < 1$)

IV.4.2 Diagramme de Nyquist

$$T(j\omega) = \frac{K}{1 - X^2 + 2j\zeta X} = \frac{K[1 - X^2 - 2j\zeta X]}{(1 - X^2)^2 + 4\zeta^2 X^2} \tag{IV. 20}$$

$$\begin{cases} x = \text{Re}(G(j\omega)) = \frac{K[1 - X^2]}{(1 - X^2)^2 + 4\zeta^2 X^2} \\ y = \text{Im}(G(j\omega)) = \frac{-2K\zeta X}{(1 - X^2)^2 + 4\zeta^2 X^2} < 0 \quad \forall \omega \in [0, +\infty[\end{cases} \tag{IV. 21}$$

Point de départ ($\omega=0$)

$$\begin{aligned} x_0 &= \lim_{\omega \rightarrow 0} x = K \\ y_0 &= \lim_{\omega \rightarrow 0} y = 0^- \end{aligned}$$

Le point de départ est $(x_0, y_0) = (K, 0^-)$.

Point d'arrivée ($\omega \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} x_\infty &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} x = 0^- \\ y_\infty &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} y = 0^- \end{aligned}$$

Le point d'arrivée est $(x_\infty, y_\infty) = (0^-, 0^-)$

Intersection avec l'axe imaginaire

$$\begin{aligned} \text{Re}(\omega) &= \frac{K[1 - X^2]}{(1 - X^2)^2 + 4\zeta^2 X^2} = 0 \Rightarrow X = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0 \\ \text{Im}(X = 1) &= \frac{-2K\zeta X}{(1 - X^2)^2 + 4\zeta^2 X^2} \Big|_{X=1} = \frac{-K}{2\zeta} \end{aligned}$$

Les coordonnées du point d'intersection du lieu avec l'axe imaginaire est $(0, \frac{-K}{2\zeta})$ et à ce point nous avons $\omega = \omega_0$.

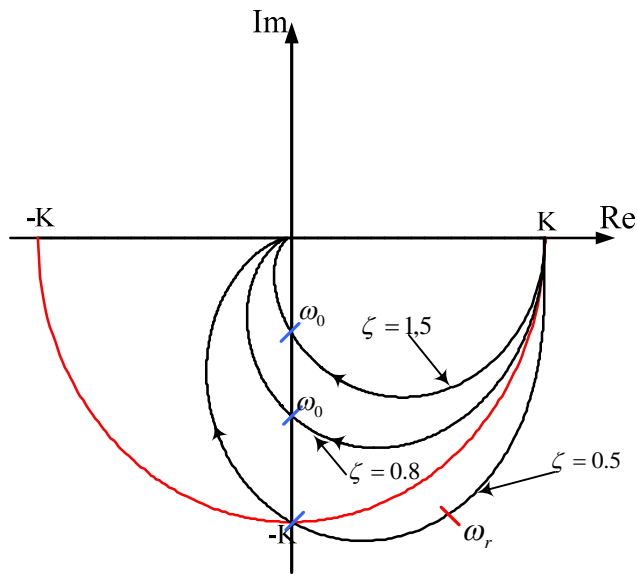


Figure IV.11 : Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre

IV.4.3 Diagramme de Black

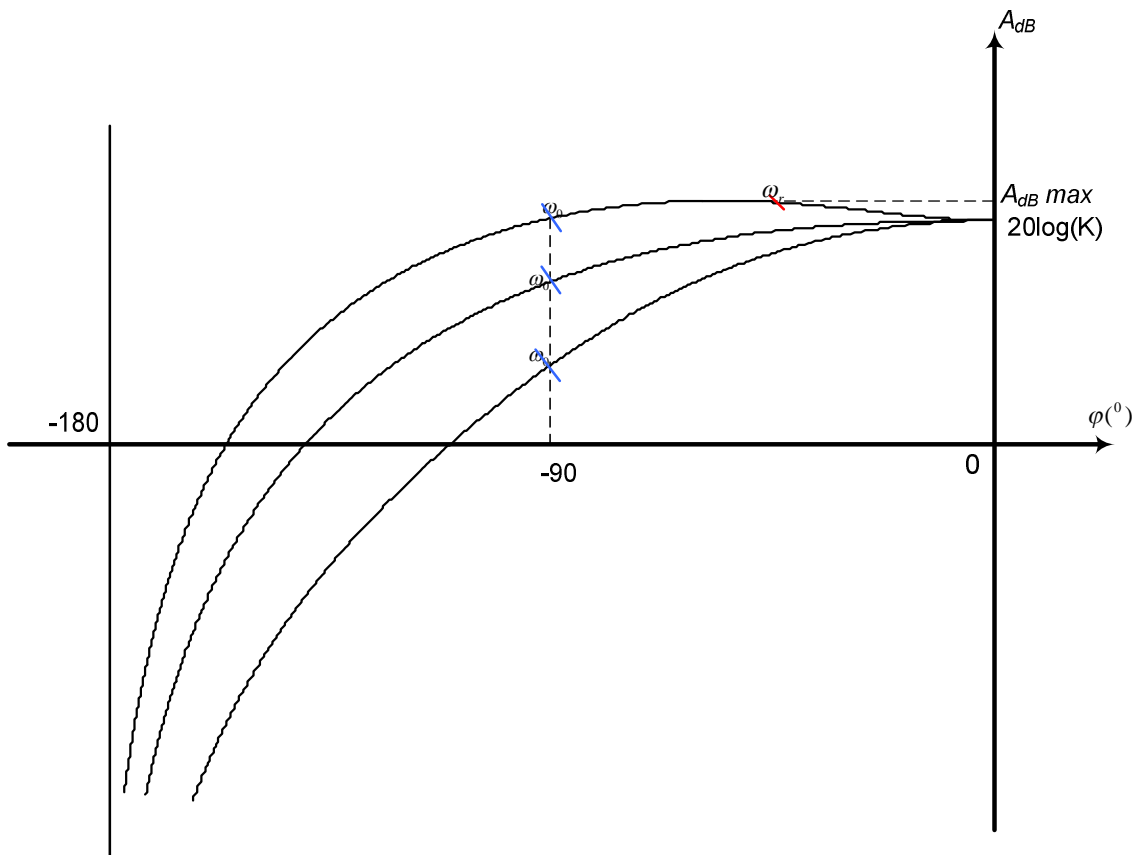


Figure IV.12 : Diagramme de Black d'un système du second ordre

IV.5 Abaque de BLACK-NICHOLS

L'abaque de **BLACK-NICHOLS** permet de déterminer le module et la phase de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$ à retour unitaire à partir de l'étude de la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$.

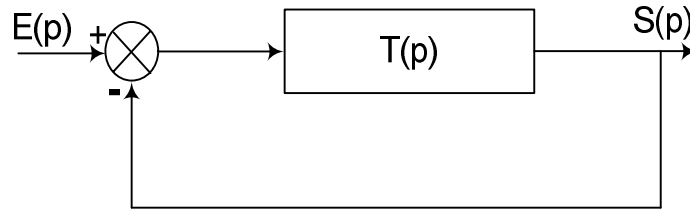


Figure IV.12 : Système asservi à retour unitaire

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \quad (\text{IV. 22})$$

Soit :

$$\varphi = \text{Arg}[T(j\omega)] \quad \text{et} \quad A = |T(j\omega)|$$

posons

$$\psi = \text{Arg}[F(j\omega)] \quad \text{et} \quad B = |F(j\omega)|$$

On peut montrer sans difficulté les relations ci-dessous :

$$B = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 + 2A \cos\varphi}} \quad (\text{IV. 23})$$

$$\psi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\sin\varphi}{A + \cos\varphi}\right) & \text{si } A + \cos\varphi > 0 \\ \arctan\left(\frac{\sin\varphi}{A + \cos\varphi}\right) - \pi & \text{si } A + \cos\varphi < 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } A + \cos\varphi = 0 \end{cases} \quad (\text{IV. 24})$$

$\psi(\omega)$ et $B(\omega)$ sont des fonctions des deux variable A et φ , paramétrées en ω .

L'abaque est constitué de deux réseaux de courbes :

- ✚ Les courbes **isomodules** : telles que le module de $F(p)$ reste constant
- ✚ Les courbes **isophases** : telles que l'argument de $F(p)$ reste constant.

Ce tracé est réalisé dans le plan de BLACK et est appelé **abaque de BLACK-NICHOLS**.

Utilisation de l'abaque :

- Tracer le lieu de $T(j\omega)$ dans le plan de BLACK (utiliser les coordonnées rectangulaires de l'abaque pour reporter les points)
- Lire sur les courbes isom odules et isophases de l'abaque les valeurs des points appartenant à $F(j\omega)$.

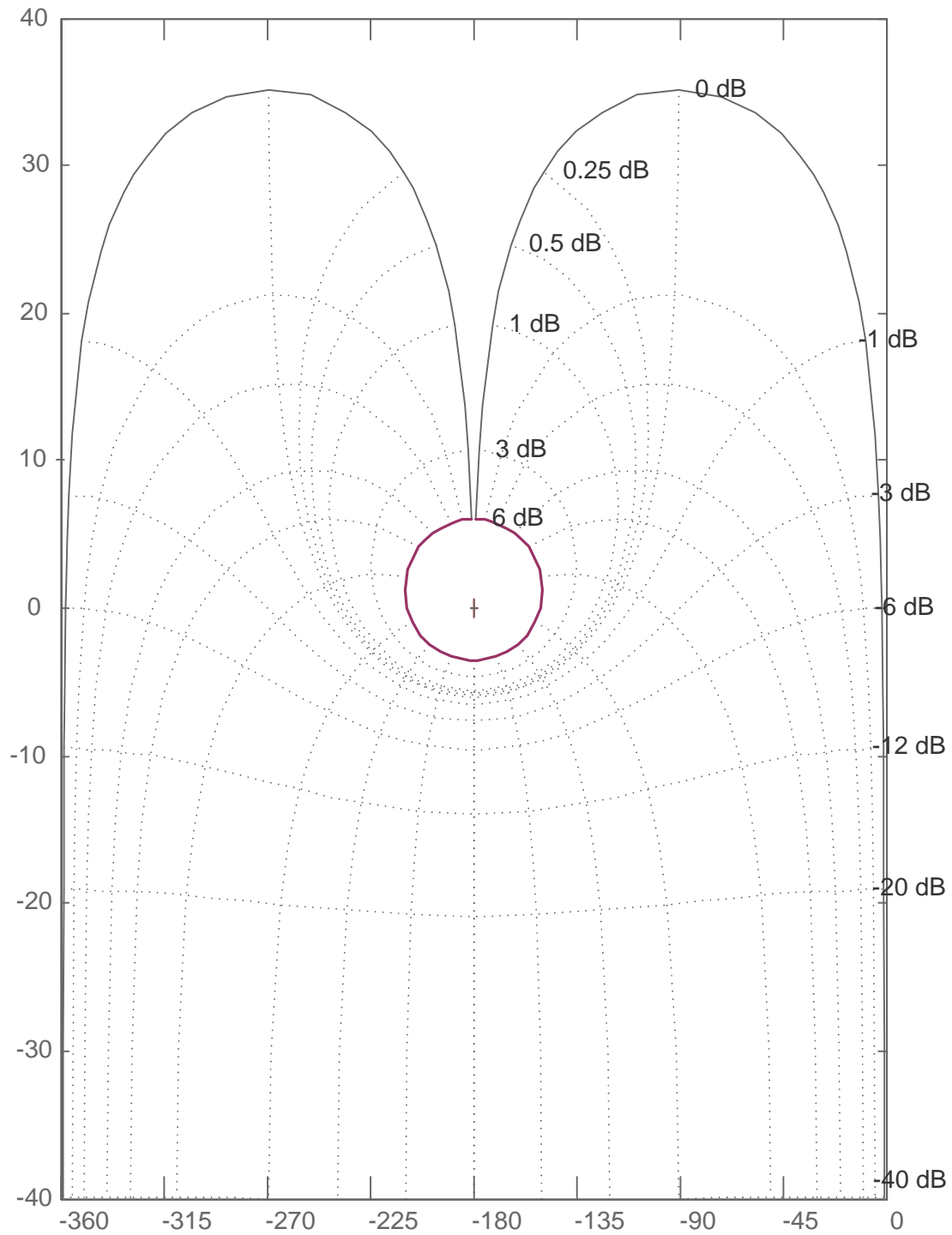


Figure IV.13 : Abaque de BLACK-NICHOLS

Exercice sur le chapitre IV**Exercice N°01**

Tracer les diagrammes de Bode des systèmes suivant :

$$G_1(p) = \frac{20}{p}, G_2(p) = \frac{20}{p(1+p)}, G_3(p) = \frac{(1+p)}{(1+10p)}, G_4(p) = \frac{15}{(1+10p)(1+100p)}$$

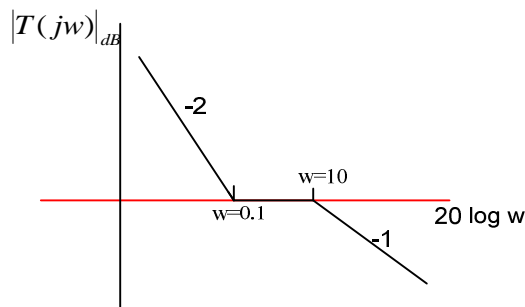
$$G_5(p) = \frac{30}{p^2 + 1.6p + 1}, G_6(p) = \frac{50}{p^2 + p + 1}, G_7(p) = \frac{15}{(1-10p)(1+100p)}$$

Exercice N°02

Soit un système asservis S caractérisé une fonction de transfert en boucle ouverte T(p).

La figure ci-dessous représente le lieu asymptotique de Bode de la fonction T(p).

Sachant que le système S est un système à déphase minimal, déterminer l'expression de T(p)

**Exercice N°03**

Soit le système décrit par la fonction de transfert F(p) :

$$T(p) = \frac{1}{(1+p)(1+10p)}$$

- Déterminer la valeur du coefficient d'amortissement ζ , de la pulsation naturelle ω_n , et du gain statique K_s .
- Tracer les trois diagrammes (Bode, Nyquist et Black) de T(p).

Exercice N°04

Représenter le diagramme de Nyquist de la fonction T(p)

$$T(p) = \frac{10}{p(1+0.5p)(1+5p)}$$

Exercice N°05

Soit la fonction de transfert T(p) avec $a \in \mathbb{R}^+$

$$T(p) = \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$$

- Mettre T(p) sous la forme $T(p) = \alpha + \frac{\beta}{1 + \tau p}$
- En déduire les diagrammes de Nyquist obtenus, selon a est supérieur ou inférieur à 1
- Déterminer la valeur des maxima ou minima de $\varphi = \arg [T(w)]$ ainsi que la pulsation à laquelle ils se produisent.

V.1 Stabilité

V.1.1 Définition :

Un système est dit stable si sa sortie tend vers zéro lorsque l'entrée s'annule.

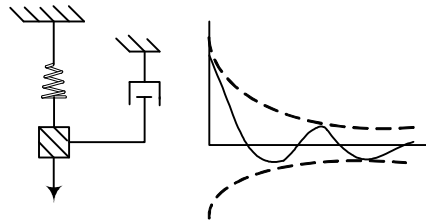


Figure V.1: Système masse ressort avec frottement (**système stable**)

- Soit un système d'ordre n défini par l'équation différentielle suivante :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 e(t) \quad (\text{V. 1})$$

En appliquant la TL, on obtient :

$$Y(p) = \frac{b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_n p + a_0} E(p) \quad (\text{V. 2})$$

Pour étudier la **stabilité** de ce système, il suffit de le soumettre à une impulsion et d'observer l'évolution de sa sortie. Si cette dernière **tend vers zéro** le système est **stable** sinon il est **instable**.

Nous avons dans ce cas (l'entrée est une impulsion) :

$$e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = 1, \text{ d'où :}$$

$$Y(p) = \frac{b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_n p + a_0} \quad (\text{V. 3})$$

$$y(t) = TL^{-1} \left\{ \frac{b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_n p + a_0} \right\}$$

$y(t)$ est en général la somme de termes de la forme ci-dessous :

$$y(t) = \sum_i y_i(t) \quad (\text{V. 4})$$

$$1. \quad y_i(t) = A_\alpha e^{P_\alpha t}$$

avec: P_α est un pôle simple

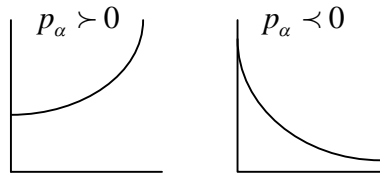


Figure V.2: Réponse impulsionnelle 'pôle réel simple'

$$2. y_i(t) = A_{\beta,k} \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{P_\beta t}$$

avec: P_β est un pôle multiple d'ordre k (exemple pôle double k=2)

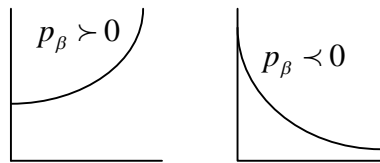


Figure V.3: Réponse impulsionnelle 'pôle réel multiple'

$$3. y_i(t) = A_\alpha (\sin(\omega_\beta t + \varphi)) e^{\sigma_\beta t}$$

avec $\sigma_\beta \mp j\omega_\beta$ sont des pôles complexes conjugués simples

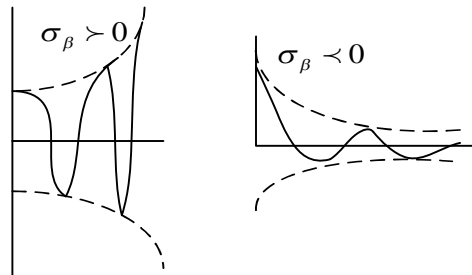


Figure V.4: Réponse impulsionnelle 'deux pôles complexes conjugués simples'

$$4. y_i(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A_{\alpha,k} (\sin(\omega_\beta t + \varphi_k)) e^{\sigma_\beta t}$$

avec $\sigma_\beta \mp j\omega_\beta$ sont des pôles complexes conjugués multiples

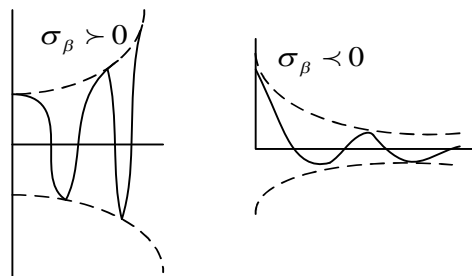


Figure V.5: Réponse impulsionnelle 'deux pôles complexes conjugués multiple'

Conclusion :

Un système linéaire est strictement stable si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative

V.1.2 Stabilité des systèmes en boucle fermée

Soit le système en boucle fermée représenté ci-dessous avec $G(p)$ et $H(p)$ sont respectivement les fonctions de transfert de la chaîne directe et de la chaîne de retour.

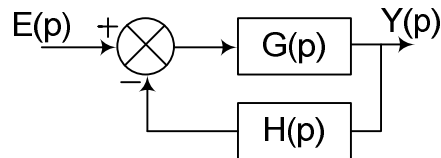


Figure V.6: Système en boucle fermée

$$F(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)} = \frac{G(p)}{1 + T(p)}$$

$T(p) = G(p)H(p)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte associée à $F(p)$.

Les pôles de $F(p)$ sont les racines de **l'équation caractéristique**

$$1 + T(p) = 0 \quad (V.5)$$

- Si $T(p)$ est la FTBO associée à $F(p)$, le système est stable si seulement si l'équation $1+T(p) = 0$ n'a que des solutions (racines) à parties réelles négatives.
- La stabilité de la **BO** n'implique pas nécessairement celle de la BF et inversement.

La connaissance des pôles de la fonction de transfert d'un système (BO, BF) permet de vérifier aisément la stabilité de ce dernier. Cependant il est souvent difficile de calculer les pôles notamment ceux des systèmes bouclés.

Une alternative consiste donc à étudier la stabilité sans passer par le calcul des pôles. On distingue deux approches :

- Approche algébrique ;
- Approche géométrique.

V.1.3 Approche Algébrique de stabilité

Critère de ROUTH

C'est un critère algébrique qui permet de savoir si les racines d'un polynôme sont toutes à partie réelle strictement négative.

Pour un système bouclé, nous allons étudier le dénominateur de la **fonction de transfert en boucle fermée F(p)** :

$$D(p) = 1 + T(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} \dots a_{n-1} p \quad (V.6)$$

Condition 1.

Une condition nécessaire de stabilité est que les **coefficients a_i** du polynôme soient **tous présents et tous de même signe**. Cette condition est généralement vérifiée pour la plupart des systèmes physiques

Condition 2.

Dans le cas où la condition 1 est vérifiée, on construit le **tableau de Routh** à partir des coefficients du polynôme.

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système soit stable est que tous les coefficients de la première colonne soient de même signe.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
p^{n-2}	$b_1 = \frac{a_{n-2}a_{n-1} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$b_2 = \frac{a_{n-4}a_{n-1} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$b_3 = \frac{a_{n-6}a_{n-1} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$...
p^{n-3}	$c_1 = \frac{a_{n-3}b_1 - a_{n-1}b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{a_{n-5}b_1 - a_{n-1}b_3}{b_1}$	$c_2 = \frac{a_{n-7}b_1 - a_{n-1}b_4}{b_1}$...
...
...
p^1
p^0

Remarque :

Le nombre de changement de signe est égal au nombre de racines à partie réelle positive

V.3.1. 1 Cas particuliers

I^{ier} Cas :

Il s'agit d'examiner le cas où tous les termes d'une ligne sont nuls. Cela signifie que $p = \pm j\omega$ est racine de $D(p)$. Le système est donc juste oscillant et l'on peut écrire :

$$D(p) = (p^2 + \omega^2)D_1(p) \quad (V.7)$$

Pour construire la table de ROUTH on applique la méthode suivante :

- ❖ à partir des coefficients de la dernière ligne non nulle on construit un polynôme dit auxiliaire P_{aux} admettant $p = \pm j\omega$ comme racine,
- ❖ on calcule la dérivée de P_{aux} par rapport à p et l'on remplit la ligne nulle par les coefficients de ce polynôme dérivé,
- ❖ on construit la suite de la table de ROUTH. Illustrons le procédé sur un exemple.

Exemple : Etudier la stabilité de la fonction de transfert $F(p)$ admettant comme dénominateur :

$$D(p) = p^4 + 2p^3 + 11p^2 + 18p + 18$$

Puisque tous les coefficients de $D(p)$ sont présents et de même signe, on construit alors la table de ROUTH.

p^4	1	11	18	
p^3	2	18	0	
p^2	2	18	0	Dernière ligne non nulle $P_{aux}(p) = 2p^2 + 18$ ou $P_{aux}(p) = p^2 + 9$ $P'_{aux}(p) = 2p$
p^1	0/2	0/0	0/0	Ligne nulle : on remplace par $P'_{aux}(p) = 2p$
p^0	18	0	0	

On constate, après avoir construit la table de Routh, que les éléments de première colonne sont de même signe.

$$D(p) = p^4 + 2p^3 + 11p^2 + 18p + 18 = (p^2 + 9)(p^2 + 2p + 2) = 0 \Rightarrow p = \pm j3$$

Le système oscille à la pulsation $\omega_{oss} = 3\text{rad/sec}$.

2^{ième} Cas :

Il s'agit du cas où le pivot d'une ligne non nulle est égal à zéro.

Exemple : Etudier la stabilité de la fonction de transfert $F(p)$ admettant comme dénominateur :

$$D(p) = p^4 + 5p^3 + 4p^2 + 20p + 1$$

Puisque tous les coefficients de $D(p)$ sont présents et de même signe, on construit alors la table de ROUTH.

p^4	1	4	1	
p^3	5	20	0	
p^2	0/ε	1	0	ligne non nulle avec un pivot nul on remplace le pivot par ε → 0⁺
p^1	$\frac{20\epsilon - 5}{\epsilon} < 0$	0	0	
p^0	1	0	0	

Il y a deux changements de signe, alors $D(p)=0$ admet deux racines à partie réelle positive. Le système est alors instable.

Sous MATLAB il est possible de calculer les racines de $D(p)$ et ce en utilisant les deux instructions suivantes :

```
%%%%%%%%%%
D=[1 5 4 20 1]
roots(D)
%%%%%%%%%%
```

Les pôles sont : -4.9931, 0.0218 + 1.9918i, 0.0218 - 1.9918i et -0.0505. Il y a effectivement deux pôles à partie réelle positive.

V.1.4. Critères géométriques (Graphiques)

L'objectif de ces critères est d'obtenir des renseignements sur la stabilité d'un système en boucle fermée à partir du lieu de sa fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$.

V.1.4.1. Critères du revers

Les critères du revers sont valables pour les systèmes à déphase minimal, c'est à dire les systèmes pour lesquels la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ n'a ni de pôles ni de zéros à partie réelle positive.

V.1.4.1.1. Critère du revers dans le plan de NYQUIST

Un système à déphase minimal sera stable en boucle fermée si le lieu de transfert de NYQUIST (de $T(p)$) parcouru dans le sens des pulsations (ω) croissantes laisse le point -1 (point critique) sur sa gauche.

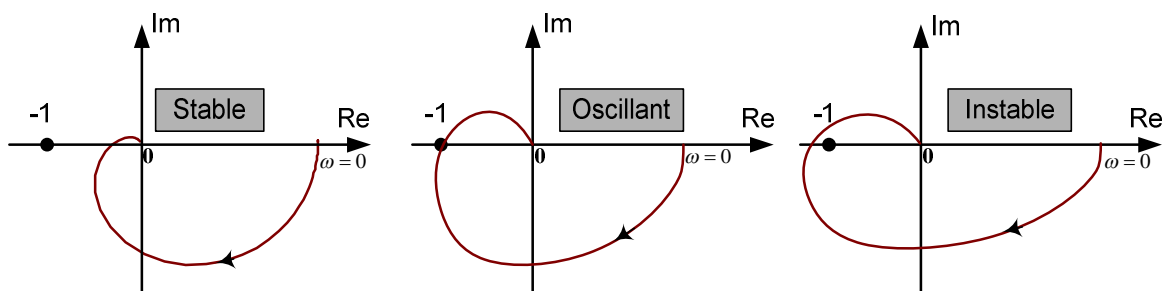


Figure V.7: Stabilité dans le plan de Nyquist

V.1.4.1.2. Critère du revers dans le plan de BLACK

Un système à déphase minimal sera stable en boucle fermée si le lieu de transfert de BLACK (de $T(p)$) parcouru dans le sens des pulsations (w) croissantes laisse le point critique ($A_{dB} = 0$, $\varphi = -180^\circ$) sur sa droite.

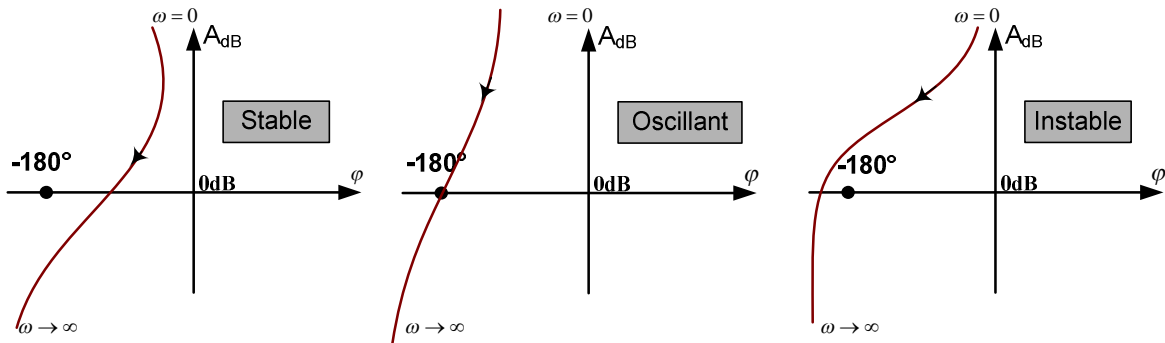


Figure V.8: Stabilité dans le plan de Black

V.1.4.1.3. Critère du revers dans le plan de BODE

Un système à déphase minimal sera stable en boucle fermée si le gain en BO est inférieur à 1 (ou $< 0dB$) lorsque le déphasage atteint -180° .

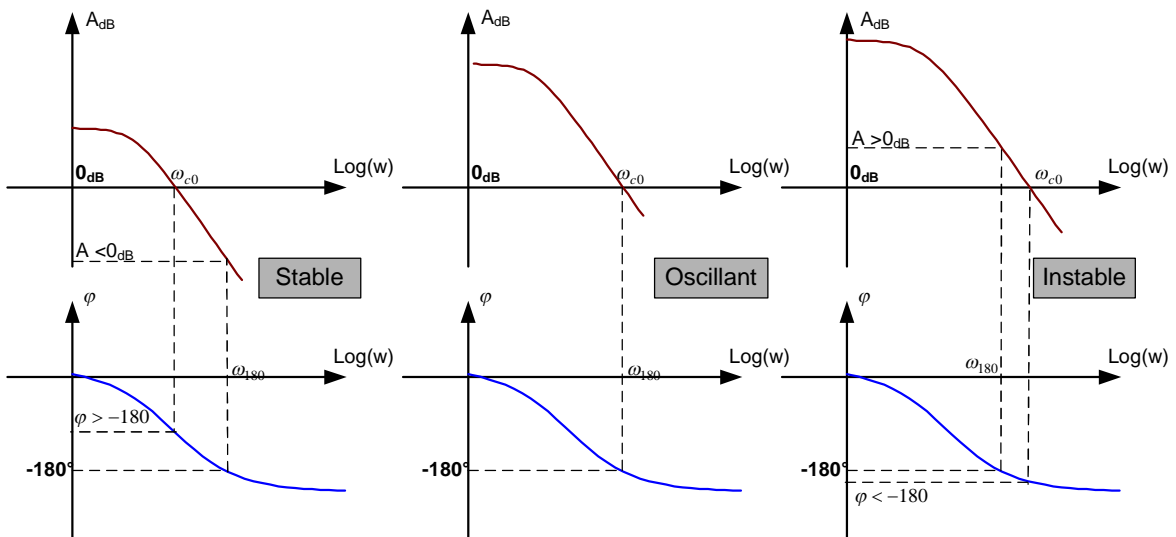


Figure V.9: Stabilité dans le plan de Bode

Nous définissons les deux pulsation : ω_{c0} et ω_{180}

$$\|T(\omega_{c0})\|_{dB} = 0dB \text{ ou } \|T(\omega_{c0})\| = 1 \quad (V.8)$$

$$\varphi(\omega_{180}) = -180^\circ \quad (V.9)$$

V.1.4.2 Etude de la stabilité par le Critère de Nyquist

V.1.4.2.1 Théorème de Cauchy

Si un point M (d'affixe p) décrit dans le plan complexe un contour fermé C dans le sens des aiguilles d'une montre, entourant P pôles et Z zéros d'une fonction $A(p)$ de la variable complexe p , alors l'image du point M par l'application $A(p)$ entoure $P-Z$ fois l'origine dans le sens trigonométrique (contour orienté dans le sens trigonométrique).

Nous avons :

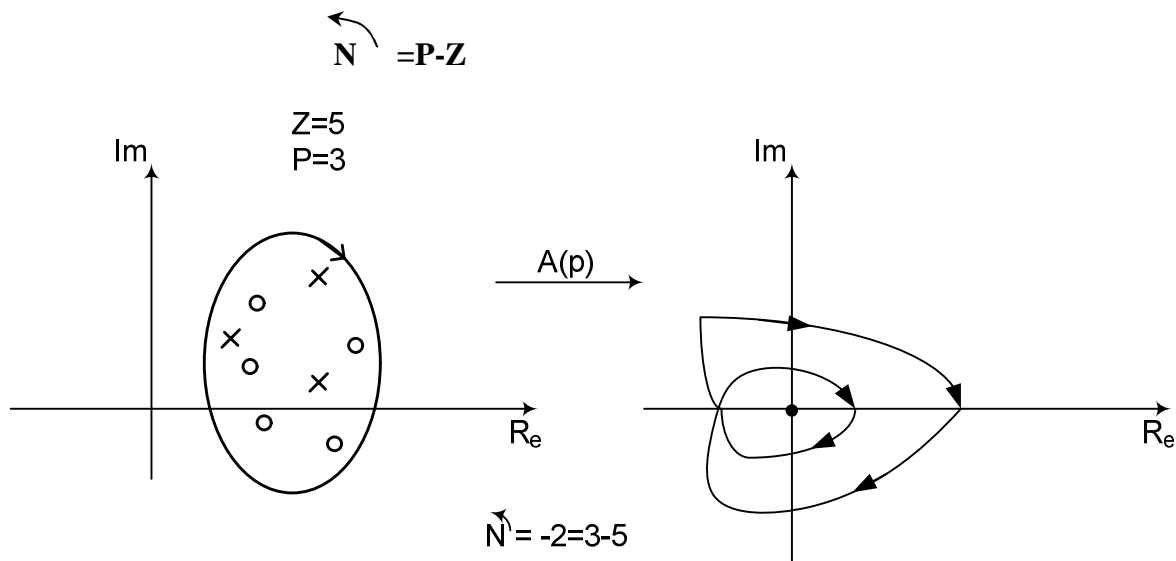


Figure V.10: Illustration du théorème de Cauchy

V.1.4.2.2 Application au critère de Nyquist

Considérons la transformation $A(p)=1+T(p)$ et le contour C représenté ci-dessous. On désire que $1+T(p)$ n'ait pas de zéro à l'intérieur de C ($Z=0$). L'image de C par $1+T(p)$ doit donc entourer l'origine dans le sens direct (sens trigonométrique) un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de $1+T(p)$ (donc de $T(p)$).

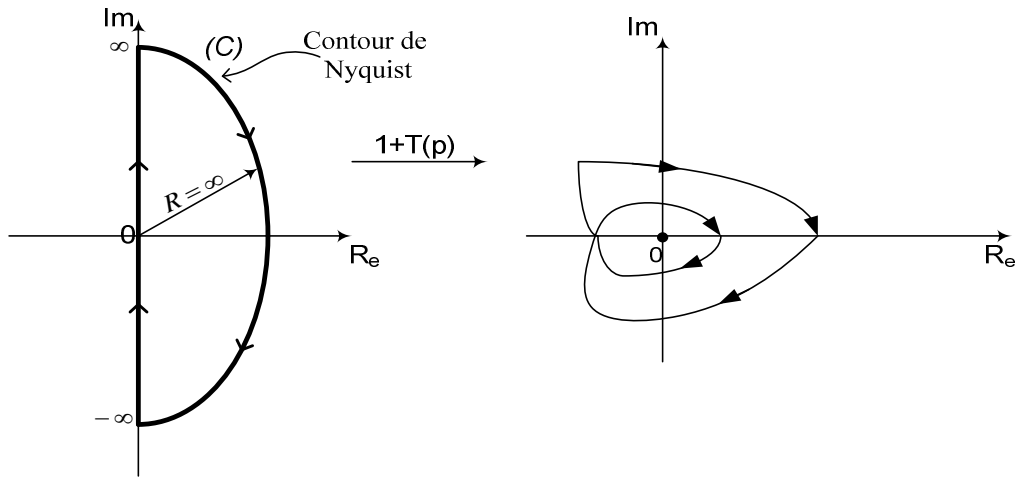


Figure V.11: Application du critère de Cauchy à l'étude de la stabilité

Remarque :

Le nombre de tours de la transformation $1+T(p)$ autour de l'origine est égal au nombre de tour de la transformation $T(p)$ au tour du **point -1**

Ce **point -1** dans le plan complexe est appelé **point critique**.

Nous étudierons donc l'image de contour C (contour de Nyquist) par la transformation $T(p)$ et nous comptons le nombre de tours dans le sens direct autour du point critique **-1**.

Comment dessiner l'image du contour C ?

Exemple :

$$T(p) = \frac{K}{(p+a)(p+b)(p+c)}$$

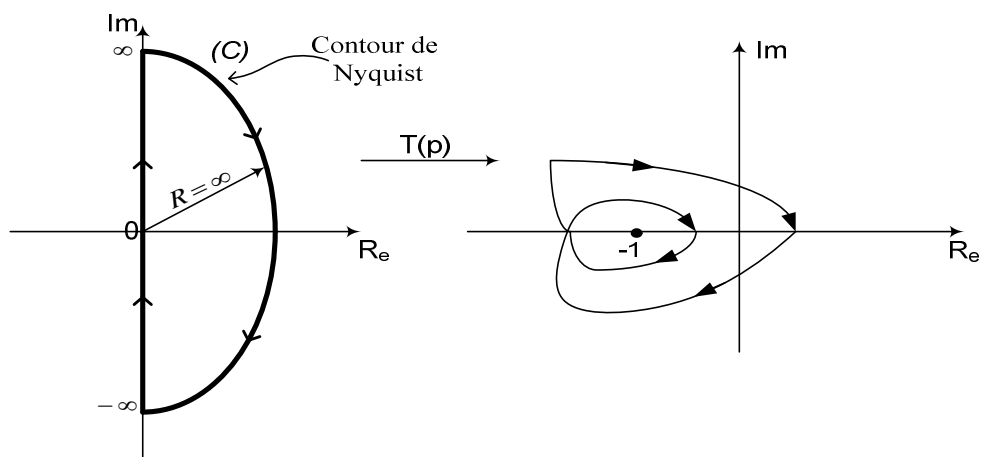


Figure V.12: Image du contour de Nyquist

- L'image du segment $[0, +\infty[$, est le tracé de la boucle ouverte $T(p)$ dans le plan de Nyquist décrit dans le sens des ω croissants.
- L'image du segment $]-\infty, 0]$ est symétrique de la précédente par rapport à l'axe réel.
- L'image du demi-cercle de rayon infini est réduite à un point (en général l'origine) si le système est physiquement réalisable.

V.1.4.2.3. Enoncé du critère de Nyquist

Pour qu'un système soit stable en boucle fermée, il faut et il suffit que le lieu de Nyquist de la fonction en boucle ouverte $T(p)$, complètement complété et décrit dans le sens de ω croissants, fasse autour du point -1 dans le sens direct un nombre de tours égal au nombre de pôles de $T(p)$ à partie réelle positive.

V.1.4.2.4. Cas particuliers (pôles sur l'axe imaginaire)

1. Cas de pôles simples ou multiple à l'origine ($p=0$)
2. Cas de paire de pôles imaginaires purs conjugués ($p=\pm j\omega$).

Lorsqu'il y a des pôles de $T(p)$ sur l'axe imaginaire, on les fait alors éviter au contour de Nyquist à l'aide de petits demi-cercles de rayon, situés dans le demi-plan complexe de droite, et en fait tendre ρ vers zéro. (Voir le figure ci-dessous)

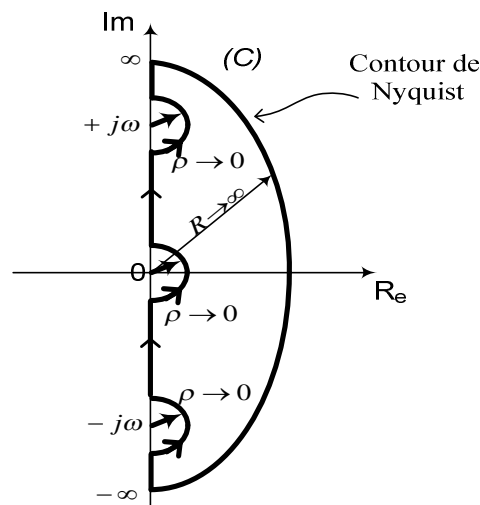


Figure V.13: Contour de Nyquist en présence de pôle à l'origine ou de pôles imaginaires purs
Des exemples de pôles à l'origine seront étudiés durant la séance de TD.

V.1.5. Conditions de stabilité pratique

Un système à la limite de la stabilité est mal amorti. Son bon fonctionnement n'est pas assuré car une faible modification de ses caractéristiques peut le rendre instable. Les lieux de transfert peuvent être obtenus par modélisation ou expérimentalement. Quelle que soit la méthode utilisée, ces lieux ne sont pas connus de façon exacte.

Ces raisons expliquent qu'en pratique, on ne se contente pas de réaliser un système théoriquement stable. On assure la stabilité en prenant des **marges de sécurité**. Ces marges se traduisent par une distance à respecter entre le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte et le point critique d'affixe -1.

V.1.5.1. Marge de gain (ΔG)

L'affixe du point critique a pour module 1 et pour argument -180° . Lorsque l'on se fixe une marge de gain, on se donne une distance à respecter entre le point critique et le point de la FTBO pour lequel la phase vaut -180° . Une valeur de **marge de gain couramment utilisée est 6dB** (une marge de 6dB, autorise une variation de 100% du gain de boucle sans risque d'instabilité).

V.1.5.2. Marge de phase ($\Delta\phi$)

La marge de phase est la différence de phase entre la phase du point de la FTBO de module 1 et la phase du point critique (-180°).

On utilise couramment **une marge de phase de 45°** qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes

Remarques :

- La représentation de BODE permet une lecture directe de la marge de gain en dB

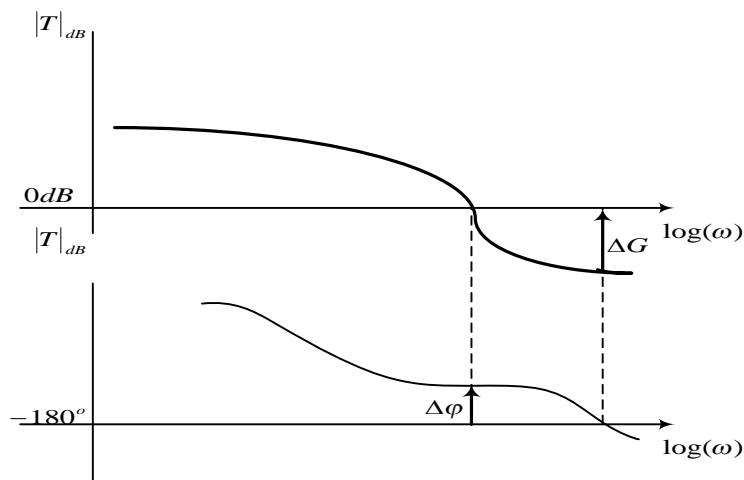


Figure V.14: Marges de gain et de phase dans le plan de Bode

Dans le plan de BODE

$$\Delta\phi = 180 + \varphi(\omega_{c0}) \quad (\text{V. 10})$$

$$\Delta G = -\|T\|_{dB}(\omega_{180}) \quad (\text{V. 11})$$

Dans le plan de BLACK, la marge de gain se lit aussi directement en dB.

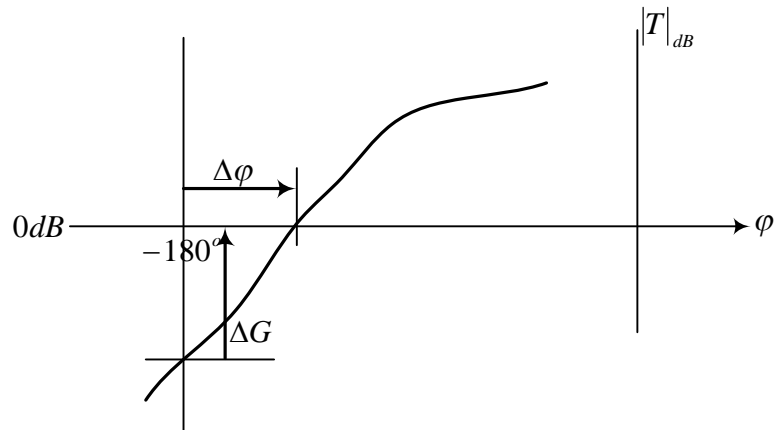


Figure V.15: Marges de gain et de phase dans le plan de Black

Dans le plan de NYQUIST, la marge de gain et de phase sont mesurées comme suit :

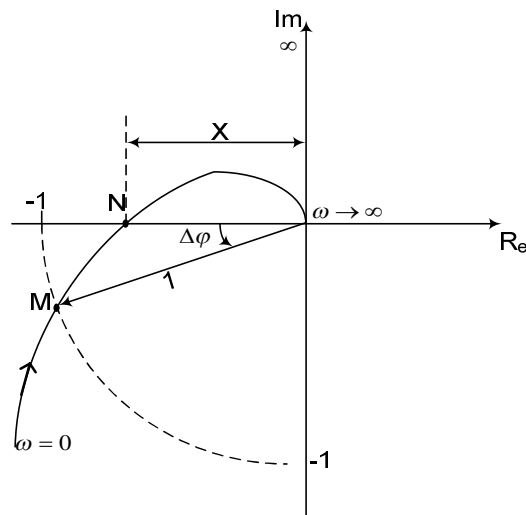


Figure 16: Marges de gain et de phase dans le plan de Nyquist

Le point **M** est défini par l'intersection du lieu de Nyquist de **T(p)** avec le cercle centré à l'origine et de rayon unité.

Le point **N** est défini par l'intersection du lieu de Nyquist avec le demi-axe réel négatif.

- La marge de phase $\Delta\phi$ est l'angle orienté $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})$.

- la marge de gain, exprimée en dB, est ΔG :

$$\Delta G = -20 \log(X), X = \|\overrightarrow{ON}\|$$

V.2. PRECISION

Considérons le système asservi ci-dessous:

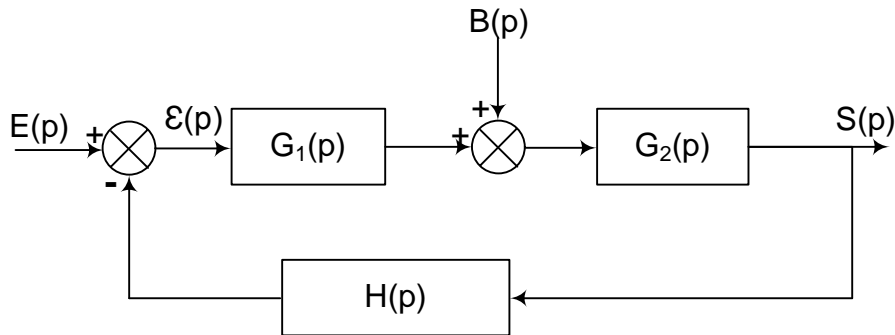


Figure V.17: Système asservi avec perturbation

Ce système asservi est conçu afin de faire suivre à la sortie $s(t)$ une loi déterminée par l'entrée $e(t)$. La qualité d'un tel système se jugera :

- ✚ par sa stabilité
- ✚ par la précision avec laquelle la loi est suivie

Afin d'évaluer la précision de ce système, on définit à tout instant l'écart (ou l'erreur) (t) .

Le cas idéal de point de vue précision est d'avoir à chaque instant $\epsilon(t) = 0$. Cependant l'entrée $e(t)$ peut varier au cours du temps et le système est soumis à divers perturbations. l'écart n'est pratiquement jamais nul.

Remarques:

- Minimiser ou annuler l'écart quant **l'entrée $e(t)$ varie au cours du temps**, c'est résoudre un **problème de poursuite**.
- Minimiser ou annuler l'écart quant **l'entrée $e(t)$ est constante**, c'est résoudre un **problème de régulation**.

V.2.1 Etude avec perturbation nulle "Précision vis à vis l'entrée"

Dans ce cas-là, le schéma de la figure ci-dessus se simplifie et on obtient le schéma-bloc ci-dessous:

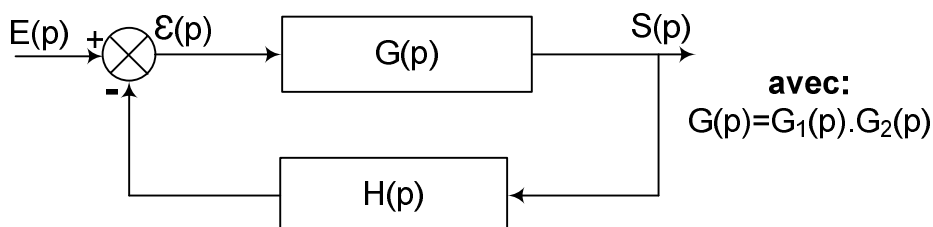


Figure V.18: Système asservi sans perturbation

Expression de l'écart $\varepsilon(p)$

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= E(p) - S(p) \cdot H(p) \\ S(p) &= \varepsilon(p) \cdot G(p) \end{aligned} \Rightarrow \varepsilon(p) = E(p) - G(p) \cdot H(p) \cdot \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p)[1 + G(p) \cdot H(p)] = E(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + T(p)} \quad \text{avec } T(p) = G(p) \cdot H(p) : \text{FTBO.}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + T(p)} \quad (V. 12)$$

L'écart $\varepsilon(p)$ ne dépend que de l'entrée et de la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$

L'écart, comme la variable de sortie $s(t)$, comporte une partie transitoire et une partie permanente.

- Au cours du régime transitoire, il est appelé l'écart dynamique ε_d (précision dynamique)
- Au cours du régime permanent, il est appelé l'écart statique ε_s (précision statique) .

Ecart statique

L'écart en régime permanent est la valeur de $\varepsilon(t)$ quand t tend vers l'infini:

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) \quad (V. 13)$$

Pour obtenir ε_s à partir de $\varepsilon(p)$, il faut appliquer le théorème de la valeur finale:

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + T(p)}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + T(p)} \quad (V. 14)$$

Ecart de position " ε_p "

C'est l'écart quand l'entrée $e(t)$ est un échelon.

Nous avons de ce cas:

$$e(t) = E_0 \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p} \quad \text{avec } E_0 \text{ l'amplitude de l'échelon}$$

l'expression de ε_p est :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{E_0}{p}}{1 + T(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + T(p)}$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + T(p)} \quad (V. 15)$$

La forme générale de $T(p)$ est :

$$T(p) = K \frac{1 + b_1p + b_2p^2 + b_3p^3 + \dots + b_m p^m}{p^\alpha (1 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \dots + a_n p^n)} \quad (V.16)$$

α : correspond à la classe du système ou encore au nombre d'intégrateurs présents dans la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ et K est le gain de la fonction de transfert $T(p)$.

$$T(p) = K \frac{N(p)}{p^\alpha D(p)} / N(0) = D(0) = 1$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + T(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + K \frac{N(p)}{p^\alpha D(p)}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} \\ \varepsilon_p &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 p^\alpha}{p^\alpha + K} \end{aligned} \quad (V.17)$$

si $\alpha=0$ ($T(p)$ est de classe zéro) alors:

$$\varepsilon_p = \frac{E_0}{1 + K}$$

si $\alpha \geq 1$ ($T(p)$ est de classe ≥ 1) alors:

$$\varepsilon_p = 0$$

- Pour annuler l'erreur de position, il faut au moins une intégration dans la fonction de transfert boucle ouverte $T(p)$ ($\alpha \geq 1$)
- Si $T(p)$ est de classe 0, l'erreur diminue quand le gain K augmente.

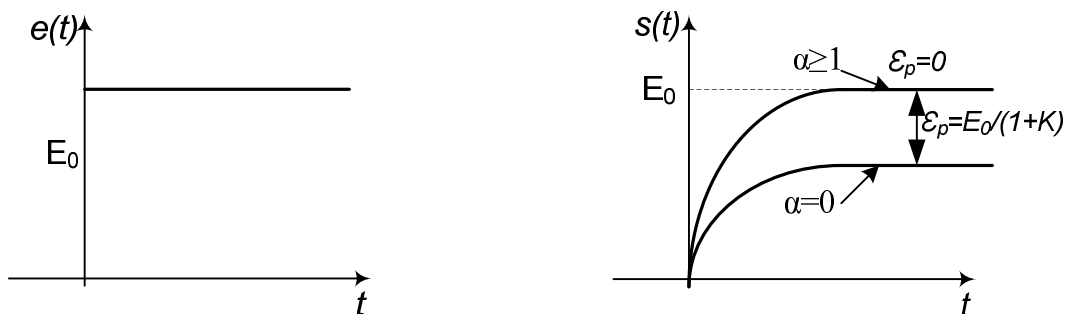


Figure V.19: Erreur de position

Ecart de vitesse (traînage) " ε_v "

Cet écart est défini pour une entrée en rampe

$$e(t) = a \cdot t \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p^2}$$

Dans ce cas, nous avons:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{a}{p^2}}{1 + T(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p[1 + T(p)]} \\ \varepsilon_v &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p \left[1 + K \frac{N(p)}{p^\alpha D(p)} \right]} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{ap^{\alpha-1} D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} \\ \varepsilon_v &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{ap^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} \end{aligned} \tag{V.18}$$

si $\alpha=0$ ($T(p)$ est de classe zéro) alors:

$$\varepsilon_v = +\infty$$

si $\alpha=1$ ($T(p)$ est de classe 1) alors:

$$\varepsilon_v = \frac{a}{K}$$

si $\alpha \geq 2$ ($T(p)$ est de classe ≥ 2) alors:

$$\varepsilon_v = 0$$

- Pour annuler l'erreur de position, il faut au moins deux (2) intégrations dans la fonction de transfert boucle ouverte $T(p)$ ($\alpha \geq 2$)
- Si $T(p)$ est de classe 1, l'erreur de vitesse diminue quand le gain K augmente.

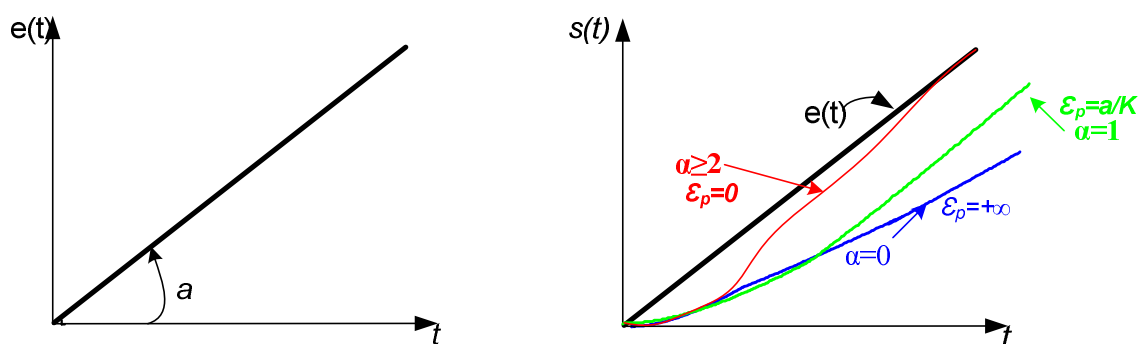


Figure V.20: Erreur de vitesse

Ecart en accélération " ε_a "

Cet écart est défini pour une entrée sous forme parabolique.

$$e(t) = a \cdot \frac{t^2}{2} \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p^3}$$

on peut vérifier aisément que :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{ap^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} \quad (V.19)$$

si $\alpha=0 \vee \alpha = 1$ ($T(p)$ est de classe zéro ou de classe 1) alors:

$$\varepsilon_a = +\infty$$

si $\alpha=2$ ($T(p)$ est de classe 2) alors:

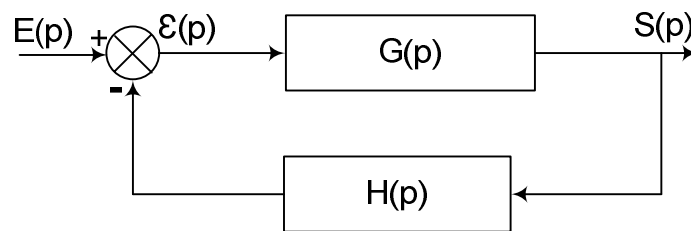
$$\varepsilon_a = \frac{a}{K}$$

si $\alpha \geq 3$ ($T(p)$ est de classe ≥ 3) alors:

$$\varepsilon_a = 0$$

- Pour annuler l'erreur de position, il faut au moins deux (3) intégrations dans la fonction de transfert boucle ouverte $T(p)$ ($\alpha \geq 2$)
- Si $T(p)$ est de classe 2, l'erreur en accélération diminue quand le gain K augmente.

Tableau récapitulatif



$$T(p) = G(p) \cdot H(p) = K \frac{N(p)}{p^\alpha D(p)} \text{ avec } N(0) = D(0) = 1$$

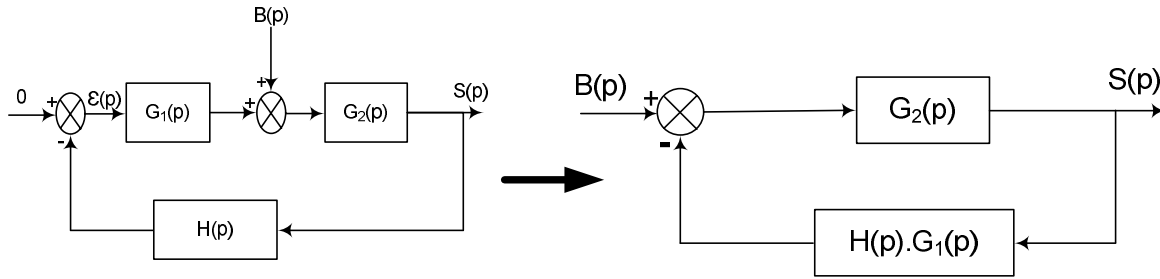
	classe 0 $\alpha=0$	classe 1 $\alpha=1$	classe 2 $\alpha=2$	classe 3 $\alpha=3$
Ecart de position	$\frac{E_0}{1 + K}$	0	0	0
Ecart de vitesse	$+\infty$	$\frac{a}{K}$	0	0
Ecart en accélération	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{a}{K}$	0

Pour diminuer l'écart en régime permanent, il faut augmenter soit:

- ✚ La gain K
- ✚ La classe α du système c'est à dire le nombre d'intégrateurs dans $T(p)$

V2.2. Etude avec entrée nulle "Précision vis à vis des perturbations"

Dans ce cas-là, le schéma de la figure devient :



La sortie $S(p)$ dû à la perturbation $B(p)$ est :

$$S(p) = \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p)H(p)} B(p) \tag{V. 20}$$

Et comme l'écart $\varepsilon(p) = E(p) - H(p) \cdot S(p)$, on obtient l'écart dû à la perturbation :

$$\varepsilon_B(p) = -H(p) \cdot S(p) = \frac{-H(p)G_2(p)}{1 + G_1(p)H(p)} B(p) \tag{V. 21}$$

Il suffit donc d'avoir $\varepsilon_B(p) = 0$ pour que la sortie du système ne sera pas affectée par la perturbation.

Perturbation en échelon:

La perturbation $b(t)$ est un échelon $b(t) = B_0 u(t) \Rightarrow B(p) = \frac{B_0}{p}$

L'écart en régime permanent dû à la perturbation est égale à :

$$\varepsilon_B = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{-H(p)G_2(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)H(p)} B(p)$$

Notons:

$$G_1(p) = K_1 \frac{N_1(p)}{p^{\alpha_1} D_1(p)} \text{ et } G_2(p)H(p) = K_2 \frac{N_2(p)}{p^{\alpha_2} D_2(p)} \quad / N_1(0) = N_2(0) = D_1(0) = D_2(0) = 1$$

$$\varepsilon_B = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{-H(p)G_2(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)H(p)} \frac{B_0}{p} = -\lim_{p \rightarrow 0} \frac{B_0 \cdot K_2 \cdot N_2(p) \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} D_1(p) \cdot D_2(p) + K_1 \cdot N_1(p) \cdot K_2 \cdot N_2(p)}$$

$$\varepsilon_B = -\lim_{p \rightarrow 0} \frac{B_0 \cdot K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \tag{V. 22}$$

Examinant la valeur ε_B en fonction de α_1 et α_2

	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 > 0$	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 > 0$
ε_B	$\frac{B_0 \cdot K_2}{1 + K_1 \cdot K_2}$	$\frac{B_0}{K_1}$	0	0

Conclusion

En réponse à une perturbation en échelon, un système comportant au moins une intégration en amont du point d'entrée de cette perturbation, aura un écart nul.

Ainsi il est clair que l'insertion d'un correcteur doit être faite juste derrière le comparateur.

Perturbation en rampe

Par un raisonnement similaire aux précédents, on aurait:

$$\varepsilon_B = -\lim_{p \rightarrow 0} \frac{B_0 \cdot K_2 \cdot p^{\alpha_1 - 1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \tag{V. 23}$$

Résultat :

	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 \geq 2$
ε_B	$+\infty$	$\frac{B_0}{K_1}$	0

En réponse à une perturbation en rampe, un système comportant au moins deux intégrations en amont du point d'entrée de cette perturbation, aura un écart nul. Une augmentation du gain K_1 en amont du point d'entrée de la perturbation diminue l'écart d'un système comportant une seule intégration.

V.2.3. Erreur transitoire (Précision dynamique)

Ecart permanent vis a vis d'une entrée sinusoïdale (Perturbation nulle)

On considère une entrée sinusoïdale de la forme :

$$e(t) = E_0 \sin(\omega_0 t) \tag{V. 24}$$

Comme l'écart $\varepsilon(p)$ est égal à :

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + T(p)}$$

L'écart $\varepsilon_E(t)$ en régime permanent est un signal harmonique:

$$\varepsilon_E(t) = \left| \frac{E_0}{1 + T(j\omega_0)} \right| \sin(\omega_0 t - \arg[1 + T(j\omega_0)]) \quad (V.25)$$

Ainsi, le module de l'erreur $\varepsilon_E(t)$ est, approximativement, inversement proportionnelle au gain de la FTBO $T(p)$ à la pulsation ω_0 .

La connaissance du diagramme de BODE de $T(j\omega)$ permet de déterminer $1 + T(j\omega_0)$ et d'évaluer en conséquence le module de l'erreur. Si le module de l'erreur doit rester inférieur à une valeur donnée $\varepsilon_{E_{max}}$ on détermine la valeur du gain K à adopter.

Méthode de la sinusoïde équivalente

On cherche à maintenir l'erreur dynamique inférieure à une valeur $\varepsilon_{E_{max}}$. Pour un signal d'entrée quelconque, l'expression de l'erreur dynamique est souvent complexe. Cependant s'il existe une limitation des signaux d'entrée en vitesse et en accélération, il est possible d'obtenir une condition caractérisant la précision exigée.

Le signal d'entrée est alors défini par :

$$\begin{aligned} v &\leq v_{max} \\ \gamma &\leq \gamma_{max} \end{aligned} \quad (V.26)$$

Parmi les signaux satisfaisant ces conditions, le signal sinusoïdal est de loin le plus simple.

Soit $e(t) = E_0 \sin(\omega_0 t)$ un tel signal.

La vitesse maximale de ce signal est $v_{max} = E_0 \omega_0$ et l'accélération maximale est $\gamma_{max} = E_0 \omega_0^2$.

On a :

$$E_0 = \frac{v_{max}^2}{\gamma_{max}} \quad \wedge \quad \omega_0 = \frac{\gamma_{max}}{v_{max}}$$

La condition à satisfaire est :

$$\left| \frac{E_0}{1 + T(p)} \right| < \varepsilon_{E_{max}}$$

d'où :

$$\left| \frac{\frac{v_{max}^2}{\gamma_{max}}}{1 + T(p)} \right|_{p=j\frac{\gamma_{max}}{v_{max}}} < \varepsilon_{E_{max}}$$

On obtient :

$$|1 + T(p)|_{p=j\frac{\gamma_{max}}{v_{max}}} \geq \frac{v_{max}^2}{\gamma_{max} \varepsilon_{E_{max}}}$$

Notons que cette condition est nécessaire et peut dans certains cas n'être pas suffisante.

V.3 Rapidité

V.3.1 Réponse transitoire

Considérons un système peu amorti d'un ordre supérieur à deux (approximé par deux pôles complexes conjugués dominants), soumis à une entrée échelon, dont la réponse est donnée ci-dessous:

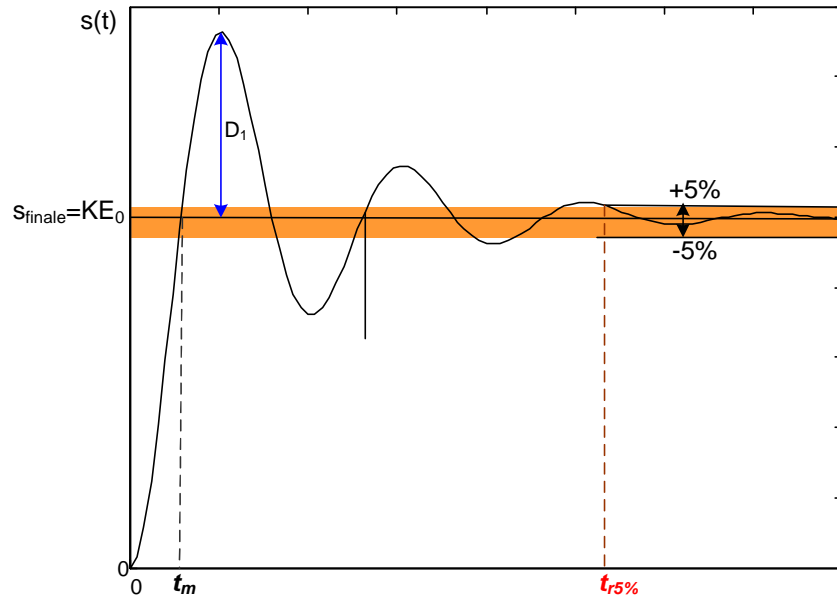


Figure V.21: Réponse indicielle d'un système peu amorti

Le temps de réponse à 5% noté $t_{r5\%}$ est défini comme le temps à partir duquel la réponse du système entre définitivement dans la zone des 5% autour de sa valeur finale.

Le **temps de montée** est le temps au bout duquel la réponse passe pour la première fois à sa valeur finale. Il est défini lorsque le régime transitoire est oscillant.

Généralement ces deux grandeurs sont utilisées pour caractériser la rapidité d'un système. Plus ces grandeurs sont faibles, plus le système est rapide.

Exemple : La système 1 est plus rapide que le système 2

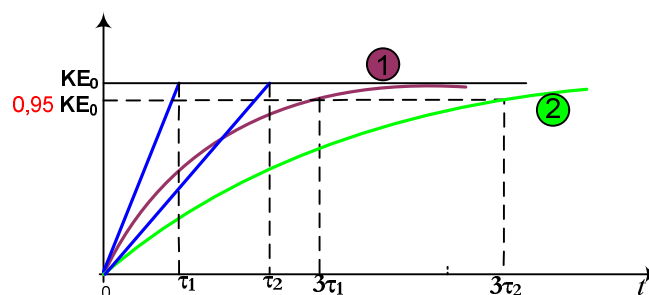


Figure V.22: Comparaison entre deux systèmes du premier ordre

V.3.2 Réponse fréquentielle

V.3.2.1 Bande passante

On appelle **bande passante à -3dB** (ou à -6dB) d'un système l'ensemble des pulsations pour lesquelles le signal de sortie subit un affaiblissement inférieur à 3dB (ou 6 dB) par rapport à sa valeur pour $\omega=0$.

$$F_{dB} - F_{dB}(0) > -3dB \text{ (ou } -6dB)$$

Cette définition fait intervenir la pulsation de coupure à -3dB (ou à -6dB).

On appelle aussi **bande passante** la plage de pulsations ou de fréquences pour laquelle le signal de sortie subit un affaiblissement égal à sa valeur pour $\omega =0$. Cette autre définition fait intervenir la pulsation de coupure ω_{c0} . (pulsation de coupure à 0dB).

Le diagramme de Bode en amplitude de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$ affecte le plus souvent une des formes ci-dessous:

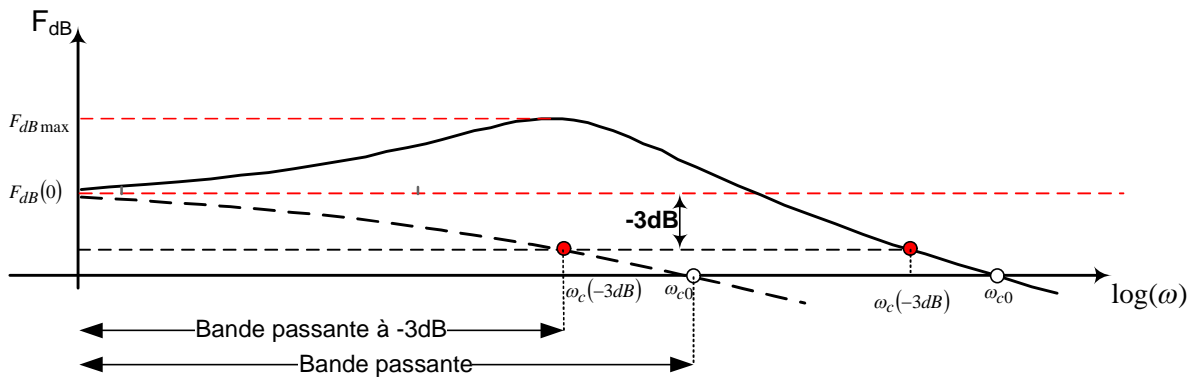
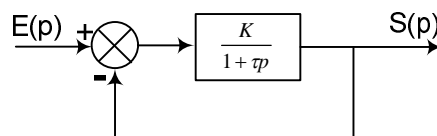


Figure V.23: Bande passante et pulsation de coupure

V.3.2.1 Relation entra la bande passante et la rapidité d'un système

Soit un système asservi à retour unitaire de fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$:

$$T(p) = \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{N(p)}{D(p)}$$



Sa fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$ vaut:

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{N(p)}{N(p) + D(p)} = \frac{K}{K + 1 + \tau p} = \frac{\frac{K}{K+1}}{1 + \frac{\tau}{K+1}p}$$

$F(p)$ est une fonction de premier ordre de gain $\frac{K}{K+1}$ et de constante de temps $\frac{\tau}{K+1}$

Si l'on trace le diagramme de gain de $F(p)$:

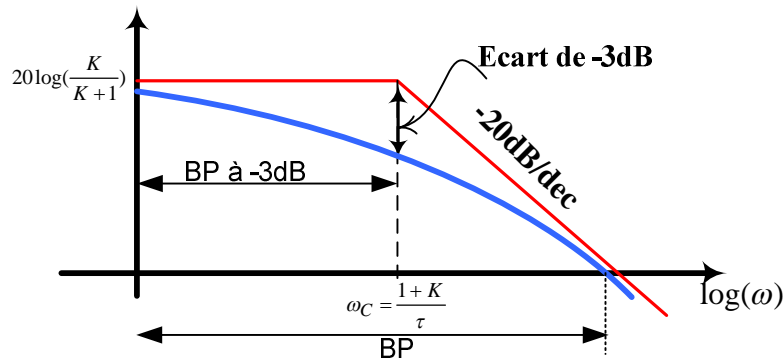


Figure V.24: Bande passante d'un premier ordre

Dans ce cas, la bande passante à -3dB est l'intervalle $\left[0, \frac{1+K}{\tau}\right]$.

Remarque: : La bande passante est définie sur le diagramme de gain de la fonction $F(p)$ et non sur le diagramme de gain de la $T(p)$ utilisée pour l'étude de la stabilité.

Il est alors nécessaire de réaliser un lien entre les bandes passantes de la FTBO et de la FTBF. D'une manière générale, on montre que la bande passante à -3 dB d'un système en BF peut être approchée par la pulsation de coupure à 0 dB de sa FTBO (si $K \gg 1$).

Dans le cas particulier du système du 1^{ier} ordre, **plus τ est faible**, plus $t_{r5\%} = 3\tau$, le temps de réponse à 5% est faible et donc **plus le système est rapide**. La réponse harmonique du système du 1^{ier} ordre, montre que plus τ est faible, plus la bande passante $\left[0, \frac{1+K}{\tau}\right]$ est élevée. On peut déduire que **le système est d'autant plus rapide que la bande passante est élevée**. C'est le cas pour tous les autres systèmes physiques.

Exercices sur le chapitre V

Exercice N01 :

Discuter la stabilité suivant la valeur du gain positif K des systèmes bouclés qui ont pour

fonction de transfert en boucle ouverte :

$$T_1(p) = \frac{K}{p(p+3)(p+4)}$$

$$T_2(p) = \frac{K}{p^3 + 5p^2 + 8p + 5}$$

$$T_3(p) = \frac{K(1 + Tp)}{p(p + 1)(0.5p + 1)}$$

Exercice N02 :

Un système bouclé est caractérisé par une fonction de transfert en boucle ouverte T(p) :

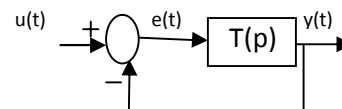
$$T(p) = \frac{K}{p(p + 3)^2}$$

- Étudier la stabilité du système bouclé en utilisant le critère de Nyquist.
- Trouver la valeur de K pour imposer une marge de phase égale à 45.

Exercice N°03

Soit le système en boucle fermée de la figure avec :

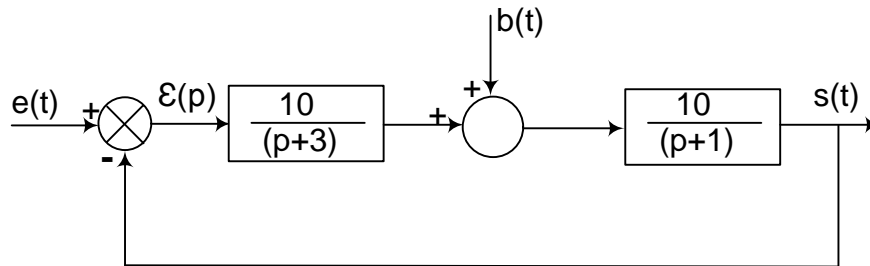
$$T(p) = \frac{K}{(P + 1)^3}$$



- 1- Tracer le lieu de Nyquist de : $T(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega)^3}$
- 2- Déterminer la fréquence d'intersection avec l'axe réel, ω_π .
- 3- Discuter la stabilité du système bouclé, en spécifiant en particulier :
 - a)- la plage du gain K assurant la stabilité.
 - b)- Positions des pôles correspondant au gain critique.
- 4- Pour une entrée échelon, trouver l'expression de l'erreur statique et déterminer l'intervalle du gain K assurant à la fois la stabilité du système et une erreur inférieure à 20 % .

Exercice N04

Soit le schéma-bloc d'un système asservi de la figure ci-dessous où $e(t)$ est l'entrée et $b(t)$ une perturbation mesurable.

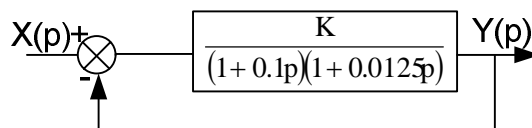


Calculer pour les deux cas ci-dessous la valeur de l'erreur statique

1. $e(t)=u(t)$ et $b(t)=0$
2. $e(t)=0$ et $b(t)=u(t)$

Exercice N05

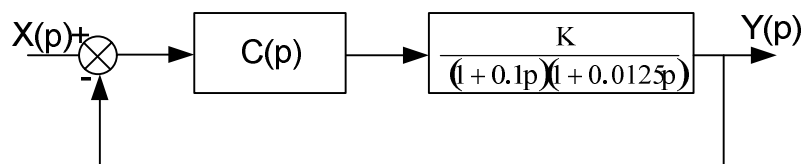
I. Soit le système asservi de la figure ci-dessous :



- En appliquant le critère de Routh, montrer que le système est toujours stable pour K positif.
- Pour $K=1$, tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouvert $T(p)$.
- Déterminer la valeur du Gain K correspondant à une marge de phase de 45 degrés.
- Calculer en fonction de K les erreurs de position et de vitesse.

II. Pour améliorer la précision du système bouclé, on ajoute comme indiqué par la figure ci-

dessous un compensateur de fonction de transfert $C(p) = \frac{(1+0.1p)}{p}$



- Donner la nouvelle expression de $T(p)$.
- Donner la nouvelle valeur de K pour obtenir la même marge de phase que précédemment.
- Calculer en fonction de K les nouvelles valeurs des erreurs de position et de vitesse.

Chapitre VI

Correction

INTRODUCTION

Au cours du chapitre précédent nous avons étudié les performances d'un système asservi à savoir la stabilité et la précision. Nous avons montré que pour annuler l'erreur statique, la FTBO doit comporter un ou plusieurs intégrateurs et doit présenter un gain statique K le plus élevé possible. Par contre pour obtenir un bon degré de stabilité il faut une marge de phase et une marge de gain suffisantes, d'où un gain statique faible.

Il est clair que le respect des spécifications du cahier de charges ne peut être en général obtenu par un simple réglage d'un gain ou d'insertion d'intégrateurs. Dans la plus part des cas, il est indispensable d'insérer un correcteur (compensateur, régulateur).

VI.1 Structures de correction

VI.1.1 Correction série

Ce type de correcteur est inséré dans la chaîne directe juste après le comparateur, il est en série avec le système et délivre un signal de commande

$$m(t) = f(\varepsilon) \quad (\text{VI.1})$$

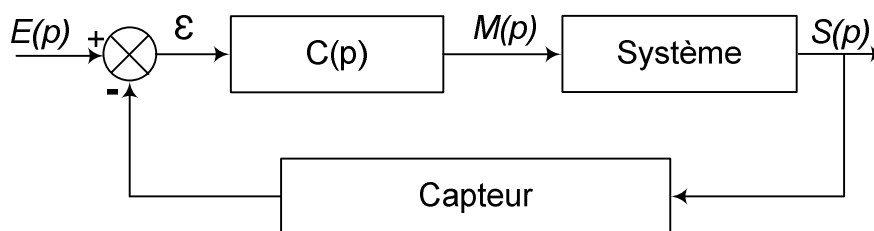


Figure VI.1: Correction série

VI.1.2 Correction parallèle (en réaction)

Ce type de correcteur dispose d'une chaîne de retour secondaire créée spécialement. Le correcteur se met en parallèle avec un élément figé de la chaîne directe. Le signal de commande est donné par :

$$m(t) = f_1(\varepsilon) + f_2(x) \quad (\text{VI.2})$$

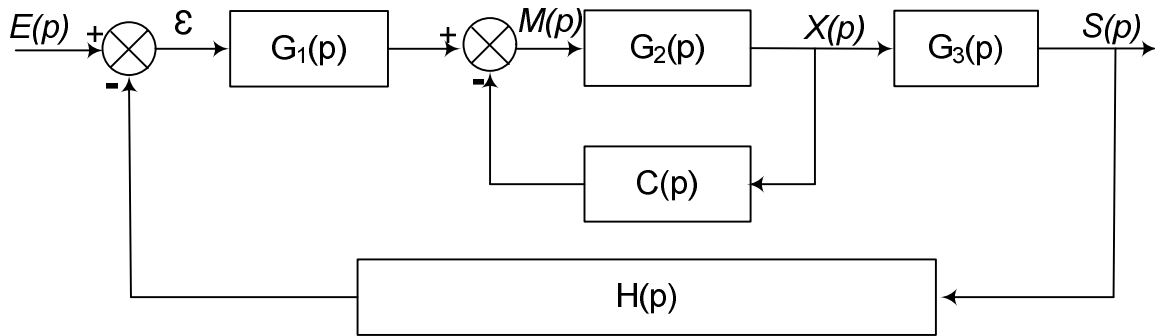


Figure VI.2: Correction parallèle

$G_1(p)$ caractérisant $f_1(\varepsilon)$ peut être par exemple un correcteur série. $f_2(x)$ caractérise l'action de correcteur parallèle avec x est une grandeur intermédiaire entre la commande et la sortie. Généralement $x = \frac{ds(t)}{dt}$ et nous sommes dans le cas d'une correction tachymétrie.

VI.1.3 Correction par anticipation (compensateur)

VI.1.3.1 Compensation des perturbations (entrée nulle)

Dans ce cas nous supposons que la perturbation $B(p)$ est mesurable. Il est alors possible d'éliminer l'influence de la perturbation $B(p)$ en insérant un correcteur suivant la configuration ci-dessous.

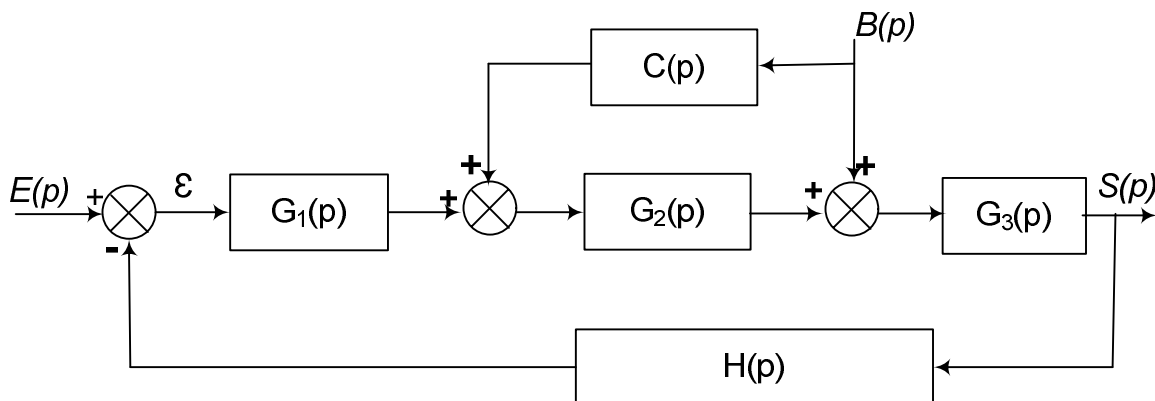


Figure VI.3: Correction par anticipation (*Compensation des perturbations*)

Il suffit, de choisir

$$C(p) = -\frac{1}{G_2(p)} \quad (\text{VI.3})$$

Généralement la fonction $\frac{1}{G_2(p)}$ n'est pas physiquement réalisable et on adopte des formes approximatives de $\frac{1}{G_2(p)}$. Il n'y a plus alors de compensation parfaite du régime transitoire des perturbations.

VI.1.3.2 Compensation de l'entrée (perturbation nulle)

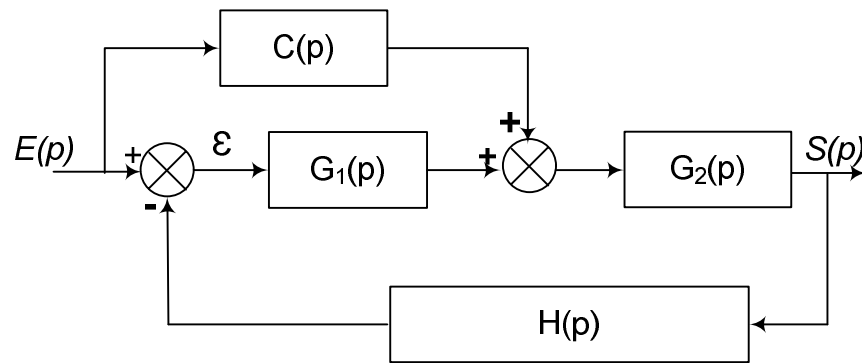
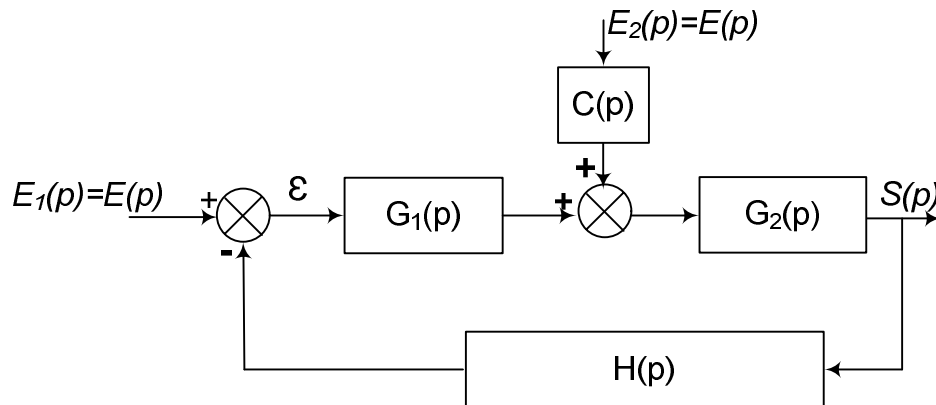
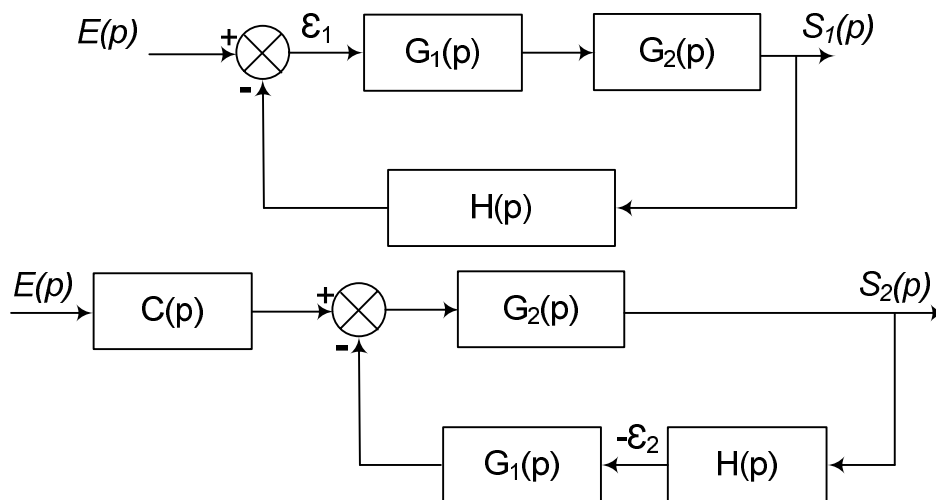


Figure VI.4: Correction par anticipation (*Compensation de l'entrée*)

Ce schéma peut être transformé dans un premier sous une configuration permettant d'appliquer le théorème de superposition pour le calcul de l'erreur.



La sortie $S(p)$ peut être considérée comme la superposition de deux schémas blocs ci-dessous :



$$\varepsilon_1(p) = \frac{E(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)H(p)} \quad (\text{VI.4})$$

$$\varepsilon_2(p) = -H(p)S_2(p) = \frac{-E(p)C(p)G_2(p)H(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)H(p)} \quad (\text{VI. 5})$$

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p) = \frac{E(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)H(p)} - \frac{E(p)C(p)G_2(p)H(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)H(p)} \quad (\text{VI. 6})$$

Afin d'annuler l'erreur vis-à-vis de l'entrée, il suffit choisir :

$$C(p) = \frac{1}{G_2(p)H(p)} \quad (\text{VI. 7})$$

On notera que, dans ce cas, le système asservi suit parfaitement la loi d'entrée. Comme le cas de la compensation des perturbations, souvent la fonction $\frac{1}{G_2(p)H(p)}$ n'est pas physiquement réalisable. La compensation ne sera donc pas parfaite dans les régimes transitoires.

VI.2 Classes des correcteurs

On peut définir deux classes de correcteurs:

1. Les correcteurs spécifiques qui sont déterminés à partir de la fonction de transfert en boucle fermée recherchée. Il s'agit de déterminer à la fois la structure et les paramètres du correcteurs (structure+paramètres)
2. Les correcteurs classiques, dont la structure est bien définie et dont seuls les paramètres sont à déterminer.

VI.3 Correcteurs classiques (séries)

On distingue trois actions de base : Proportionnelle (P), Intégrale (I) et Dérivée (D), qui permettent, individuellement, d'améliorer telle ou telle performance. Elles sont simples à réaliser mais, en général, dégradent d'autres performances.

Type d'action	Signal de Commande $m(t)$	Fonction de transfert	Effet
Proportionnelle (P)	$m(t) = K_c e(t)$	$C(p) = K_c$	$K_c > 1$ (Amplificateur) : améliore la précision statique et la rapidité mais dégrade la stabilité et augmente le dépassement.
			$K_c < 1$ (Atténuateur) : améliore la stabilité et diminue le dépassement. En revanche, la rapidité et la précision sont dégradées.
Intégrale (I)	$m(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(v) dv$	$C(p) = \frac{1}{T_i p}$	Annule l'erreur statique mais introduit un retard de phase qui réduit d'autant la marge de phase .
Dérivée (D)	$m(t) = T_d \frac{d}{dt} \varepsilon(t)$	$C(p) = T_d p$	Améliore la rapidité et la marge de phase mais réduit la marge de gain.

En général le correcteur recherché combine ces trois actions.

VI.3.1 Correcteur Proportionnel et dérivé (P.D)

Le correcteur **proportionnel et dérivé (P.D)** de fonction de transfert $C(p)$, s'insère dans la boucle de commande derrière le comparateur. C'est un correcteur série.

La transmittance d'un correcteur P.D idéal est :

$$C(p) = K_c(1 + T_d p) \quad (\text{VI. 8})$$

où K_c est le gain de l'action P et T_d est la constante de temps de l'action I.

La figure ci-dessous donne les réponses fréquentielle (amplitude et phase) de ce correcteur.

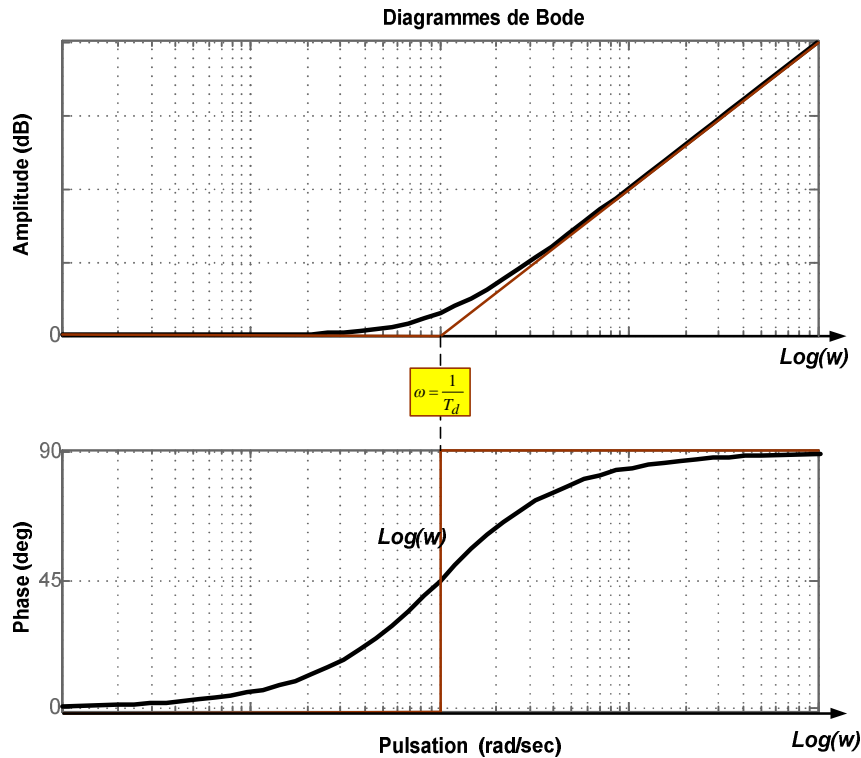


Figure VI.5: Diagrammes de Bode d'un correcteur **P.I** ($K_c=1$)

Avantages

- Amélioration de la stabilité (par apport de phase)
- Augmente la rapidité (par augmentation de la bande passante)

Inconvénients

- Amplifie les bruits de mesures
- Ne permet pas d'améliorer la précision

VI.3.2 Correcteur à avance de phase

Dans un correcteur P.D, l'action dérivée n'étant pas physiquement réalisable ($Deg(N) > Deg(D)$) on adopte :

$$C(p) = K_c \left(1 + \frac{T_d p}{1 + \tau p} \right) = K_c \left(\frac{1 + (\tau + T_d)p}{1 + \tau p} \right)$$

Que l'on peut écrire sous forme :

$$C(p) = K_c \left(\frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p} \right) \quad \text{avec } a > 1 \quad (\text{VI. 9})$$

VI.3.2.1 Diagrammes de Bode d'un correcteur à avance de phase

On pose $K_c=1$ pour simplifier l'étude.

$$C(p) = \left(\frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p} \right) \quad \text{avec } a > 1 \quad (\text{VI. 10})$$

Nous avons deux pulsations de cassure ω_1 et ω_2 / $\omega_1 < \omega_2$

$$\omega_1 = \frac{1}{a\tau} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{\tau} \quad (\text{VI. 11})$$

Les diagrammes d'amplitude et de phase du correcteur sont donnés ci-dessous

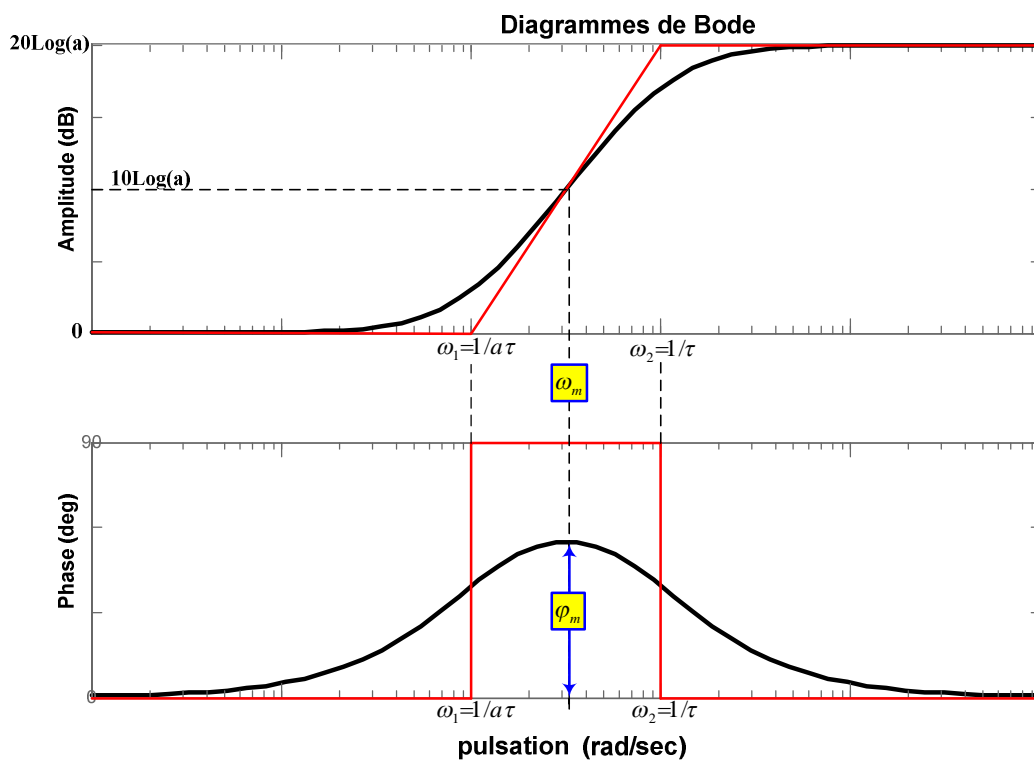


Figure VI.6: Diagrammes de Bode d'un correcteur à avance de phase

Nous avons :

$$\varphi(\omega) = \arctan(a\tau\omega) - \arctan(\tau\omega)$$

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{a\tau}{1 + (a\omega\tau)^2} - \frac{\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{a}} \quad (\text{VI. 12})$$

$$\begin{aligned}\log(\omega_m) &= \log \frac{1}{\tau\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{\tau^2 a} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{\tau a} \times \frac{1}{\tau} \right) = \frac{1}{2} \left[\log \left(\frac{1}{\tau a} \right) + \log \left(\frac{1}{\tau} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} [\log(\omega_1) + \log(\omega_2)]\end{aligned}$$

Alors $\log(\omega_m)$ est au milieu du segment $[\log(\omega_1), \log(\omega_2)]$

$$\begin{aligned}C(j\omega_m) &= \frac{1 + j\sqrt{a}}{1 + j(1/\sqrt{a})} = \frac{(1 + j\sqrt{a})(1 - j(1/\sqrt{a}))}{1 + 1/a} = \frac{2a + j\sqrt{a}(a-1)}{a+1} \\ \sin \varphi_m &= \frac{\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{4a^2 + a(a-1)^2}} = \frac{\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a(a+1)^2}} = \frac{a-1}{a+1}\end{aligned}$$

$$\varphi_m = \arcsin \left(\frac{a-1}{a+1} \right) \quad (\text{VI. 13})$$

Notons que :

$$|C(j\omega_m)| = \frac{1}{a+1} \sqrt{4a^2 + a(a-1)^2} = \sqrt{a}$$

$|C(j\omega_m)|_{dB} = 20 \log \sqrt{a} = 10 \log a$, alors $|C(j\omega_m)|_{dB}$ est au milieu du segment $[0, 20 \log a]$

$$\sin \varphi_m = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow (a+1) \sin \varphi_m = a-1 \Leftrightarrow a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$$

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \quad (\text{VI. 14})$$

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
φ_m	0	19,5°	30°	36,9°	41,8°	45,6°	48,6°	51,1°	53,1°	54,9°	56,4°	57,8°	59°

L'intérêt de ce correcteur est visible sur son diagramme de phase : il permet de remonter la phase à la pulsation ω_m , d'où il est possible d'améliorer la marge de phase du système à corriger. Si le correcteur à avance de phase se justifie, c'est généralement la marge de phase est insuffisante.

VI.3.3 Correcteur Proportionnel et intégral (P.I)

La fonction de transfert de ce correcteur est :

$$C(p) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) \quad (\text{VI. 15})$$

VI.3.3.1 Diagrammes de Bode du correcteur P.I

On pose $K_c=1$ pour simplifier l'étude.

$$C(j\omega) = \left(\frac{1 + T_i j\omega}{T_i j\omega} \right) \quad (\text{VI. 16})$$

Nous avons une pulsations de cassure

$$\omega_c = \frac{1}{T_i} \quad (\text{VI. 17})$$

Le module et la phase sont donnés par les relations suivantes:

$$\|C(\omega)\| = \frac{\sqrt{1 + (T_i\omega)^2}}{T_i\omega} \quad (\text{VI.18})$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctan(T_i\omega) \quad (\text{VI.19})$$

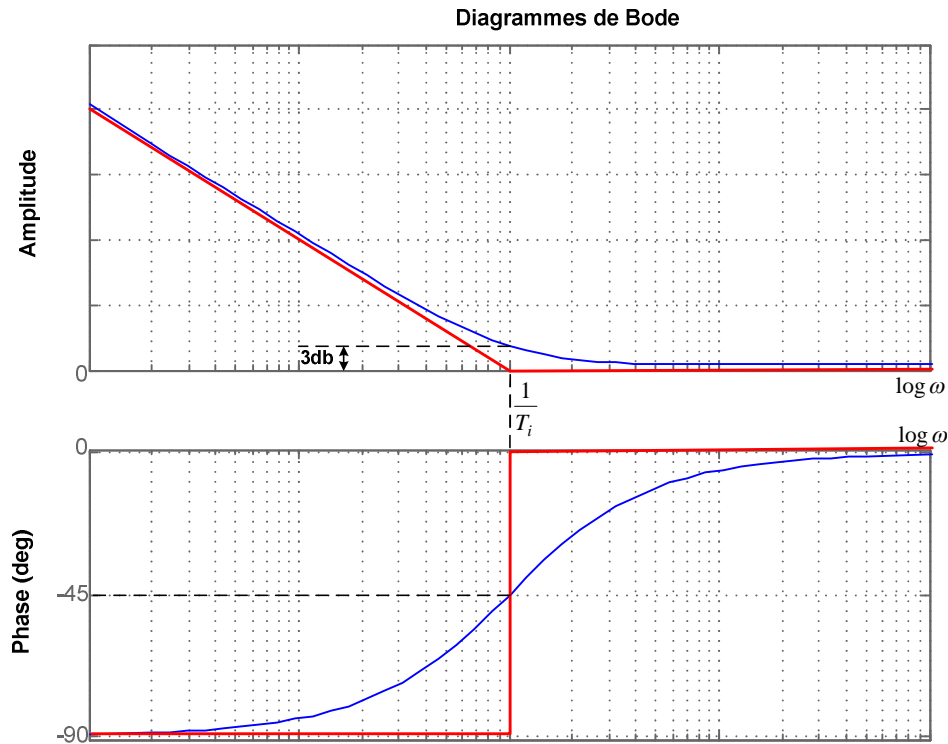


Figure VI.7: Diagrammes de Bode d'un correcteur Proportionnel Intégral (P.I)

Avantage:

Précision parfaite en réponse à un échelon à cause de l'action intégrale.

Inconvénients:

- Diminution de la marge de phase et donc du degré de stabilité;
- Réponse lente.

VI.3.4 Correcteur à retard de phase

Comme nous venons de le voir, un correcteur P.I a pour fonction de transfert

$$C(p) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

Ce correcteur admet une forme approchée dès que l'intégration n'est pas pure:

$$C(p) = k \left(1 + \frac{1}{T_i p + \frac{1}{a}} \right) \approx ka \frac{(1 + T_i p)}{(1 + a T_i p)}$$

avec $a \gg 1$

D'une manière générale, on appelle correcteur à retard de phase un correcteur de fonction de transfert:

$$C(P) = K_c \frac{(1 + \tau p)}{(1 + a\tau p)} \quad \text{avec } a > 1 \quad (\text{VI. 20})$$

VI.3.4.1 Diagrammes de Bode d'un correcteur à retard de phase

Les mêmes calculs que pour le correcteur à avance de phase sont utilisés pour étudier le comportement fréquentielle de ce correcteur.

Pour la pulsation $\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$, la phase atteint une valeur minimale $\varphi_m = \arcsin \frac{1-a}{1+a}$. Le module à cette pulsation est égal à $|C(j\omega_m)|_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = -10 \log a$.

Notons que :

$$a = \frac{1 - \sin\varphi_m}{1 + \sin\varphi_m} \quad (\text{VI. 21})$$

Le tableau ci-dessous, donne les valeur de $-\varphi_m$ en fonction de a

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$-\varphi_m$	0	19,5°	30°	36,9°	41,8°	45,6°	48,6°	51,1°	53,1°	54,9°	56,4°	57,8°	59°

Les diagrammes d'amplitude et de phase du correcteur sont donnés ci-dessous:

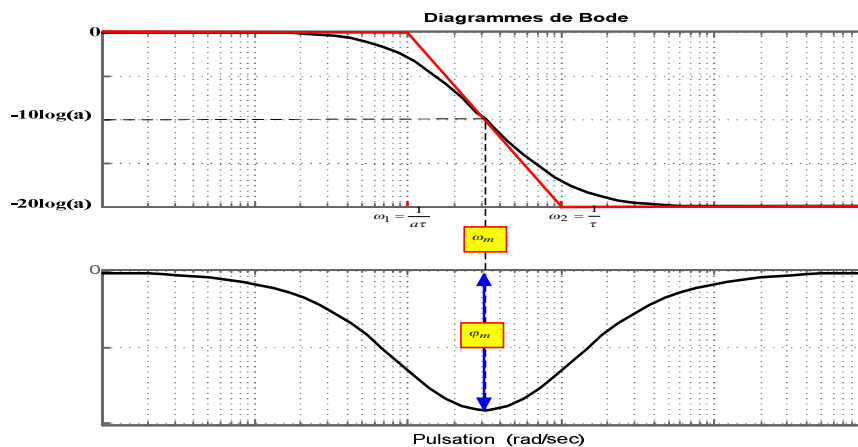


Figure VI.8: Diagrammes de Bode d'un correcteur à avance de phase

VI.3.5 Correcteur Proportionnel Intégral Dérivé (P.I.D)

VI.3.5.1 Correcteur P.I.D parallèle

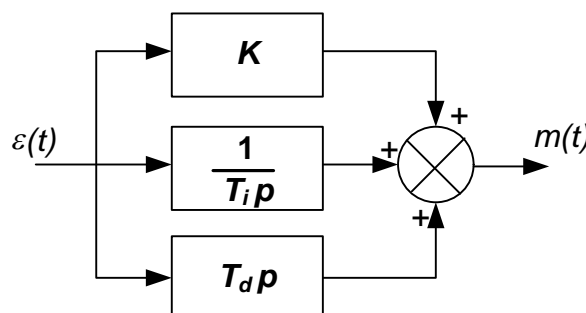


Figure VI.9: Structure d'un correcteur PID parallèle

Un correcteur P.I.D théorique peut être défini par une fonction de transfert de la forme:

$$C(p) = K + \frac{1}{T_i p} + T_d p \quad \text{avec } T_i > T_d \quad (\text{VI. 22})$$

VI.3.5.2 Correcteur P.I.D série

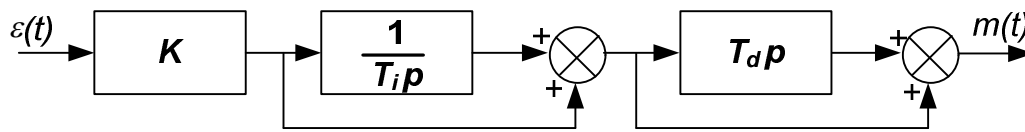


Figure VI.10: Structure d'un correcteur PID série

Dans ce cas, la fonction de transfert est:

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p) \quad \text{avec } T_i > T_d \quad (\text{VI. 23})$$

VI.3.5.3 Correcteur P.I.D Mixte

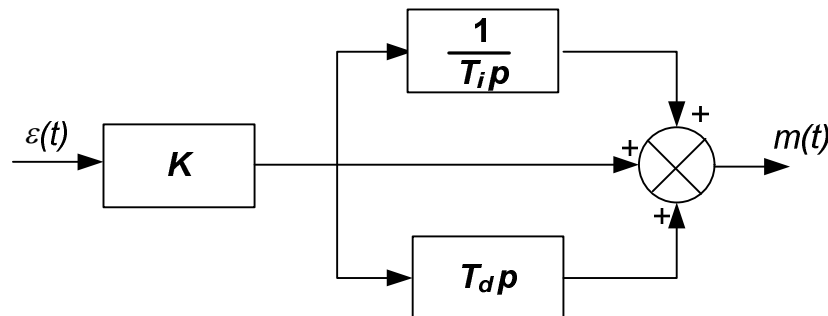


Figure VI.11: Structure d'un correcteur PID mixte

Un correcteur PID théorique peut être défini par :

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) \quad \text{avec } T_i > T_d \quad (\text{VI. 24})$$

Comme l'action dérivée n'est pas réalisable physiquement, un PID réel peut être obtenu en approximant le terme $T_d p$ par $\frac{T_d p}{1 + T p}$ avec $T_d > T$.

VI.3.5.1 Diagrammes de Bode d'un correcteur P.I.D

Nous considérons dans cette étude la structure mixte qui est la plus répandue.

nous avons:

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = K \left(\frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p} \right)$$

$$C(p) = K \left(\frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p} \right) \quad (\text{VI. 25})$$

$C(p)$ est une fraction rationnelle dont les racines du numérateur sont réelles si:

$$T_i \geq 4T_d \quad (\text{VI. 26})$$

En considérant l'équation (IV.26), $C(p)$ peut être mis sous une forme :

$$C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_1 P)(1 + T_2 P) \quad (\text{VI. 27})$$

avec:

$$T_1 = \frac{T_i}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}} \right) \wedge T_2 = \frac{T_i}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}} \right)$$

On note que $T_1 + T_2 = T_i$ et $T_1 \times T_2 = T_i \times T_d$

Nous avons deux pulsations de cassure ω_1 et $\omega_2 / \omega_1 < \omega_2$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} \quad (\text{VI. 28})$$

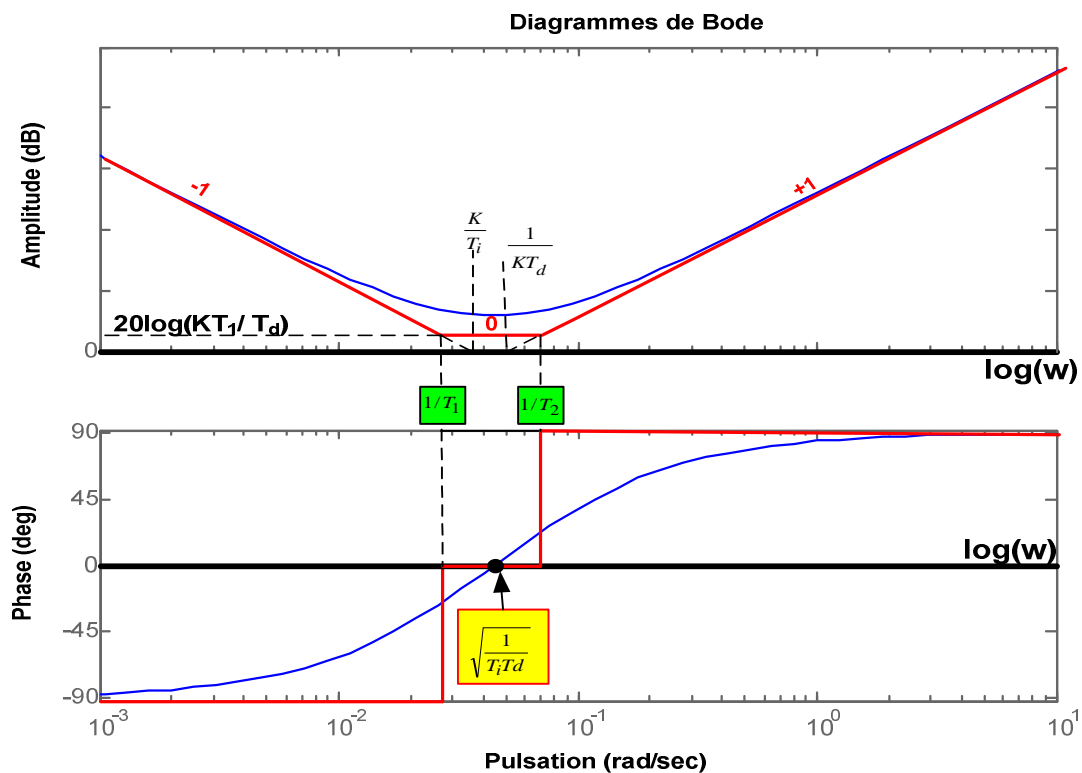


Figure VI.12: Diagrammes de Bode d'un correcteur PID mixte

VI.5 Méthode de Ziegler-Nichols (1942)

Ziegler-Nichols ont proposé deux approches pour ajuster rapidement les paramètres des correcteurs P, PI et PID. L'avantage principal de leurs méthodes est qu'elles permettent la conduite d'un procédé dont la fonction de transfert est inconnue.

VI.5.1 Méthode en boucle fermée

Cette méthode est connue aussi sous le nom de méthode de pompage

VI.5.1.1 Principe de la méthode

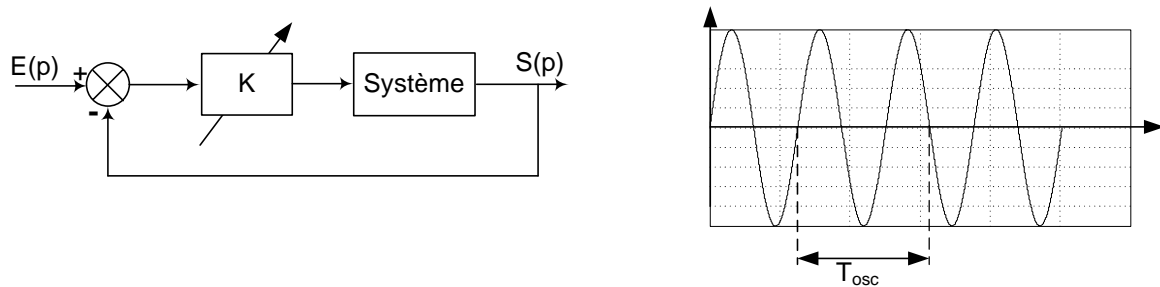


Figure VI.13: Principe de la méthode de Ziegler-Nichols (en boucle fermée)

- Régler le correcteur P.I.D en proportionnel pur (on laisse juste l'action P: $T_d=0$ et $T_i \rightarrow \infty$)
- Augmenter le gain K jusqu'à l'apparition des oscillations.
- Noter K_{osc} la valeur du plus petit gain permettant de maintenir les oscillations.
- Noter T_{osc} la période des oscillations.
- Régler les paramètres du correcteur comme indiqué par le tableau ci-dessous

	P	PI		PID		
				Série	Parallèle	Mixte
K	$\frac{K_{osc}}{2}$	$\frac{K_{osc}}{2, 2}$	$\frac{K_{osc}}{3, 3}$	$\frac{K_{osc}}{1, 7}$		
T_i	∞	$\frac{T_{osc}}{1, 2}$	$\frac{T_{osc}}{4}$	$\frac{0, 85 \cdot T_{osc}}{K_{osc}}$	$\frac{T_{osc}}{2}$	
T_d	0	0	$\frac{T_{osc}}{4}$	$\frac{K_{osc} \cdot T_{osc}}{13, 3}$	$\frac{T_{osc}}{8}$	

VI.5.2 Méthode en boucle ouverte

Cette méthode est basée sur la réponse indicielle du système à commander. A partir de la réponse indicielle on trace la tangente au point d'inflexion (la réponse indicielle doit être apériodique: sans dépassement). Ensuite, on mesure deux grandeurs T_1 et T_2 .

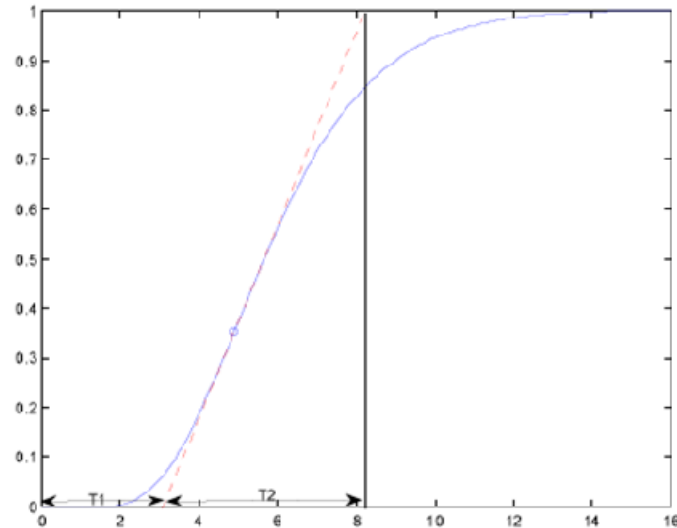


Figure VI.13: Réponse indicielle apériodique

On peut alors calculer les paramètres du correcteur choisi à l'aide du tableau ci-dessous:

	P	PI	PID
K	T_2/T_1	$0,9 T_2/T_1$	$1,2 T_2/T_1$
T_i	∞	$3,3 T_1$	$2 T_1$
T_d	0	0	$0,5 T_1$

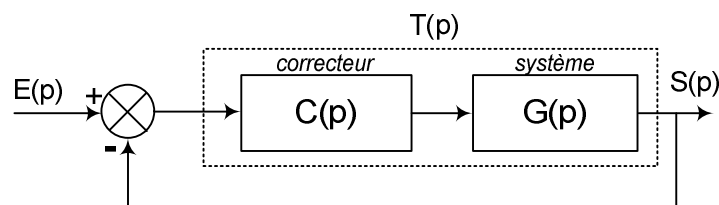
V.6 Méthodes basées sur la réponse harmonique en boucle fermée

V.6.1 Méthode générale

Il s'agit de spécifier la réponse harmonique en boucle fermée. De là, on peut calculer la réponse harmonique en boucle ouverte correspondante. Connaissant la réponse harmonique du système à régler, on en déduit celle du régulateur.

V.6.2 Critère méplat

Considérons le système asservi à retour unitaire de la figure ci-dessous :



$G(p)$ la fonction de transfert du système (d'ordre n) à régler :

$$G(p) = \frac{K_s}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \dots (1 + \tau_n p)} \quad (\text{VI. 29})$$

avec $\tau_1 \geq \tau_2 \gg \tau_3 \geq \tau_4 \dots \geq \tau_n$

$T(p)$ fonction de transfert en boucle ouverte :

$$T(p) = C(p) \times G(p) = C(p) \times \frac{K_s}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \dots (1 + \tau_n p)} \quad (\text{VI. 30})$$

La fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$ vaut :

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$$

Avec le critère méplat, on cherche à obtenir pour le système réglé la bande passante la plus large possible en évitant que le facteur de résonance dépasse 1. La réponse harmonique en boucle ouverte ($T(p)$) correspondante à cet objectif est donnée par la figure ci-dessous.

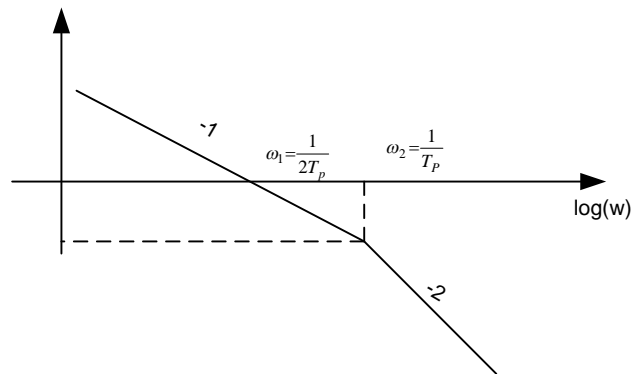


Figure VI.14 : Réponse harmonique de $T(p)$, dimensionnement du régulateur selon critère méplat

On pose $T_r(p)$ fonction de transfert en boucle ouverte recherchée :

$$T_r(p) = \frac{1}{2T_p p(1 + T_p p)} \quad (\text{VI. 31})$$

Pour obtenir donc $T_r(p) \approx T(p)$, on aligne la (ou les) pulsation(s) de coupure du correcteur ($1/T_1$, le cas échéant $1/T_2$) sur la (ou les) pulsations de coupures du système à régler ($1/\tau_1$, le cas échéant $1/\tau_2$).

La fonction de transfert du régulateur est alors :

$$C(p) = \frac{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{T_i p} \quad (\text{VI. 32})$$

En substituant (32) dans (30), on obtient :

$$T(p) = \frac{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{T_i p} \times \frac{K_s}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \dots (1 + \tau_n p)}$$

$$T(p) = \frac{K_s}{T_i p \prod_{i=3}^n (1 + \tau_i p)} \quad (\text{VI. 33})$$

En comparant (31) et (33), nous aurons :

$$\frac{K_s}{T_i} = \frac{1}{2T_p}$$

$$T_i = 2K_s T_p \quad (\text{VI. 34})$$

$$\prod_{i=3}^n (1 + \tau_i p) = (1 + T_p p) \Rightarrow T_p = \sum_{i=3}^n \tau_i \quad \text{quand } \tau_i < 1$$

$$T_p = \sum_{i=3}^n \tau_i \quad (\text{VI. 35})$$

V.7 Synthèse des correcteurs classiques dans le lieu de Bode

Il n'existe pas de méthode générale et systématique permettant de régler au mieux les paramètres de des contrôleurs classiques. Il faut faire un choix au départ et valider (ou invalider) ce choix à la fin, ce qui permet d'évaluer la solution par approximation successive.

Dans ce qui suit, nous allons détailler les étapes de réglage d'un correcteur à avance de phase. Pour les autres correcteurs les étapes de réglage seront étudiées en TD.

V.7.1 Détermination des paramètres du correcteur à avance de phase

Nous utilisons les notations suivantes :

$$FTBO_c(p) = C(p) \times FTBO(p) = \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p} \times K_c \cdot FTBO(p)$$

$$FTBO_c(p) = \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p} \times FTBO_{nc}(p)$$

Avec :

FTBO(p) : Fonction de transfert en boucle ouverte du système à corriger

FTBO_{nc}(p) : Fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée.

$$FTBO_{nc}(p) = K_c \times FTBO(p)$$

FTBO_c(p) : Fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (Correcteur + système)

- Si la FTBO ne possède pas d'intégration, l'écart de position ne sera pas nul, il faut prévoir soit un intégrateur dans le correcteur, soit un gain suffisant.

Etape 1 : Réglage du gain K_c

Le réglage du gain K_c peut être obtenu, en vérifiant si le gain de la fonction FTBO_{nc}(p) est suffisant face aux exigences de précision (écart de position, de vitesse, ...) et (ou) aux exigences de rapidité (temps de réponse,...).

Etape 2 : Observation

Avec la valeur obtenue de K_c, il faut vérifier maintenant la marge de phase. Si le correcteur à avance de phase se justifie, c'est généralement qu'elle est insuffisante. Le but est de placer le correcteur de telle sorte que la pulsation ω_m corresponde à la pulsation de coupure à 0dB de la

fonction $FTBO_c$ corrigée, notée ω_{0c} . Le problème est que l'on ne connaît que la pulsation de coupure à 0dB de la fonction $FTBO_{nc}$ non corrigée, notée ω_0 . Choisissons une valeur de ω_{0c} légèrement supérieure à $1,5\omega_0$.

Etape 3 : Détermination de la valeur du coefficient a

Pour la valeur de ω_{0c} choisie, notons $\varphi(\omega_{0c})$ la phase de la $FTBO_{nc}$. La phase du correcteur, supposé bien placé est φ_m . Le cahier des charges impose généralement la marge de phase souhaitée $\Delta\varphi$. Par $\Delta\varphi=45^\circ = \varphi(\omega_{0c}) + 180^\circ + \varphi_m \Rightarrow \varphi_m = -\varphi(\omega_{0c}) + 135^\circ$, on déduit alors la valeur de φ_m .

La valeur de φ_m impose une valeur de a selon la relation :

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$$

Etape 4 : Détermination de la valeur du coefficient τ

Si on veut que $|FTBO(j\omega_{0c}) \times C(j\omega_{0c})| = 1 = \left| FTBO_{nc}(j\omega_{0c}) \times \frac{1+a\tau j\omega_{0c}}{1+\tau j\omega_{0c}} \right|$, il faut que $|FTBO_{nc}(j\omega_{0c})| = \frac{1}{\sqrt{a}}$ car $\left| \frac{1+a\tau j\omega_m}{1+\tau j\omega_m} \right| = \sqrt{a}$. Ceci permet de choisir, soit graphiquement soit par calcul, une nouvelle valeur de ω_{0c} la plus réaliste.

A partir de cette nouvelle valeur de ω_{0c} , on peut trouver la valeur de τ par la relation suivante :

$$\tau = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} = \frac{1}{\omega_{0c} \sqrt{a}}$$

Etape 5 : Vérification

On vérifie la valeur de la marge de phase. Si elle n'est pas conforme, reprendre la détermination du correcteur à partir de l'étape 4 en faisant légèrement varier la valeur du coefficient a .

Exercices sur le chapitre VI

Exercice 01 (Correcteur PID)

On réalise un correcteur en utilisant un Ampli Opérationnel parfait, selon la figure 1 :

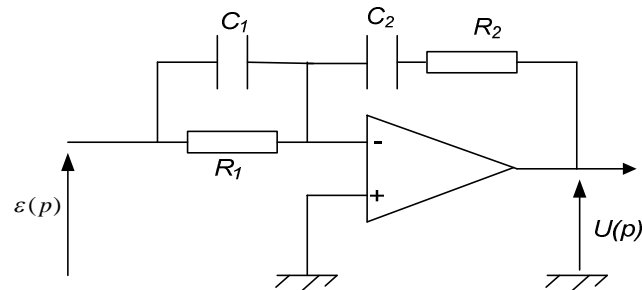


Figure 1

1. A partir du schéma, exprimer la fonction de transfert $C(p)$ du correcteur sous la forme :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_1 + \frac{K_2}{p} + K_3 p$$

Exprimer les coefficients K_1 , K_2 et K_3 en fonction des éléments du schéma.

2. De quel correcteur s'agit-il?
3. On choisit la valeur des éléments du schéma de la figure 1, afin que la fonction de transfert du correcteur $C(p)$ s'écrive sous la forme :

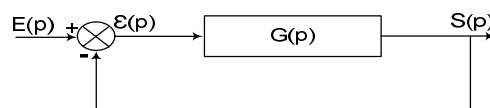
$$C(p) = \frac{\omega_1 \times \left(1 + \frac{p}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right)}{p}$$

Avec $\omega_1 = 20 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_2 = 80 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$

- Calculer les valeurs numériques des coefficients K_1 , K_2 et K_3 .
- Représenter le diagramme asymptotique de Bode (gain et phase) de $C(p)$.

Exercice 02 (Correcteurs : Proportionnel, avance de phase et retard de phase)

Soit le système asservi à retour unitaire de la figure ci-dessous :



avec :

$$G(p) = \frac{10K}{p(1 + 0,1p)}, \quad K > 0$$

1. En appliquant le critère de Routh, montrer que le système reste toujours stable pour $K > 0$.
2. Déterminer la valeur de K pour avoir une marge de phase de 45° .
3. Quelle est la condition sur K pour avoir une erreur de vitesse inférieure à 0,01
4. Pour $K=10$, tracer le diagramme de Bode de la FTBO.
5. Peut-on avoir au même temps une marge de phase de 45° et une erreur de vitesse inférieure à 0.01
6. Pour avoir une marge de phase de 45° et une erreur de vitesse inférieure à 0.01, nous introduisant un correcteur à avance de phase dans la chaîne directe. Déterminer les paramètres du correcteur.
7. On décide d'utiliser un correcteur à retard de phase, déterminer les paramètres de ce correcteur.

Exercice 03 (En relation avec le critère méplat)

Soit le système asservi à retour unitaire de la figure ci-dessous:

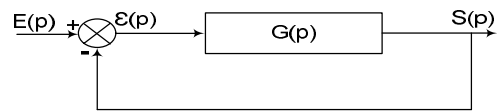


$$G(p) = \frac{\omega_1}{p \left(1 + \frac{1}{\omega_c} p \right)} \quad \text{Avec } \omega_1 < \omega_c$$

1. Donner l'expression de $F(p)$ FTBF, puis déduire les valeurs du gain, de la pulsation propre et du coefficient d'amortissement.
2. Donner la condition pour avoir un système bouclé sans résonance.
3. Donner la condition pour avoir un système oscillatoire amorti, dans ce cas donner l'expression du premier dépassement et la sortie $s(t)$ (l'entrée $e(t) = 5u(t)$).
4. Tracer le diagramme de Bode de la FTBO (Il faut tenir compte de la condition $\omega_1 < \omega_c$)
5. Pour $\omega_c = 2 \omega_1$ et $\omega_c = 10 \omega_1$, calculer les marges de phase correspondantes.
6. Pour $\omega_c = 2 \omega_1$, tracer le diagramme de Bode de la FTBF.

Exercice 04 (Critère méplat)

Considérons le système asservi ci-dessous :



avec :

$$G(p) = \frac{10}{(1 + 2p)(1 + 0,1p)} > 0$$

En utilisant le critère méplat, donner les correcteur correspondant.

Exercice 05 (Méthode Ziegler-Nichols en boucle ouverte)

En utilisant la méthode de Ziegler-Nichols, donner les paramètres des trois correcteurs (P, PI et PID) correspondants au système dont la réponse indicielle est donnée ci-dessous :

