Université A. Mira de Béjaia,
Département de Génie Civil

Cours d'Elasticité 2008/2009
4èmeAnnée et Master I

Rappels de Mathématiques
(suite du chapitre 1)

A. Seghir
http://www.freewebs.com/seghir

Table des matières

1 Matrices

Une matrice $m \times n$ est une représentation de nombres sous forme d'un tableau de m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Chaque élément est désigné par deux indices i, j qui correspondent à sa position dans le tableau.

Si $m = n$, la matrice est dite carrée et si $m = n = 1$, elle se réduit à un scalaire. Les matrices sont très utiles pour résoudre simultanément les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

qui peuvent toujours se mettre sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

ou sous forme compacte :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{A}$: est la matrice carrée d'ordre n contenant les coefficients du système linéaire

$\boldsymbol{X}$: est le vecteur des variables inconnues

$\boldsymbol{B}$: est le vecteur des variables connues

donc on transforme le vecteur $\boldsymbol{X}$, en un vecteur $\boldsymbol{B}$ à l'aide de $\boldsymbol{A}$, d'où la définition suivante :

Une matrice $\boldsymbol{M}$ est une application linéaire qui associe à tout vecteur $\boldsymbol{V}$ une image $\boldsymbol{V'}$

$$\boldsymbol{V} \xrightarrow{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{V'} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}$$

Une matrice est dite matrice identité si elle associe à tout vecteur $\boldsymbol{V}$ le vecteur lui-même (elle ne fait aucune transformation du vecteur), elle est notée $\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{V'} = \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}$$

1.1 Determinant

Le déterminant d'une matrice carrée est un nombre tel que :

si $\boldsymbol{A} = a_{11}$ est d'ordre 1 (1×1) :

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}$$

si $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]$ est d'ordre 2 (2×2) :

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

si $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]$ est d'ordre 3 (3×3) :

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

si $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]$ est d'ordre n $(n \times n)$:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots + \cdots \pm a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

En élasticité, on se limite aux matrices d'ordre 3, $(n = 3)$.

1.2 Opérations matricielles

$\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux matrices de composantes a_{ij} et b_{ij} et m est un scalaire.

1. Egalité
   Deux matrices du même ordre sont égales si et seulement si toutes leurs composantes sont égales une à une :
   $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \;:\; a_{ij} = b_{ij}$$
2. Transposée
   $$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T \;:\; b_{ij} = a_{ji}$$
3. Multiplication par un scalaire
   $$\boldsymbol{B} = m\boldsymbol{A} \;:\; b_{ij} = m a_{ji}$$
4. Multiplication matricielle
   $$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \;:\; c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$
5. Inversion matricielle
   $$\boldsymbol{A}^{-1} \text{ inverse de } \boldsymbol{A} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

Remarques

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$
2. $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$
3. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T$
4. $\det(m\boldsymbol{A}) \neq m\det(\boldsymbol{A})$

1.3 Matrice de rotation

Un point P de coordonnées (x, y) exprimées dans un repère XY s'exprime par les coordonnées (x', y') lorsque le repère subi une rotation d'angle θ et devient $X'Y'$.

Les nouvelles coordonnées s'expriment en fonctions des anciennes coordonnées comme suit :

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

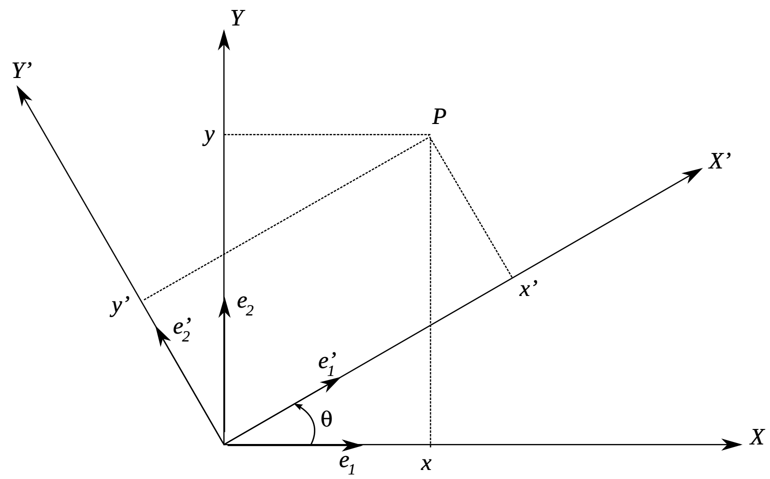
soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

ou encore, en plus compacte : $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$

$\boldsymbol{A}$ est la matrice de rotation de repère, elle contient les cosinus directeurs des nouveaux axes par rapport aux anciens axes. Si on note les vecteurs unitaires des axes originaux $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$, ceux des nouveaux axes $\boldsymbol{e'_1}$ et $\boldsymbol{e'_2}$ alors :

$$a_{ij} = \boldsymbol{e'_i} \cdot \boldsymbol{e_j}$$



1.4 Somme de deux rotations

Lorsque le repère $X'Y'$ subit lui aussi une rotation d'angle ϕ, les coordonnées (x', y') deviennent (x'', y'') tel que :

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}'' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}'$$

$\boldsymbol{B}$ est la matrice de la seconde rotation.

En fonction des coordonnées origines (x, y) :

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

soit :

$$\boldsymbol{V}'' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$$

Le produit matricielle donne :

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ -\sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

1.5 Inverse d'une rotation

Si le repère $(X'Y')$ subit une rotation d'angle $-\theta$, on retrouve le repère initial (XY), d'où :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}' \quad ; \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^T$$

L'inverse d'une matrice de rotation est égale à sa transposée.

1.6 Rotation 3D

La rotation 2D fait changer les coordonnées x et y, la coordonnées z reste telle qu'elle $(z' = z)$. On dit que la rotation 2D se fait par rapport à l'axe Z et on écrit le changement de coordonnées en incluant z comme suit :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{A}_z\boldsymbol{V}$$

De même on écrit les matrices de rotations d'angles θ_x et θ_y par rapport aux axes X et Y comme suit :

$$\boldsymbol{A}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & \sin(\theta_x) \\ 0 & -\sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix}$$

Remarque

Une rotation $\boldsymbol{A}_x$ par rapport à X suivie d'une rotation $\boldsymbol{A}_y$ par rapport à Y est différente de la rotation $\boldsymbol{A}_y$ suivie de la rotation $\boldsymbol{A}_x$:

$$\boldsymbol{A}_y\boldsymbol{A}_x \neq \boldsymbol{A}_x\boldsymbol{A}_y$$

2 Transformation linéaire

Une transformation linéaire est une transformation dans laquelle chaque nouvelle variable est une combinaison linéaire d'anciennes variable. En 2D :

$$x' = ax + by \quad ; \quad y' = cx + dy$$

avec a, b, c et d sont des constantes.

Du point de vue vectorielle :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

où

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$$

$\boldsymbol{M}$ est la matrice de la transformation

Si x' est perpendiculaire à y' et $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$ alors la matrice $\boldsymbol{M}$ est une matrice orthogonale.

La longueur d'un vecteur ne change pas avec la rotation d'axes et on dit que la rotation est une transformation orthogonale

Définition

Une transformation orthogonale est une transformation linéaire qui préserve les longueurs. La matrice $\boldsymbol{M}$ d'une transformation orthogonale est une matrice orthogonale et on a :

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{M}^T$$

Lorsque les longueurs ne changent pas, on a :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x'^2 + y'^2 \\ &= (ax + by)^2 + (cx + dy)^2 \\ &= (a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + 2(ab + cd)xy \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ b^2 + d^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \end{aligned}$$

ou bien, en utilisant la matrice de transformation $\boldsymbol{M}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

soit :

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T = \boldsymbol{I}$$

ou

$$\boldsymbol{M}^T = \boldsymbol{M}^{-1}$$

3 Valeurs et vecteurs propres

Dans une transformation linéaire, un vecteru $\boldsymbol{V}$ d'origine $(0,0)$ et d'extrémité (x,y) se transforme en vecteur $\boldsymbol{V}'$ d'origine $(0,0)$ et d'extrémité (x',y'), il subit alors une rotation et un allongement (ou rétrécissement).

La transformation engendre un changement de direction et un changement de module des vecteurs.

Si on veut s'intéresser aux vecteurs qui ne subissent pas de rotation avec la transformation alors on cherche $\boldsymbol{V}'$ qui restent parallèles à $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{V}' \; // \; \boldsymbol{V} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{V}' = \lambda \boldsymbol{V}$$

λ est une constante scalaire.

En utilisant la transformation :

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{V} = \lambda \boldsymbol{V}$$

ce qui donne

$$(\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$$

qui possède une solution non triviale ($\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{0}$) si le déterminant : $\det(\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$

Les racines de cette équation sont appelées valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{M}$ et les vecteurs correspondant sont appelés vecteurs propres.

Exemple

On considère la transformation :

$$\begin{cases} x' = 5x - 2y \\ y' = -2x + 2y \end{cases} \qquad ; \qquad \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Les valeurs propres sont solution de

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad ; \qquad (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$$

ce qui donne deux racines : $\lambda = 1$ et $\lambda = 6$

Les vecteurs qui ne subissent pas de rotation s'obtiennent par résolution du système pour chacune des valeurs de λ

pour $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \qquad \text{donne la droite :} \quad 2x - y = 0$$

pour $\lambda = 6$:

$$\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \qquad \text{donne la droite :} \quad x + 2y = 0$$

Les deux droites définissent les directions propres, on dit aussi 'directions principales'

Les vecteurs parallèles à la droite $2x - y = 0$, ne subissent aucune transformation et les vecteurs parallèles à la droite $x + 2y = 0$, s'allongent de 6 fois leurs longueurs initiales.

Tous les autres vecteurs subissent une rotation et un changement de longueur en même temps.

Les vecteur unitaires définis le long des deux droites sont les vecteurs propres normalisés. Ils définissent une base puisque les deux droites sont perpendiculaires. ces vecteurs sont :

$$\boldsymbol{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1 \quad 2 >$$

$$\boldsymbol{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} < -2 \quad 1 >$$

Exemple

Le vecteur $\boldsymbol{V} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ devient :

$$\boldsymbol{V}' = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

il était de longueur $\sqrt{2}$ et incliné de 45° par rapport l'axe X et devient de longueur 3 et parallèle à l'axe X.

Le vecteur $\boldsymbol{V} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$ parallèle à la droite $2x - y = 0$ devient :

$$\boldsymbol{V}' = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

il ne subit aucun changement

Le vecteur $\boldsymbol{V} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$ parallèle à la droite $x + 2y = 0$ devient :

$$\boldsymbol{V}' = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 \\ 6 \end{Bmatrix} = 6 \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

il ne subit qu'un allongement de 6.

3.1 Diagonalisation d'une matrice

On s'intéresse dans la diagonalisation d'une matrice à la description de la transformation linéaire qu'elle représente dans un nouveau repère déduit par rotation du repère initial pour confondre avec les direction principales.

Dans le repère initial (XY) muni de vecteurs unitaires (e_1, e_2), la transformation d'un vecteur $\boldsymbol{V}$ à l'aide de la matrice de transformation $\boldsymbol{M}$ donne :

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$$

Avec une rotation d'axes de matrice $\boldsymbol{A}$, les vecteurs $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{V'}$ s'expriment par :

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AV} \qquad ; \qquad \boldsymbol{U'} = \boldsymbol{AV'}$$

soit par rotation inverse :

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{U} \qquad ; \qquad \boldsymbol{V'} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{U'}$$

La transformation de $\boldsymbol{V}$ en $\boldsymbol{V'}$ à l'aide de $\boldsymbol{M}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{U'} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{U})$$

d'où la transformation de $\boldsymbol{U}$ en $\boldsymbol{U'}$:

$$\boldsymbol{U'} = \boldsymbol{AMA}^T\boldsymbol{U} \qquad ; \qquad \boldsymbol{U'} = \boldsymbol{DU}$$

Si la rotation fait coïncider les nouveaux axes avec les directions principales, alors la matrice $\boldsymbol{D}$ est diagonale. La matrice de rotation contient les deux nouveaux vecteurs unitaires calculés en normalisant les directions principales.

Exemple

Dans l'exemple précédent les directions principales sont données par les deux droites $y - 2x = 0$ et $2y - x = 0$. Les vecteurs unitaires dans ces deux directions sont : $\boldsymbol{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1 \quad 2 >$ et $\boldsymbol{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} < -2 \quad 1 >$

La matrice de rotation est : $\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

L'angle de rotation est : $\theta = \arccos(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1) = 63.435°$

La matrice diagonale s'obtient par :

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{AMA}^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Avec la rotation d'axe, la transformation $\boldsymbol{M}$ est décrite d'une manière plus simple. Dans le nouveau repère, on peut écrire :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 6y \end{cases}$$

4 Tenseurs

Les tenseurs sont la généralisation des scalaires, des vecteurs et des matrices. Un tenseur est un mot générique d'entités mathématiques qui désigne une quantité physique. La description d'un tenseur dépend du repère de référence utilisé. Dans ce cours, on s'intéresse aux tenseurs cartésiens, le système de référence est donc un repère orthonormé $(OXYZ)$ qui peut subir une rotation de matrice A et changer en un repère $(OX'Y'Z')$.

Ordre	Entité	Dimension	Nbr. Composantes	Notation
0	scalaire	$2D$	$2^0 = 1$	a
		$3D$	$3^0 = 1$	
1	vecteur	$2D$	$2^1 = 2$	a_i
		$3D$	$3^1 = 3$	
2	matrice	$2D$	$2^2 = 4$	a_{ij}
		$3D$	$3^2 = 9$	
n		$2D$	2^n	$a_{ijk\cdots}$
		$3D$	3^n	

4.1 Définition

Un tenseur cartésien T d'ordre n est une fonction qui associe à un repère (2D/3D) un groupe de $(2^n/3^n)$ composantes réelles $T_{ijk\cdots}$ qui se transforment selon la relation suivante :

$$T'_{lmn\cdots} = \sum_{i,j,k\cdots=1}^{3} a_{li}a_{mj}a_{nk}\cdots T_{ijk\cdots} \tag{1}$$

lorsque le repère subi une rotation de matrice A. Les a_{li} désignent les cosinus directeurs des nouveaux axes du repère $(OX'Y'Z')$ par rapport au repère initial $(OXYZ)$. $T_{ijk\cdots}$ sont les composantes du tenseur exprimées par rapport au repère initial et $T'_{lmn\cdots}$ sont les nouvelles valeurs des composantes du même tenseur exprimées dans le nouveau repère.

4.2 Tenseur d'ordre 1

Un tenseur d'ordre 1 (vecteur) est un ensemble de trois composantes (repère $3D$) V_i définies dans un repère $(OXYZ)$ et deviennent V'_l lorsque le repère subi une rotation de matrice A.

$$V'_l = \sum_{i=1}^{3} a_{li}V_i \tag{2}$$

Exemple

Une poutre inclinée de 30° par rapport à l'horizontal, chargée à son extrémité par une force F verciale de $500KN$.

La force est une quantité physique représentée par un tenseur d'ordre 1 dans un repère $2D$. Son expression par rapport au repère (OXY) est :

$$F = \left\{ \begin{array}{l} F_1 = 0 \\ F_2 = -500 \end{array} \right\}$$

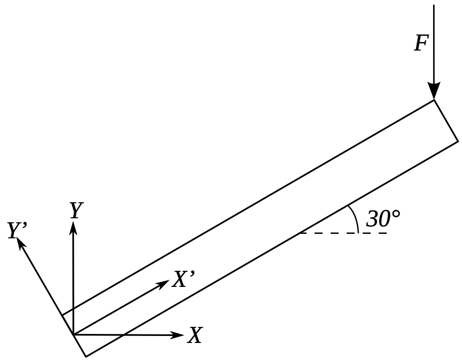


FIG. 1 – Exemple de rotation de repère

La matrice de rotation du repère (OXY) au repère $(OX'Y')$ lié à la poutre est :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = \cos(30) & a_{12} = \sin(30) \\ a_{21} = -\sin(30) & a_{22} = \cos(30) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

L'expression de la force dans le nouveau repère $(OX'Y')$ devient :

$$\begin{aligned} F'_1 &= \sum_{i=1}^{2} a_{1i}F_i = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 = -250KN \\ F'_2 &= \sum_{i=1}^{2} a_{2i}F_i = a_{11}F_1 + a_{12}F_2 = -250\sqrt{3}KN \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$F' = \begin{bmatrix} \cos(30) & \sin(30) \\ -\sin(30) & \cos(30) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -250 \\ -250\sqrt{3} \end{Bmatrix} KN$$

4.3 Tenseur d'ordre 2

Un tenseur d'ordre 2 (matrice) est un ensemble de neuf (09) composantes (repère $3D$) V_{ij} définies dans un repère $(OXYZ)$ et deviennent V'_{kl} lorsque le repère subi une rotation de matrice A.

$$V'_{kl} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ki}a_{lj}V_{ij} \tag{3}$$

Exemple

Si dans l'exemple précédent le vecteur force est lié au vecteur déplacement de l'extrémité libre :

$$F = KU$$

avec K est une matrice 2×2 ou tenseur d'ordre 2, alors dans le nouveau repère $(OX'Y')$ nous avons :

$$F' = AF \text{ et } U' = AU$$

ce qui donne par inversion :

$$F = A^T F' \text{ et } U = A^T U'$$

En remplaçant dans l'expression $F = KU$, on exprime la nouvelle relation entre la force et le déplacement :

$$A^T F' = K(A^T U')$$

soit :

$$F' = K'U' \text{ avec } K' = AKA^T$$

Posons $V = KA^T$, ses composantes s'écrivent :

$$V_{iq} = \sum_{j=1}^{2} K_{ij}(a_{jq})^T = \sum_{j=1}^{2} a_{qj} K_{ij}$$

La multiplication à gauche par A donne les composantes de K dans le nouveau repère :

$$K'_{pq} = \sum_{i=1}^{2} a_{pi} V_{iq} = \sum_{i=1}^{2} a_{pi} \sum_{j=1}^{2} a_{qj} K_{ij} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{pi} a_{qj} K_{ij}$$

4.4 Propriétés des tenseurs

a) Symétrie

Un tenseur d'ordre $n > 2$ est dit symétrique par rapport à une paire d'indices si ses composantes restent inchangées sous l'effet d'une permutation de ces indices :

$V_{ijk\ldots} = V_{jik\ldots}$: symétrie par rapport à ij, et

$V_{ijk\ldots} = V_{ikj\ldots}$: symétrie par rapport à jk

b) Antisymétrie

Un tenseur d'ordre $n > 2$ est dit antisymétrique par rapport à une paire d'indices si ses composantes changent de signe sous l'effet d'une permutation de ces indices :

$V_{ijk\ldots} = -V_{jik\ldots}$: antisymétrie par rapport à ij, et

$V_{ijk\ldots} = -V_{ikj\ldots}$: antisymétrie par rapport à jk

c) Isotropie

Un tenseur est dit isotrope si ses composantes restent inchangées sous l'effet d'une rotation de repère. *Exemple : le tenseur identité I* : $I' = AIA^T = I$

5 Notation indicielle

Pour une écriture compacte et allégée des expressions mathématiques, on utilise la notation indicielle. L'espace tridimensionnel est rapporté à un repère orthonormé $(OX_1X_2X_3)$ dont les vecteurs unitaires sont notés : $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$. Un point M est localisé par les coordonnées x_1, x_2 et x_3 et noté $M(x_i)$, l'indice i prend les valeurs 1 à 3 (ou 1 à 2 si l'espace est 2D).

Les tenseurs que nous rencontrerons dans ce cours seront notés comme suit :

Tenseur d'ordre 0	Scalaire	a , b , α	1 composante
Tenseur d'ordre 1	Vecteur	a_i , v_i , V_i	3 composantes
Tenseur d'ordre 2	Matrice	a_{ij} , v_{ij} , T_{ij}	9 composantes
Tenseur d'ordre 3		a_{ijk} , v_{ijk} , T_{ijk}	27 composantes
Tenseur d'ordre 4		a_{ijkl}, v_{ijkl}, D_{ijkl}	81 composantes

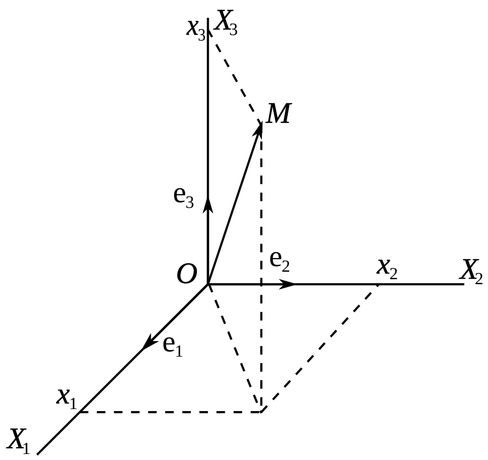


FIG. 2 – Notations utilisées pour l'espace 3D

5.1 Convention de somme

Si on considère la somme :

$$S = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

son écriture compacte usuelle est :

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i \quad \text{ou : } S = \sum_{j=1}^{n} a_jx_j \quad \text{ou bien : } S = \sum_{m=1}^{n} a_mx_m$$

Les indices i, j et m sont appelés *indices muets* dans le sens où la valeur de S ne dépend pas de l'indice utilisé dans l'expression de la somme.

On peut simplifier d'avantage l'écriture de cette somme on adoptant la convention de somme *d'Einstien* suivante :

Lorsqu'un indice est répété (apparait 2 fois) dans un même terme, ça implique une somme sur l'indice répété

L'écriture précédente se simplifie donc en :

$$S = a_i x_i \tag{4}$$

Remarque
Les expressions telles que $a_i b_i x_i$ où l'indice apparait plus de deux fois sont exclues de la convention, le signe $\sum$ doit être gardé pour désigner une somme des termes, sinon l'ecriture est interprétée comme un seul terme.

En élasticité sauf indication ou précision, la somme s'applique de 1 à 3.

Exemples :

$$\begin{aligned} a_i b_i &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 && \text{(produit scalaire)} \\ c_{ii} &= c_{11} + c_{22} + c_{33} && \text{(trace de la matrice)} \end{aligned}$$

Double somme

Lorsqu'un terme contient deux indices, chacun apparaît deux fois, une double somme sur les deux indices est interprétée.

Exemple :

$$\begin{aligned} a_{ij} x_i x_j \;&=\; (a_{i1} x_i x_1) + (a_{i2} x_i x_2) + (a_{i3} x_i x_3) \\ &=\; (a_{11} x_1 x_1 + a_{21} x_2 x_1 + a_{31} x_3 x_1) \\ &+\; (a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2 x_2 + a_{32} x_3 x_2) \\ &+\; (a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3 x_3) \end{aligned}$$

5.2 Indice libre

Un indice est dit *indice libre* s'il est répété de part et d'autre du signe égal (=) d'une équation. L'écriture :

$$C_i = A_i + B_i \tag{5}$$

est interprétée comme suit : le vecteur C est la somme des vecteurs A et B.

L'écriture :

$$Y_i = A_{ij} X_j \tag{6}$$

comporte un indice libre i qui désigne 3 équations et un indice muet j qui désigne une somme. Explicitement :

$$\begin{aligned} y_1 = a_{1,j} x_j = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ y_2 = a_{2,j} x_j = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ y_3 = a_{3,j} x_j = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned}$$

L'écriture :

$$V_{ij} = U_{ik}U_{jk} \tag{7}$$

comporte 2 indices libres i et j et un indice muet k. C'est un ensemble de 9 équations qui donnent l'expression du tenseur V en fonction de U : ($V = UU^T$).

5.3 Symbol de Kronecker

Le symbole *delta de Kronecker* est défini comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{8}$$

Il est équivalent à la matrice identité :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les propriétés du symbole δ que nous allons rencontrer dans ce cours sont :

1. symétrie : $\delta_{ij} = \delta_{ji}$
2. isotropie : $\delta_{kl} = a_{ki}a_{lj}\delta_{ij} = \delta_{ij}$
3. trace : $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$
4. produit avec un vecteur : $\delta_{ij}V_j = V_i$; $\delta_{ij}V_i = V_j$
   particulièrement : $\boldsymbol{e}_i = \delta_{ij}\boldsymbol{e}_j$
5. produit scalaire des vecteurs unitaires : $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$
6. trace d'une matrice : $\delta_{ij}A_{ij} = A_{ii} = A_{jj}$

5.4 Symbole de Permutation

Le symbole de permutation $\mathscr{E}$ est défini comme suit :

$$\mathscr{E}_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ apparaissent dans l'ordre 12312 ...} \\ -1 & \text{si } ijk \text{ apparaissent dans l'ordre 32132 ...} \\ 0 & \text{si } ijk \text{ apparaissent dans un autre ordre} \end{cases} \tag{9}$$

Dans le cas où les indices i, j et k prennent en rotation circulaire les valeurs 1,2 et 3, on peut mettre :

$$\mathscr{E}_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i) \tag{10}$$

on a :

$$\mathscr{E}_{123} = \mathscr{E}_{231} = \mathscr{E}_{312} = 1$$

et :

$$\mathscr{E}_{132} = \mathscr{E}_{321} = \mathscr{E}_{132} = -1$$

mais dès que l'un des indices est répété $\mathscr{E}$ prend la valeur nulle :

$$\mathscr{E}_{112} = \mathscr{E}_{122} = \mathscr{E}_{233} \cdots = 0$$

Toute interchange dans les indices entraîne l'inversion de signe du symbole :

$$\mathscr{E}_{ijk} = -\mathscr{E}_{kji} = \mathscr{E}_{kij} = -\mathscr{E}_{ikj}$$

Les produits vectoriels des vecteurs unitaires s'écrivent comme suit :

$$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \mathscr{E}_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{11}$$

D'une manière générale le produit vectoriel de deux vecteurs U et V s'écrit :

$$\begin{aligned} U \wedge V &= (u_i\boldsymbol{e}_i) \wedge (v_j\boldsymbol{e}_j) \\ &= u_i v_j(\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j) \\ &= \mathscr{E}_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k \end{aligned} \tag{12}$$

5.5 Identité $\mathscr{E}$-δ

Le produit de deux symboles de permutation peut être écrit en fonction des symboles de Kronecker par l'identité suivante :

$$\mathscr{E}_{ijk}\,\mathscr{E}_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr} \tag{13}$$

$$\mathscr{E}_{ijm}\,\mathscr{E}_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} \tag{14}$$

Une des applications de cette identité est la démonstration la relation suivante concernant le triple produit vectoriel.

$$U \wedge (V \wedge W) = (U \cdot W)V - (U \cdot V)W$$

U, V et W étant trois vecteurs (ou tenseurs d'ordre 1).

En effet, l'equation 12 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} U \wedge (V \wedge W) &= u_i\boldsymbol{e}_i \wedge (v_j\boldsymbol{e}_j \wedge w_k\boldsymbol{e}_k) \\ &= u_i\boldsymbol{e}_i \wedge (v_j w_k \mathscr{E}_{jkl}\boldsymbol{e}_l) \\ &= \mathscr{E}_{jkl} u_i v_j w_k (\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_l) \\ &= \mathscr{E}_{jkl}\mathscr{E}_{ilm} u_i v_j w_k \boldsymbol{e}_m \end{aligned}$$

mais $\mathscr{E}_{ilm} = -\mathscr{E}_{iml}$ et l'identité δ-$\mathscr{E}$ donne :

$$-\mathscr{E}_{iml}\mathscr{E}_{jkl} = \delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}$$

Le triple produit vectoriel devient donc :

$$U \wedge (V \wedge W) = (\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}) u_i v_j w_k \boldsymbol{e}_m$$

et compte tenu de :

$$\begin{aligned}\delta_{mj}v_j &= v_m\\ \delta_{ik}w_k &= w_i\\ \delta_{mk}w_k &= w_m\\ \delta_{ij}v_j &= v_i\end{aligned}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned}U \wedge (V \wedge W) &= u_i w_i v_m \boldsymbol{e}_m - u_i v_i w_m \boldsymbol{e}_m\\ &= (U \cdot W)V - (U \cdot V)W\end{aligned}$$

6 Champ tensoriel et différentiation d'un champ tensoriel

Un *champ tensoriel* associe à chaque position $M(x_i)$, et à chaque instant t, un tenseur $T_{ij\dots}(M,t)$. M appartient à une région de l'espace $3D$ et t varie dans un intervalle de temps. Le champ est continu et différentiable si toutes les composantes de $T_{ij\dots}$ sont des fonctions de M et de t continues et différentiables. Le champ tensoriel peut être de n'importe quel ordre.

La différentiation par rapport au temps sera notée :

$$\frac{\partial T_{ij\dots}}{\partial t} \text{ ou : } \dot{T} \tag{15}$$

La différentiation spatiale par rapport à la coordonnée x_p est notée :

$$\frac{\partial T_{ij\dots}}{\partial x_p} \text{ ou : } \partial_p T_{ij\dots} \text{ ou bien : } T_{ij\dots,p} \tag{16}$$

de même la dérivée partielle seconde par rapport à x_p et x_q est notée :

$$\frac{\partial^2 T_{ij\dots}}{\partial x_p \partial x_q} \text{ ou : } \partial_{pq} T_{ij\dots} \text{ ou bien : } T_{ij\dots,pq} \tag{17}$$

6.1 Différentiation d'un vecteur

Si $V = V_i \boldsymbol{e}_i$ est un vecteur (tenseur d'ordre 1) dont les composantes sont des fonctions continues de t alors :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V_1}{\partial t}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial V_2}{\partial t}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial V_3}{\partial t}\boldsymbol{e}_3 = V_{i,t}\,\boldsymbol{e}_i = \dot{V}_i \boldsymbol{e}_i \tag{18}$$

Si λ est un tenseur d'ordre 0 (scalaire) et A et B sont des tenseurs dordre 1 (vecteurs), on a les règles de calcul suivantes :

$$\frac{\partial(\lambda A)}{\partial t} = \frac{\partial \lambda}{\partial t}A + \lambda\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t}\cdot B + A\cdot\frac{\partial B}{\partial t}$$
$$\frac{\partial(A\wedge B)}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t}\wedge B + A\wedge\frac{\partial B}{\partial t}$$

6.2 Gradient d'un scalaire

On considère un tenseur d'ordre zéro (scalaire) ϕ fonction de la position : $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3)$, et s une courbe dans l'espace $s = s(x_1, x_2, x_3)$.

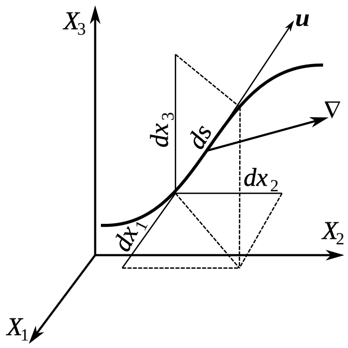


FIG. 3 – Gradient

La variation de ϕ le long de s est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} \tag{19}$$

mais $\partial x_i/\partial s$ sont les cosinus directeurs du vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$ tangent à ds $(u_i = x_{i,s})$:

$$\boldsymbol{u} =< \frac{\partial x_1}{\partial s} \quad \frac{\partial x_2}{\partial s} \quad \frac{\partial x_3}{\partial s} > \tag{20}$$

On introduit le vecteur des dérivées appelé *operateur gradient* :

$$\nabla =< \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} > \tag{21}$$

Lorsqu'il est appliqué à ϕ, la quantité $\nabla\phi$ (aussi noté : gradϕ) est appelée *le Gradient de* ϕ.

La différentielle de ϕ par rapport à ds peut donc s'écrire en fonction du produit scalaire entre le vecteur ∇ et le vecteur unité $\boldsymbol{u}$ comme suit :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \nabla\phi\cdot\boldsymbol{u} \tag{22}$$

En utilisant la notation indicielle :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \partial_i\phi u_i = \phi_{,i}\, u_i \tag{23}$$
$$\nabla =< \partial_1 \quad \partial_2 \quad \partial_3 >= \partial_i \boldsymbol{e}_i \tag{24}$$

Remarque
Dans les équations d'élasticité que nous allons rencontrer dans ce cours, lorsque i est un indice libre alors $\partial_i \phi$ désigne le vecteur gradient de ϕ

Interprétation géométrique

Le produit scalaire $\nabla\phi \cdot \boldsymbol{u}$ s'interprète comme la projection du gradient de ϕ sur la tangente à la courbe s au point considéré :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \nabla\phi \cdot \boldsymbol{u} = \left|\nabla\phi\right| |\boldsymbol{u}| \cos\theta \tag{25}$$

avec θ est l'angle entre les deux vecteurs et $|\boldsymbol{u}| = 1$. Ce qui donne la variation de ϕ le long de s la plus grande lorsque s est parallèle au gradient de ϕ $(\theta = 0)$.

D'autre part, lorsque la courbe s est confondue avec l'une des courbes isovaleurs de ϕ $(\phi = C^{\text{ste}})$ alors la variation de ϕ est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = 0$$

ce qui donne, compte tenu du produit scalaire $\nabla\phi \cdot \boldsymbol{u} = 0$ un angle θ de $\pi/2$ d'où $\nabla\phi$ perpendiculaire aux courbes isovaleurs de ϕ

Exemple 1
On cherche la dérivée de $\phi = x_1^2 x_2 + x_1 x_3$ au point $M(1,2,-1)$ dans la direction donnée par le vecteur $A = < 2 \quad -2 \quad 1 >$.

Le gradient de ϕ est :

$$\nabla\phi = \left\{ \begin{array}{l} \phi_{,1} = 2x_1 x_2 + x_3 \\ \phi_{,2} = x_1^2 \\ \phi_{,3} = x_1 \end{array} \right\}$$

il vaut au point M :

$$\nabla\phi(1,2,-1) = < 3 \quad 1 \quad 1 >$$

Le vecteur unitaire de même direction que A est :

$$\boldsymbol{u} = \frac{A}{|A|} = < 2/3 \quad -2/3 \quad 1 >$$

La dérivée vaut

$$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s = \nabla\phi \cdot \boldsymbol{u} = 5/3$$

Exemple 2
Cet exemple montre que le gradient d'une fonction bidimensionnelle est perpendiculaire à ces courbes d'isovaleurs. On prends

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Soit en coordonnées cylindriques

$$\phi(r) = \frac{1}{2} r^2$$

Les courbes isovaleurs de $\phi = C^{\text{ste}}$ sont des cercles concentriques de rayon $r = C^{\text{ste}}$ et de centre $(0,0)$.

Le gradient de ϕ est $\nabla\phi =< x_1 \quad x_2 >$, sa direction s'obtient en le normalisant :

$$\frac{< x_1 \quad x_2 >}{\left|< x_1 \quad x_2 >\right|} =< \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \quad \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} >=< \cos\theta \quad \sin\theta >$$

Il est donc perpendiculaire aux cercles d'isovaleurs de ϕ et on conclue que la variation la plus rapide de ϕ s'effectue selon le rayon r.

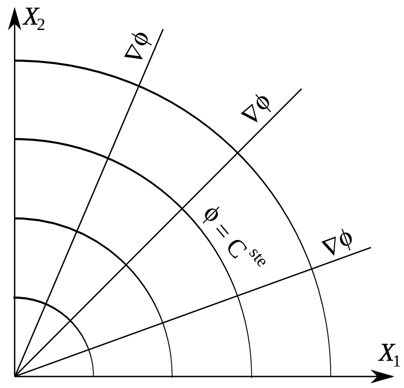


FIG. 4 – Isovaleurs et gradient d'une fonction scalaire

6.3 Divergence et rotationnel d'un vecteur

Si V est un tenseur d'ordre 1 (vecteur) alors :

Le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V &= < \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} > \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{aligned} \tag{26}$$

est appelé divergence de V et s'écrit en notation indicielle comme suit :

$$\nabla V = \partial_i v_i = v_{i,i} \tag{27}$$

Le produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge V &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3})\boldsymbol{e}_1 + (\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1})\boldsymbol{e}_2 + (\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2})\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{28}$$

est appelé rotationnel de V et s'écrit en notation indicielle comme suit :

$$\mathcal{E}_{ijk}\partial_i v_j \boldsymbol{e}_k \text{ ou bien : } \mathcal{E}_{ijk} v_{i},_{j}\, \boldsymbol{e}_k \tag{29}$$

Remarques

1. *La divergence est un scalaire et le rotationnel est un vecteur. On trouve souvent dans la littérature les notations : rotV et divV.*
2. *Si $U = \nabla\phi$, on dit que le vecteur U dérive d'un potentiel ϕ et nécessairement : $rotU = 0$*
3. *Le rotationnel d'un gradient est nul :*

$$\nabla \wedge (\nabla\phi) = 0 \quad \forall\phi$$

4. *La divergence d'un rotationel est nulle*

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge V) = 0 \quad \forall V$$

6.4 Laplacien d'un scalaire

La divergence d'un gradient d'une fonction scalaire ϕ est le *Laplacien* de la fonction. Il est noté comme suit :

$$\nabla\nabla^T\phi \text{ ou } \Delta\phi \text{ ou bien } \nabla^2\phi \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= <\partial/\partial x_1 \quad \partial/\partial x_2 \quad \partial/\partial x_3> \begin{Bmatrix} \partial\phi/\partial x_1 \\ \partial\phi/\partial x_2 \\ \partial\phi/\partial x_3 \end{Bmatrix} \\
&= \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} \qquad (31)
\end{aligned}$$

En notation indicielle :

$$\Delta\phi = \partial_i\phi_i = \partial_{ii}\phi = \phi,_{ii} \tag{32}$$

On dit d'une fonction ϕ qui satisfait l'équation de *Laplace* : $\Delta\phi = 0$, quelle est harmonique et on dit qu'elle est bi-harmonique si $\Delta\Delta\phi = 0$.

6.5 Gradient d'un vecteur et divergence d'une matrice

Par extension des notions précédentes, on introduit le gradient d'un vecteur et la divergence d'une matrice lorsque l'operateur ∇ agit sur ces entités.

On défini le gradient d'un vecteur (tenseur d'ordre 1) V la matrice A telle que :

$$A_{ij} = V_{i},_{j} \tag{33}$$

soit sous forme matricielle :

$$A = \begin{bmatrix} \partial V_1/\partial x_1 & \partial V_1/\partial x_2 & \partial V_1/\partial x_3 \\ \partial V_2/\partial x_1 & \partial V_2/\partial x_2 & \partial V_2/\partial x_3 \\ \partial V_3/\partial x_1 & \partial V_3/\partial x_2 & \partial V_3/\partial x_3 \end{bmatrix} \tag{34}$$

La divergence d'une matrice (ou tenseur dordre 2) T est un vecteur V tel que :

$$V_i = T_{ij},_j \tag{35}$$

soit sous forme matricielle :

$$V = \begin{Bmatrix} V_1 = \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ V_2 = \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ V_3 = \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

7 Théorèmes intégrales de Gauss et de Stokes

Considérons un champ tensoriel $T_{ijk\dots}$ définit sur une région de l'espace $3D$ de volume V délimité par une surface fermée S. On note $\boldsymbol{n}$ la normale sortante de la surface (figure 5).

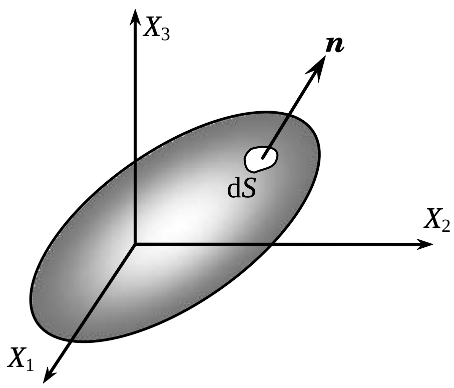


FIG. 5 – Theorem de divergence

7.1 Théorème de Gauss

Le *théorème de divergence de Gauss* établie une relation entre l'intégrale sur le volume V des dérivées du tenseur T et l'intégrale sur la surface S de la projection de T sur la normale $\boldsymbol{n}$.

$$\int_S (T_{ijk\dots})(n_q)\mathrm{d}S = \int_V T_{ijk\dots,q}\,\mathrm{d}V \tag{36}$$

L'application de ce théorème pour les cas des tenseurs les plus courants (matrice, vecteur et scalaire) s'écrit en utilisant les notations indicielle et matricielle comme suit :

un scalaire ϕ :

$$\int_S \phi n_i \, \mathrm{d}S = \int_V \phi_i \, \mathrm{d}V \quad \text{ou :} \quad \int_S \phi \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{grad}\phi \, \mathrm{d}V$$

un vecteur T :

$$\int_S T_j n_j \, \mathrm{d}S = \int_V T_{j,j} \, \mathrm{d}V \quad \text{ou} \quad \int_S T \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}T \, \mathrm{d}V$$

et

$$\int_S \mathcal{E}_{ijk} n_j T_k \, \mathrm{d}S = \int_V \mathcal{E}_{ijk} T_{k,j} \, \mathrm{d}V \quad \text{ou} \quad \int_S \boldsymbol{n} \wedge T \, \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{rot}T \, \mathrm{d}V$$

une matrice M :

$$\int_S M_{ij} n_j \, \mathrm{d}S = \int_V M_{ij,j} \, \mathrm{d}V \quad \text{ou} \quad \int_S M\boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}M \, \mathrm{d}V$$

7.2 Théorème de Stokes

Tandis que le théorème de divergence de Gauss relie l'intégrale de volume à l'intégrale de surface fermée délimitant le volume, le *théorème de Stokes* lie l'intégrale sur une surface ouverte à une intégrale curviligne sur la courbe délimitant la surface.

Ainsi si on nome S une surface ouverte avec C la courbe qui la délimite et on considère un élément de courbe ds de vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$ tel que $\mathrm{d}s\boldsymbol{u} = dx_i \boldsymbol{e}_i$ (figure 6), alors pour tout vcteur V :

$$\int_S \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \wedge V) \mathrm{d}S = \int_C V \, \mathrm{d}s \tag{37}$$

sous forme indicielle :

$$\int_S \mathcal{E}_{ijk} n_i V_{k,j} \, \mathrm{d}S = \int_C V_k \, \mathrm{d}x_k \tag{38}$$

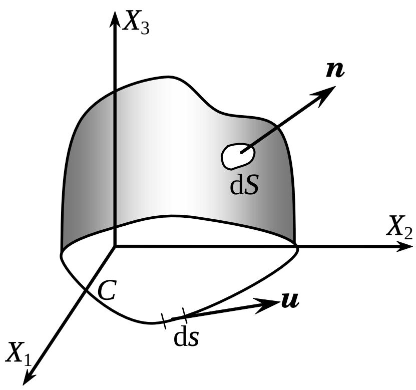


FIG. 6 – Surface ouverte