Corrigé de L'EMD Analyse 3

Exo 1 (04 Pts)

$C([a,b])$ est l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$.

Pour $f \in C([a,b])$ $\|f\| = \int_a^b |f(t)|\,dt$

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme

1 Puisque f continue et $[a,b]$ borné fermé, alors $\|\cdot\|$ est une application.

. $\|f\| = 0 \iff \int_a^b |f(t)|\,dt = 0$

1 $\iff |f(t)| = 0 \quad \forall t \in [a,b]$

$\iff f(t) = 0 \quad \forall t$

D'où la séparation de $\|\cdot\|$.

. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$

$\|\lambda f\| = \int_a^b |\lambda f(t)|\,dt = \int_a^b |\lambda|\,|f(t)|\,dt$

1 $= |\lambda| \int_a^b |f(t)|\,dt = |\lambda|\,\|f\|$

d'où l'homogénéité de $\|\cdot\|$.

. Pour $f, g \in C([a,b])$, on a

$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$

$\Rightarrow \int_a^b |f(t) + g(t)|\,dt \leq \int_a^b (|f(t)| + |g(t)|)\,dt$

1 $\leq \int_a^b |f(t)|\,dt + \int_a^b |g(t)|\,dt$

$\Rightarrow \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

D'où l'inégalité triangulaire. Par conséquent $\|\cdot\|$ est une norme

EX02 : (06 pts)

f une fonction telle que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ 1,5

1 _ Que peut-on dire de $f(0,0)$

On peut rien dire de $f(0.0)$

2 _ Si f continue en $(0,0)$, que peut on dire

si f continue en $(0,0)$, alors $f(0,0) = 1$. 1,5

3 _ si f est diff en $(0,0)$ que peut-on dire de $(0,0)$

on peut dire que $f(0,0) = 1$. 1,5

4 _ si $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, que peut-on dire de $f(0.0)$?

On a $f(0,0) = 1$. 1,5

EX03: (10pts)

$F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ tq :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$f_2(x,y) = x \ln(y^2+1)$

1) $D_{f_1} = \mathbb{R}^2$, $D_{f_2} = \mathbb{R}^2 \Rightarrow D_F = D_{f_1} \cap D_{f_2} = \mathbb{R}^2$. 1

2) Montrer la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$

. La continuité de f_1 :

Pour $(x,y) \neq (0.0)$, f_1 est un rapport de deux fonctions $\sin(xy)$ et $|x|+|y|$ qui sont toutes les deux continues, ceci implique que f_1 est continue dans ce cas 1

Pour $(x,y)=(0.0)$ on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

1

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2\cos\theta\sin\theta)}{r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)} = \lim \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}$$

$= 0 = f(0.0) \Rightarrow f$ continue en (0.0)

Par conséquent f continue sur $\mathbb{R}^2$.

~~3. La fonction F est elle differentiable sur $\mathbb{R}^2$?~~

Pour la fonction $f_2(x,y) = x\ln(y^2+1)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

1

D'où la fonction $F=(f_1, f_2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3 - La fonction F est elle differentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Il est claire que f_2 est differentiable sur $\mathbb{R}^2$ et aussi f_1 est differentiable pour $(x,y)\neq(0,0)$.

Il reste d'etudier la differentiabilite de f_1 au point (0.0).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_1(0+h, 0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f_1}{\partial y}(0.0)k}{\|(h,k)\|} = ? \quad (*)$$

Calculons d'abord $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y}(0.0)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(0+h,0) - f_1(0.0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin 0}{|h|} - 0}{h} = 0$$

1

Un raisonnement ou un calcul identique donne

$\frac{\partial f}{\partial y}(0.0) = 0$.

1

Il en résulte que :

$$(*) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{\sin(hk)}{|h|+|k|}}{\sqrt{(h^2+k^2)}}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2\cos\theta\sin\theta)}{r^2(|\cos\theta|+|\sin\theta|)} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{|\cos\theta|+|\sin\theta|} \neq 0$$

La limite (*) n'est pas nulle, donc f_1 n'est pas differentiable en (0.0) et donc F n'est pas diff en (0.0). Par conséquent F n'est pas differentiable sur $\mathbb{R}^2$.

1

4 - La fonction F est elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Puisque F n'est pas diff sur $\mathbb{R}^2$, alors F n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

2

5 - Calculer la matrice Jacobienne en (a,b)

$$Jac(F(a,b)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$$

1