Université A/Mira-Bejaia
Faculté des Sciences Exactes.
Département de Mathématiques.

$1^{\text{ère}}$ année MI
Année universitaire 2020/2021
Durée de l'examen : 1h30

Examen session normale - Analyse II

NB: Appareils électroniques et documents sont interdits

Exercice 1 (5 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

1. *Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f au point 0 à l'ordre n. Sous quelles hypothèses cette formule est-elle valable?*

2. *Appliquer la formule de Taylor-lagrange sur la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 1 au voisinage de 0.*

3 *Déduire de la question précédente l'inégalité suivante:*

$$\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

4 *L'inégalité précédente est-telle valable quand $x \in]-1, 0[$?*

Exercice 2 (9 pts)

1. *Ecrire le développement limité des fonctions suivantes au voisinage de 0 à l'ordre 3:*

$$x \mapsto \sin(2x) \qquad x \mapsto x\cos x \qquad x \mapsto \ln(1+x^2) \qquad x \mapsto (1+x)e^x.$$

2. *Ecrire le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \sin(2x) + \ln(1+x^2)$.*

3. *Ecrire le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto x\cos x \sin 2x$.*

4. *Ecrire le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(1+x\cos x)$.*

5. *Calculer les limites suivante en utilisant les développements limités:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - (x+1)e^x + 1}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x\cos x)}{x(1+x)e^x}$$

Exercice 3 (6 pts)

On définit la fonction f par

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3+1} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

1. *Déterminer les constantes réelles a, b, c telles que*

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+d}{x^2-x+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

2. *Calculer $\int f(x)dx$*

3. *Calculer la limite de la suite suivante:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{nk-n^2}{n^3+k^3}.$$

Tournez la page

Corrigé Détaillé

Exercice 4

1. *La formule de Taylor-Lagrange de f au point 0 à l'ordre n:*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \textbf{1pts}$$

   Où c est un réel compris strictement entre 0 et x.

   La formule précédente est valable lorsque f est de classe $C^{n+1}(I)$ ***0.5pts***

2. *Posons $g(x) = \ln(x+1)$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$. Comme g est de classe C^2 alors il existe un réel c compris strictement entre 0 et x tel que*

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g^{(2)}(c)}{2}x^2. \quad \textbf{0.5pts}$$

   On calcule les premières dérivée de g,

   - $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ ***0.25pts***
   - $g''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ ***0.25pts***

   On obtient ainsi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+c)^2} \quad \textbf{0.5pts}$$

3. *Reprenons l'égalité précédente pour $x > 0$. Comme $0 < c < x$ alors*

$$0 < \frac{x^2}{2(1+c)^2} < \frac{x^2}{2}$$

   et donc

$$x - \frac{x^2}{2} < x - \frac{x^2}{2(1+c)^2} < x$$

   par conséquent

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x. \quad \textbf{1pts}$$

4. *A proprement parlé il y'a deux inégalités, à savoir*

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) \quad \textit{et} \quad \ln(1+x) < x.$$

   La première n'est pas valide dans l'intervalle $]-1, 0[$ en effet si

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) \quad \forall x \in]-1, 0[$$

Un passage à la limite lorsque $x \to -1$ nous conduit à

$$\frac{-3}{2} = \lim_{x\to -1}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) \leq \lim_{x\to -1} \ln(1+x) = -\infty,$$

ce qui est absurde. **0.5pts**

La deuxième inégalité quand à elle est vraie dans l'intervalle $]-1,0[$. En effet, on a de la question (3)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+c)^2}, \quad c \in]x,0[$$

et comme $\frac{x^2}{2(1+c)^2} > 0$, alors $x - \frac{x^2}{2(1+c)^2} < x$, ce qui donne

$$\ln(1+x) < x, \quad \forall x \in]-1,0[. \quad \textbf{0.5pts}$$

Exercice 5

1. *Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0,*

   - $\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$ **0.5pts**
   - *On a* $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ *d'où* $x\cos x = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. **0.5pts**
   - $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ *et $x \mapsto x^2$ s'annule en 0* **0.25pts**, *alors la règle de composition nous donne*

     $$\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^3). \quad \textbf{0.5pts}$$

   - $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, *donc*

     $$\begin{aligned}(x+1)e^x &= (x+1)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\Big\rfloor_3 + o(x^3)\\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\\ &= 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3). \quad \textbf{0.5pts}\end{aligned}$$

2. $\sin(2x) + \ln(1+x^2) = 2x - \dfrac{4}{3}x^2 + x^2 + o(x^3) = 2x + x^2 - \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$. **1.25pts**

3.

$$\begin{aligned}x\cos x \sin(2x) &= \left(x - \frac{x^3}{2}\right)\left(2x - \frac{4}{3}x^3\right)\Big\rfloor_3 + o(x^3)\\ &= 2x^2 + o(x^3). \quad \textbf{1.25pts}\end{aligned}$$

4. *On a* $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ *et* $x\cos x = x + o(x^2)$*, donc par la règle de composition des DL, on obtient*

$$\ln(1+x\cos x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \textbf{\textit{1.25pts}}$$

5. *On a*

$$\begin{aligned}\sin(2x) - (x+1)e^x + 1 &= 2x - \left(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2\right) + 1 + o(x^2) \\ &= \frac{-3}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\sin(2x) - (x+1)e^x + 1}{x^2} = \frac{-3}{2} + o(1). \quad \textbf{\textit{1pts}}$$

On calcule alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - (x+1)e^x + 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{3}{2} + o(1)\right) = -\frac{3}{2}. \quad \textbf{\textit{0.5pts}}$$

Pour calculer la deuxième limite on développe la fonction en question à l'ordre 1*. On a*

$$\frac{\ln(1+x\cos x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

et

$$\frac{1}{(1+x)e^x} = \frac{1}{1+2x+o(x)} = 1 - 2x + o(x)$$

Il suit alors

$$\frac{\ln(1+x\cos x)}{x(x+1)e^x} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)(1-2x)\Big]_1 + o(x) = 1 - 2x - \frac{x}{2} + o(x) = 1 - \frac{5}{4}x + o(x). \quad \textbf{\textit{1pts}}$$

On déduit alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x\cos x)}{x(x+1)e^x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{5}{4}x + o(x)\right) = 1. \quad \textbf{\textit{0.5pts}}$$

Exercice 6

1. *En multiplions l'égalité*

$$\frac{x-1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+d}{x^2-x+1} \quad (I)$$

par $(x+1)$ *on obtient*

$$\frac{x-1}{x^2-x+1} = a + (x+1)\frac{bx+d}{x^2-x+1}$$

Posons alors $x = -1$ *dans cette dernière on obtient* $a = -\dfrac{2}{3}$ ***0.5pts***.

Multiplions à présent l'égalité (I) par x pour obtenir

$$\frac{x^2-x}{x^3+1} = \frac{ax}{x+1} + \frac{bx^2+dx}{x^2-x+1}$$

En passant à la limite lorsque $x \to +\infty$ on obtient

$$0 = a + b$$

On tire alors $b = -a = \dfrac{2}{3}$ **0.5pts**.

On substituant la valeur 0 *à* x *dans l'égalité (I), on obtient*

$$-1 = a + d$$

ainsi $d = -1 - a = -\dfrac{1}{3}$. **0.5pts**. *En somme, on a*

$$\frac{x-1}{x^3+1} = -\frac{2}{3(x+1)} + \frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}.$$

2.

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \left(-\frac{2}{3(x+1)} + \frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}\right) dx \\ &= \int -\frac{2}{3(x+1)}dx + \int \frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}dx \\ &= -\frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + C. \quad \textbf{1pts} \quad + \quad \textbf{1pts}\end{aligned}$$

Où C est une constante réelle.

3. *On a*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{nk-n^2}{n^3+k^3} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2(\frac{k}{n}-1)}{n^3(1+\frac{k^3}{n^3})} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{(\frac{k}{n}-1)}{(1+\frac{k^3}{n^3})} \quad \textbf{0.5pts}\end{aligned}$$

On remarque alors que la suite précédente est la somme de Riemann de la fonction f *sur l'intervalle* $[0,1]$ *relatif à la subdivision uniforme.* **1pts**

La fonction f *étant intégrable au sens de Riemann sur* $[0,1]$ *alors*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{nk-n^2}{n^3+k^3} &= \int_0^1 f(x)dx \quad \textbf{0.5pts} \\ &= \left[-\frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|\right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{3}\ln 2. \quad \textbf{0.5pts}\end{aligned}$$