Rattrapage d'Analyse 3.

Exo1 (6 pts).

Determiner et représenter D_f.

1- $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y}}{\sqrt{y}}$.

f définie $\Leftrightarrow$ $x^2+y \geq 0$ et $y > 0$.

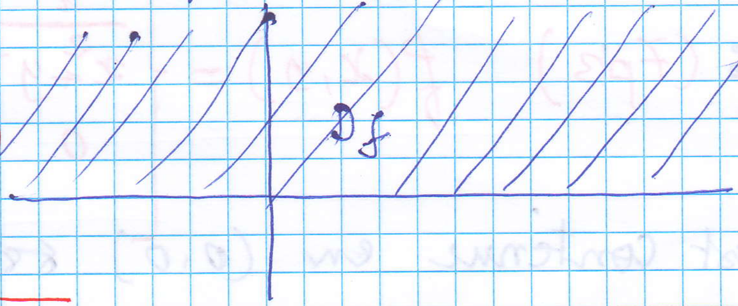
Remarquons que si $y > 0$, alors $x^2 + y \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

par Conséquent $D_f = \{(x,y) \ / \ y > 0\}$, cad

1

D_f est le demi plan situé sur la partie strictement supérieure par rapport à l'axes des x.

1



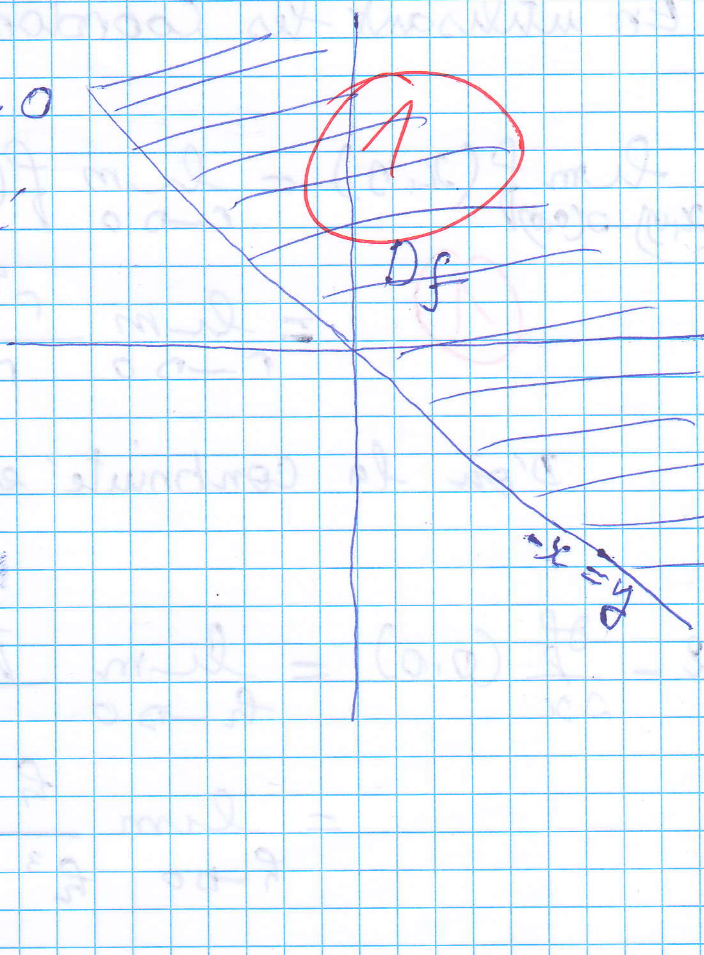
2- $f(x,y) = \sqrt{x+y}$.

f est défini ssi $x + y \geq 0$

D_f est le demi plan situé à droite de la droite d'équation $y = -x$.

1

1



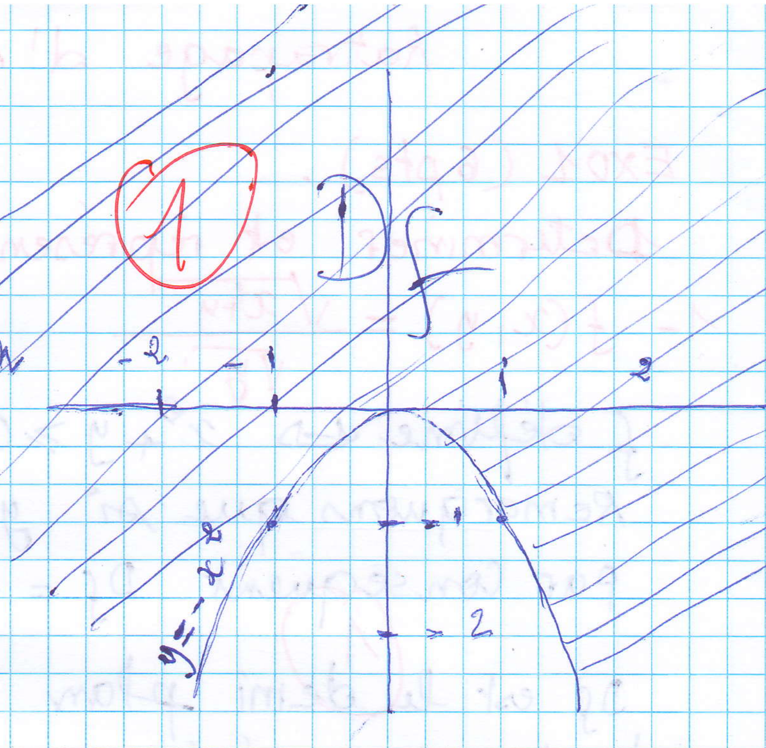
3. $f(x,y) = \ln(x^2+y)$

f est défini ssi $x^2+y>0$

$\Longrightarrow$ $y > -x^2$

Ainsi D_f est toute la partie Hachurée du plan située au dessus de la courbe $y=-x^2$ excepté cette courbe

1



EXO2 : (7pts) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

1 - f est continue en $(0,0)$ ssi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

En utilisant les coordonnées polaires, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

1

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos\theta}{r^2} = 0 = f(0,0)$$

D'où la continuité en $(0,0)$.

2 - $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h^3} = 0. \quad 1$$

EXO3 (7pts)

$$f_m(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1 – Le valeurs de m pour que f soit continue en (0,0).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \lim \frac{r^{m+1}\cos^m\theta \sin\theta}{r^2} = 0 \text{ ssi } m+1>2$$

1

Ainsi f continue en (0,0) ssi $m > 1$.

2 – $\frac{\partial f_m}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f_m}{\partial y}(0,0)$

$$\frac{\partial f_m}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_m(h,0) - f_m(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

0.5

$$\frac{\partial f_m}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_m(0,h) - f_m(0,0)}{h} = 0$$

0.5

3 – Valeurs de m pour la diff en (0,0).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_m(0+x,0+y) - f_m(0,0) - \frac{\partial f_m}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f_m}{\partial y}(0,0)y}{\|(x,y)\|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^{m+1}\cos^m\theta\sin\theta}{r^3} = 0 \text{ ssi}$$

$$m+1 > 3 \iff m > 2$$

4

Ainsi, f différentiable en (0,0) ssi $m>2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$ (1)

3_ Methode 1 : (Pour la diff en (0,0))

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(0+x, 0+y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\|(x,y)\|}$$ (1)

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^{1/2}(x^2+y^2)}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^4 \cos\theta}{r^3} = 0.$$ D'où f est différentiable en $(0,0)$.

Methode 2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^5 y^2 + 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$ (1)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$ (1)

En utilisant les coordonnées pollaire, on montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont toutes les deux continues au point $(0,0)$, ceci implique que la fonction f est de classe C^1 ~~sur~~ en $(0,0)$. Par conséquent f est diff en $(0,0)$.

(1)

4. Les valeurs de m pour que f soit de classe C^1 en $(0,0)$

$$\frac{\partial f_m}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(m-2)x^{m+1}y + m x^{m-1}y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

2

$$\frac{\partial f_m}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{m+2} - x^m y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

En utilisant les coordonnées polaires, on trouve que $\frac{\partial f_m}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_m}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$ ssi $m > 2$.

2

Par conséquent, f est de classe C^1 au point $(0,0)$ si et seulement $m > 2$.