

Exercice1. Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} \blacksquare u_n = 2n^2 - 2\sqrt{n} + 1 \quad \blacksquare u_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 7} \quad \blacksquare u_n = \frac{3n^2 + 2n - 1}{5n^2 - 8} \quad \blacksquare u_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2(3)^n} \quad \blacksquare u_n = \frac{\sqrt{n} - n + 1}{2\sqrt{n} + n + 2} \\ \blacksquare u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n + 1} \quad \blacksquare u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n} - \sqrt{n^2 - 1}}{n + 1} \quad \blacksquare u_n = (-2)^n \quad \blacksquare u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{5}{4}\right)^n \end{aligned}$$

Exercice2. Soit la suite (u_n) définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 1, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = \frac{4u_n}{3u_n + 3}.$$

1. Calculer u_1, u_2 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{3}$.
3. Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
5. Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice3. Considérons les deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_0 = 2, v_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

1. Calculer u_1, v_1 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < u_n$.
3. Dédire que la suite (u_n) est décroissante et (v_n) est une suite croissante.
4. Montrer que $0 < u_n - v_n < \frac{u_0 - v_0}{2^n}$.
5. Dédire $\lim(u_n - v_n)$.
6. La suite (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes? Justifier.
6. Conclure.

Exercice4. Considérons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(4u_n - u_{n-1}) \\ v_{n+1} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

1. Montrer que (v_n) est géométrique.
2. Calculer la somme $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.
3. Dédire la limite de (u_n) .