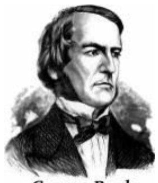
Chapitre 3 - Algèbre de Boole et Circuits Logiques
Corrigé de la série TD3 (2019-2020 Semestre 1)


George Boole

Séance 7

Q1 – Voici les axiomes de l'algèbre de Boole

- ☐ Idempotence
- ✓ **Commutativité**
- ✓ **Associativité**
- ✓ **Eléments neutre**
- ☐ Eléments symétrique
- ☐ Karnaugh
- ☐ Mc Clusky
- ✓ **Complémentarité**
- ☐ Absorption
- ☐ DeMorgan
- ☐ Inhibition
- ✓ **Double distributivité**

Q2 – Démontrer que l'idempotence n'est pas un axiome

$x = x + 0$	$x = x \cdot 1$
$= x + (x \cdot \bar{x})$	$= x \cdot (x + \bar{x})$
$= (x + x) \cdot (x + \bar{x})$	$= (x \cdot x) + (x \cdot \bar{x})$
$= (x + x) \cdot 1$	$= (x \cdot x) + 0$
$= x + x$	$= x \cdot x$

Q3 – Complétez les 2 tableaux ci-dessous :

Loi "+"	Nom de la propriété
x + x = x	**Idempotence**
x + y = y + x	**commutativité**
x+y+z = x+(y+z) = (x + y)+z	**Associativité**
x + 0 = x	**Elément neutre du OU**
x + (y . z) = (x + y) . (x + z)	**Distributivité du OU / au ET**
$\overline{x} + x = 1$	**Complémentarité**

Loi "."	Nom de la propriété
x . x = x	**Idempotence**
x . ys = y . x	**commutativité**
x.y.z = x . (y . z) = (x . y) . z	**Associativité**
x . 1 = x	**Elément neutre du ET**
x . (y + z) = (x . y) + (x . z)	**Distributivité du ET / au OU**
$\overline{x}.x = 0$	**Complémentarité**

Propriété	Nom de la propriété
$\overline{\sum_{i=0}^{n} x_i} = \prod_{i=0}^{n} \overline{x_i}$	**Théorème de DeMorgan**

Q4 – Le principe de dualité stipule qu'on peut déduire à partir de toute formule une nouvelle formule juste en remplaçant les valeurs « 1 » par « 0 » et inversement.

☐ Vrai ☐ Faux ▯ **Définition incomplète**

Il faut préciser que l'on doit remplacer aussi le ET par le OU et inversement

Q5 – Indiquez à quelle propriété correspondent les formules suivantes ?

$$\overline{x+y+z+t} = \overline{x}.\overline{y}.\overline{z}.\overline{t} \qquad \overline{x.z} = \overline{x} + \overline{z}$$

Il s'agit du théorème de DeMoragan.

Q6 – Dans l'algèbre des circuits logiques, l'état logique « 1 » correspond à :

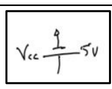
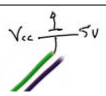
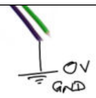
- ☐ Un niveau de tension de 220V
- ☐ Un niveau de tension avoisinant 0V
- ✓ Un niveau de tension avoisinant 5V
- ☐ Un niveau de tension avoisinant 3V
- ☐ Une puissance électrique
- ☐ Un courant électrique
- ✓ Une lampe allumée
- ☐ Une lampe éteinte
- ✓ Un interrupteur mis sur ON
- ☐ Un interrupteur mis sur OFF

Une tension proche de 3 V peut aussi être considérée comme un « 1 » logique dans certains systèmes

Q7 – Dans l'algèbre des circuits logiques, l'état logique « 0 » correspond à :

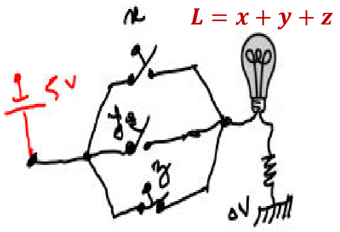
- ☐ Un niveau de tension de 220V
- ✓ Un niveau de tension avoisinant 0V
- ☐ Un niveau de tension voisine de 5V
- ☐ Une puissance électrique
- ☐ Un courant électrique
- ☐ Une lampe allumée
- ✓ Une lampe éteinte
- ☐ Un interrupteur mis sur ON
- ✓ Un interrupteur mis sur OFF

Q8 – Complétez le tableau ci-dessous :

Etat électrique	Etat logique	Etat électrique	Etat logique
	**1**		**1**
	**1**		**0**
	**0**		**1**
	**0**		**0**

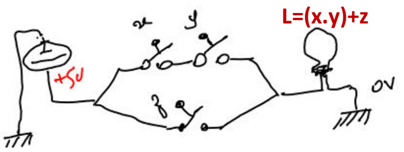
Q9 – En supposant que l'on représente 3 variables booléennes « ***x*** », « ***y*** » et « z » par 3 interrupteurs et une fonction « ***L*** » par une lampe.

A ☞ Donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y,z)*** » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.



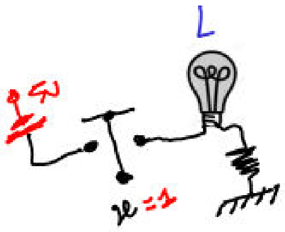
x	y	z	L
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

B ☞ Donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y,z)*** » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.



x	y	z	L
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Q10 – – Le schéma électrique suivant



$L = f(x) = \bar{x}$

Correspond à :

- ❑ La négation avec x=0 et L=1
- ❑ Le OU
- ✓ **La négation avec x=1 et L=0**
- ❑ Le ET
- ❑ Le OU exclusif
- ❑ Le NON OU exclusif
- ❑ Le NAND
- ❑ Le XOR

Q11 – Si vous avez ***8*** variables, combiens de lignes (hors mis la première ligne d'entête) allez-vous avoir dans la table de vérité représentant la fonction ***F = f(x₇, x₆, …, x₁, x₀)*** : **2^8 lignes = 256 lignes**

Séance 8

Q12 – Indiquez les lois (axiomes et théorèmes) utilisés dans les démonstrations ci-dessous :

Transformation algébrique	Lois utilisées
$x\bar{y}z + xy\bar{z} + \bar{x}yz + xyz =$ $x\bar{y}z + xy\bar{z} + \bar{x}yz + xyz$ $+xyz + xyz$	**Idempotence**
$= x\bar{y}z + xyz + xy\bar{z} + xyz$ $+\bar{x}yz + xyz$	**Commutativité**
$= (x\bar{y}z + xyz) + (xy\bar{z} + xyz)$ $+(\bar{x}yz + xyz)$	**Associativité**
$= (\bar{y} + y)xz \; + \; (\bar{z} + z)xy$ $+(\bar{x} + x)yz$	**Distributivité**
$= (1)xz + (1)xy + (1)yz$	**Complémentarité**
$= xz + xy + yz$	**Elément neutre**
$= xy + yz + xz$	**Commutativité**

Transformation algébrique	Lois utilisées
$\overline{(x + y + z).(x + \bar{y} + z)}$ $= \overline{(x + y + z)} + \overline{(x + \bar{y} + z)}$	**DeMorgan**
$= (\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}) + (\bar{x}.y.\bar{z})$	**DeMorgan**
$= \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.\bar{z}$	**Associativité**
$= (\bar{x} + y)\bar{x}.\bar{z}$	**Commutativité + Distributivité**
$= (1)\bar{x}.\bar{z}$	**Complémentarité**
$= \bar{x}.\bar{z}$	**Elément neutre**

Indique le nom de l'opérateur issu des formules suivantes :

Formule	Opérateur
$xy + \bar{x}.\bar{y} = x \oplus y$	**OU exclusif (XOR)**
$\bar{x}y + x.\bar{y} = x \overline{\oplus} y$	**NON OU exclusif (NXOR)**
$\overline{x.y} = x \uparrow y$	**NON du ET (NAND)**
$\overline{x + y} = x \swarrow y$	**NON du OU (NOR)**

Q13 – Donnez les tables de vérité des fonctions à 2 variables ***x*** et ***y*** suivantes : ET, OU, XOR (ou exclusif), NXOR (ou équivalence), NAND (Non du ET) et NOR (Non du OU)

x	y	x.y	x+y	$x \oplus y$	$x \overline{\oplus} y$	$x \uparrow y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	2	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0	0

Q14 – Démontrer la propriété suivante :

$$\overline{\prod_{i=0}^{n-1} x_i} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{x_i}$$

Indication :
Procédez par récurrence !

Vérifions si cette propriété est vérifiée pour n=1 :

$$\overline{\prod_{i=0}^{1} x_i} = \sum_{i=0}^{1} \overline{x_i} \iff \overline{x_1 \cdot x_0} = \overline{x_1} + \overline{x_0}$$

$x_1\ x_0$	$x_1 \cdot x_0$	$\overline{x_1 x_0}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_0}$	$\overline{x_1} + \overline{x_0}$
0 0	0	1	1	1	1
0 1	0	1	1	0	1
1 0	0	1	0	1	1
1 1	1	0	0	0	0

même fonction

Conclusion : n est vraie pour n=1

Supposons que cette propostion est vraie pour n et vérifions qu'elle reste vraie pour n+1 :

hypothèse

$$\boxed{\overline{\prod_{i=0}^{n} x_i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{x_i}}$$

$$\overline{\prod_{i=0}^{n+1} x_i} = \overline{\left(x_{n+1} \cdot \prod_{i=0}^{n} x_i\right)}$$

$$= \overline{x_{n+1}} + \overline{\prod_{i=0}^{n} x_i}$$

$$= \overline{x_{n+1}} + \sum_{i=0}^{n} \overline{x_i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \overline{x_i}$$

Conclusion

$$\boxed{\overline{\prod_{i=0}^{n+1} x_i} = \sum_{i=0}^{n+1} \overline{x_i}}$$

Séance 9

Q15 – Démontrer la propriété : « $x.x + \overline{x} = 1$ ».
(Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

Réponse :

$$x.x + \overline{x} = (x.x) + \overline{x}$$
$$x.x + \overline{x} = \overline{x} + (x.x)$$
$$x.x + \overline{x} = (\overline{x} + x).(\overline{x} + x)$$
$$x.x + \overline{x} = (1).(1)$$
$$x.x + \overline{x} = 1$$

Q16 – Démontrer la propriété : « $x.x + y.\overline{y} = x$ ».
(Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

Réponse :

$$x.x + y.\overline{y} = x + y.\overline{y}$$
$$x.x + y.\overline{y} = x + 0$$
$$x.x + y.\overline{y} = x$$

Q17 – Soient ***x*** et ***y*** deux variables booléennes

$(x, y) \in V^2$ où $V = \{0,1\}$

☞ On définit l'opérateur OU EXCLUSIF noté « ⊕ » de la manière suivante : ***x⊕y = 1* si et seulement si *x≠y***

Donnez la table de vérité de cet opérateur
Exprimez cet opérateur à base du ET, OU et NON

☞ On définit l'opérateur $\overline{\oplus}$ de la manière suivante : ***x$\overline{\oplus}$y = 1* si et seulement si *x=y***

Donnez la table de vérité de cet opérateur
Exprimez cet opérateur à base du ET, OU et NON
Exprimez cet opérateur à base du OU Exclusif

Réponse :

x	y	$x \oplus y$	$x \overline{\oplus} y$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	2	1	0
1	1	0	1

$$x \oplus y = m0 + m3 = \overline{x}.y + x.\overline{y}$$
$$x \overline{\oplus} y = m0 + m3 = \overline{x}.\overline{y} + x.y = \overline{x \oplus y}$$

Q18 – Si je trouve un ensemble d'opérateurs **{*O_1, O_2, … O_n*}** de sorte que toute fonction logique peut être exprimée à base des opérateurs de cet ensemble. Comment qualifierez-vous cet ensemble.

Réponse : Système logique complet

Q19 – Montrer que l'opérateur ET tout seul ne peut pas constituer un système logique complet.

Réponse : Un système logique complet est un groupe d'opérateurs permettant d'exprimer algébriquement toutes les fonctions possibles.
Nous savons que le groupe d'opérateurs {ET, OU et NON} sont suffisant pour exprimer toutes les fonctions booléennes possibles.
Nous constatons qu'Il n'est pas possible d'exprimer la négation ni le « OU » logique uniquement à base du « ET » logique. Donc toutes les fonctions comportant ces opérateurs ne pourront pas être exprimées uniquement à base du « ET ». Donc le « ET » tout seul ne peut pas constituer un système logique complet.

Q20 – Montrez que les ensembles des opérateurs {ET, NON} et {NOR} constituent des systèmes logiques complets.
Réponse : Pour montrer que le groupe {ET, NON} est un système logique complet, il suffit de montrer que l'opérateur manquant (ici le « OU ») peut être exprimé à base des opérateurs « ET » et « NON » :

$$x + y = \overline{\overline{x + y}}$$
$$x + y = \overline{\overline{x}.\overline{y}}$$

Pour montrer que le groupe {NAND} est un système logique complet, il suffit de montrer que les opérateurs manquants (ici le « ET », le « OU » et le « NON ») peuvent être exprimés à base du « NAND » :

$$\overline{x} = \overline{x.x} = x \uparrow x$$

$$x + y = \overline{\overline{x + y}}$$
$$x + y = \overline{\overline{x}.\overline{y}}$$
$$x + y = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$$

$$x.y = \overline{\overline{x.y}}$$
$$x.y = \overline{\overline{x.y}\ .\ \overline{x.y}}$$
$$x.y = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$$

Q21 – Soit $f(x, y, z) = \overline{x}.\overline{y} + x.\overline{z}$

- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NAND : $x \uparrow y = \overline{x.y}$

$$f(x, y, z) = \overline{x}.\overline{y} + x.\overline{z}$$
$$f(x, y, z) = \overline{\overline{\overline{x}.\overline{y} + x.\overline{z}}}$$
$$f(x, y, z) = \overline{\overline{(\overline{x}.\overline{y})}\ .\overline{(x.\overline{z})}}$$
$$= \big((x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)\big) \uparrow \big(x \uparrow (z \uparrow z)\big)$$

- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NOR : $x \downarrow y = \overline{x + y}$

Q22 – Donnez la table de vérité des fonctions :

$$f_1(x, y, z) = x.y.z + x.\bar{z} + y.z$$
$$f_2(x, y, z) = \overline{y.(x + \bar{y})}$$

Indication : Vous devez d'abord exprimer ***f(x,y,z)*** sous sa forme canonique disjonctive, puis vous déduisez sa table de vérité.

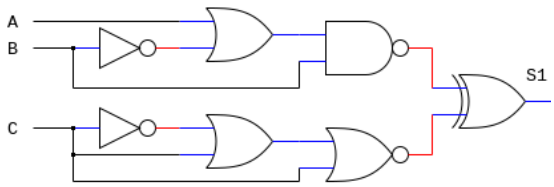
Q23 – Donnez le logigramme des fonctions suivantes :

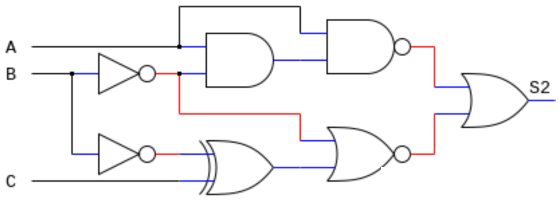
$$f_1 = \left(\overline{x \uparrow \bar{y}}\right) \uparrow (x \overline{\oplus} z) \quad \textbf{et} \quad f_2 = (\bar{x} + y) \uparrow (x \overline{\oplus} z)$$

Séance 10

Les étudiants doivent montrer le QCM2. Une correction de ce QCM sera publiée en ligne.

Q24 – Donnez les équations de sorite des circuits ci-dessous





Q25 – Donnez la table de vérité de la fonction ***F*** suivante : ***F(x,y,z,t)* = Σ(1,2,4,9,10,13)**

Q26 – Indiquez par une croix toutes les cases adjacentes de la case de couleur foncée

yz→ tu ↓	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

yz→ tu ↓	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

	x							
	0				1			
yz→ tu ↓	00	01	11	10	10	11	01	00
00								
01								
11								
10								

Q27 – Simplifiez par la méthode de Karnaugh *F1 et F2* :

$F1(x,y,z) = \Sigma(2, 4, 6, 7)$

$F2(x,y,z,t) = \Sigma(0, 2, 8, 10, 12, 13)$