TD N°4 : Postulats de la Mécanique Quantique

Exercice 1 :
Une particule de masse m est confinée dans une boite unidimensionnelle. Le potentiel de confinement $V(x)$ est donnée par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

les fonctions propres et les valeurs propres associées à l'hamiltonien du système (l'énergie de la particule) sont de la forme :

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ E_n &= \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \quad \text{avec} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

l'ensemble $\{\varphi_n(x)\}$ des fonctions propres de l'hamiltonien du système constitue une base dans l'espace des fonction d'ondes F du système. La particule précédente est décrite par la fonction d'onde suivante :

$$\psi(x) = \frac{i}{\sqrt{10a}} \sin \frac{\pi x}{a} + A\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a} + \frac{3i}{\sqrt{5a}} \sin \frac{3\pi x}{a}$$

1. Exprimer $\psi(x)$ dans la base $\{\varphi_n(x)\}$ des fonctions propres de l'hamiltonien du système puis trouver A pour que $\psi(x)$ soit normalisée.
2. On procède à une mesure de l'énergie du système, donner les résultats possibles et la probabilité correspondant à chaque résultat obtenu.
3. Calculer la valeur moyenne de l'énergie pour ce système.
4. L'énergie du système est mesurée et on obtient la valeur $\frac{2\hbar^2\pi^2}{ma^2}$. Quel est l'état du système immédiatement après la mesure ?

Exercice 2 :
L'état fondamental et le premier état excité d'un atome sont décrit respectivement par les fonctions d'ondes ψ_1 et ψ_2, les énergies correspondantes étant E_0 et E_1. Si le système a une probabilité de 40% de se trouver dans l'état fondamental et une probabilité de 60% de se trouver dans le premier état excité,

1. Quelle est la fonction d'onde de l'atome ?
2. Quelle la valeur moyenne de l'énergie de l'atome ?

Exercice 3 :
Une particule est piégée dans une boite unidimensionnelle de largeur a. A $t = 0$, elle est décrite par la fonction d'onde suivante :

$$\psi(x,0) = \begin{cases} A & \text{si } 0 < x < a/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Normaliser $\psi(x, 0)$.
2. Quelle est la probabilité pour qu'une mesure de l'énergie donnerait la valeur $\pi^2\hbar^2/2ma^2$?

Exercice 4 :
Une particule de masse m, piégée dans une boite unidimensionnelle de largeur a est décrite à $t = 0$ par la fonction d'onde suivante :

$$\psi(x,0) = \frac{A}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi x}{a} + i\sqrt{\frac{3}{5a}} \sin \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{\sqrt{5a}} \sin \frac{5\pi x}{a}$$

où A est une constante réelle.

1. Normaliser $\psi(x,0)$.
2. On procède à une mesure de l'énergie du système, donner les résultats possibles et la probabilité correspondant à chaque résultat obtenu. Calculer la valeur moyenne de l'énergie.
3. Trouver la fonction d'onde $\psi(x,t)$ à un instant t ultérieur.
4. Déterminer la probabilité de trouver le système à un instant t dans l'état $\phi(x,t) = \sqrt{2/a}\sin(5\pi x/a)\exp(-iE_5 t/\hbar)$; puis déterminer la probabilité de le trouver dans l'état $\chi(x,t) = \sqrt{2/a}\sin(2\pi x/a)\exp(-iE_2 t/\hbar)$.