Solution de l'examen d'Algèbre 03

L2 / RN 2020/2021

Exercice n° 01 : $|A_1| = -5$ (2) ; $|A_2| = -128$ (2)

Exercice n° 02 : $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(2) 1°/ A_α inversible ssi $\det A_\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 8 \neq 0$ ie $\alpha \neq -2$

(1) 2°/ Pour $\alpha = 0$, $\det(A_0) = 8$

(3) 3°/ $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_0 X = b$

$\det A_0 = 8 \neq 0 \Rightarrow$ (S) admet une unique solution.

$$x = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} ; \quad y = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} ; \quad z = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

On trouve $x = 1/4$; $y = 27/8$; $z = 39/8$.

Exercice n° 03 :

1°/ $(S_0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = b$ (2 pts)

2°/ On écrit la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

1er pivot

$1^{ère}$ étape : $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$ où $\alpha = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$, $a_{11} = 2 \neq 0$

ie $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2} L_1$

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 7 & -\frac{7}{2} & -7 \\ 0 & 3 & 0 & 7/2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 1/2 & 2 \end{array}\right]$$

$2^{ème}$ pivot $= 0$ donc on permute la $2^{ème}$ ligne avec la $3^{ème}$ ligne " Pivot partiel "

$2^{ème}$ étape :

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 7/2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -7/2 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 1/2 & 2 \end{array}\right]$$, pivot $a_{22} = 3 \neq 0$.

$L_3 \leftarrow L_3 - \left(\frac{0}{3}\right) L_2 = L_3$

$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{3} L_2$

$$\Rightarrow A = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7/2 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & -7/2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 5/3 & 10/3 \end{array}\right]$$

$3^{ème}$ étape : $a_{33} = 7 \neq 0$:

$L_4 \leftarrow L_4 - \left(-\frac{2}{7}\right) L_3 = L_4 + \frac{2}{7} L_3$

D'où $$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7/2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -7/2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 4/3 \end{array}\right]$$

D'où $\frac{2}{3} t = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{t = 2}$ 2

$7z - \frac{7}{2} t = -7 \Rightarrow \boxed{z = 0}$ 2

$3y + \frac{7}{2} t = 4 \Rightarrow \boxed{y = -1}$ 2

$2x + 4y - 4z + t = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$ 2

Avec le respect strict de l'algorithme de GAUSS.

$(x, y, z, t) = (1, -1, 0, 2)$ est sol de (S_0).

—

Sol Examen de remplacement

Algèbre 03

Exo 1 : $|A_0| = -20$ (2 pts), $|A_1| = -8e^4$ (2 pts)

Exo 2 : 1) A_α est inversible ssi $4\alpha + 4 \neq 0$ ie $\alpha \neq -1$ (2 pts)

2) $\det A_1 = 8$ (1 pt)

3) résoudre le système, par la M. Cramer, on trouve $x = \frac{1}{4}$; $y = -\frac{3}{8}$ et $z = \frac{9}{8}$ (3 pts)

Exo 3 : 1)

$$AX = b \iff \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (2 pts)

2) Etape ① : 1er pivot $a_{11} = 2 \neq 0$.

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1$; $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_1$

$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & 5/2 & -7/2 & -1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

Etape ② : $a_{22} = -1/2 \neq 0$, $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$; $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & -7/2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Etape ③ $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{9}L_3 \iff$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & -7/2 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4/9 \end{array}\right)$$

On trouve :
$(x, y, z, t) = \left(-1 ; \frac{16}{9} ; -\frac{2}{3} ; -\frac{4}{9}\right)$ (8 pts)