ANALYSE 4, RATTRAPAGE 2021

EXO1 : (08 pts)

2

1. Il est un point critique, car les dérivées partielles sont nulles.
Puisque $rt - s^2 < 0$, alors il est un point selle.

2

2. Il s'agit d'évaluer la fonction $z(x,y)$ dans le point maximum !
Cherchons les points critiques

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2y - 4x - 8 = 0 \\ 2x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$$

1

Le seule point critique est $(x,y) = (-1, 2)$.
Le point critique est un maximum, car
$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-1,2) = -4 < 0$; $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-1,2) = -2$
$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-1,2) = 2$, et

1

$$rt - s^2 = (-4)(-2) - 4 > 0 \text{ , } r < 0$$

Par conséquent, la hauteur de la montagne est :

$$z(-1,2) \times 100 = 1400 \, m$$

2

EXO 2 : (12 pts)

I _ Etudier la convergence des Intégrales :

1) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t + 5}{t^3 + 2} \, dt$

Deux points singuliers $a = 0$, $b = +\infty$

On pose $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln t + 5}{t^3 + 2} \, dt$

$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t + 5}{t^3 + 2} \, dt$

2

I_1 ? On a quand $t \to 0$,

$\frac{\ln t + 5}{t^3 + 2} \sim \frac{\ln t}{2} + \frac{5}{2}$.

Il en résulte que I_1 converge ssi

$\int_0^1 \ln t \, dt$ converge.

On a :

$\int_0^1 \ln t \, dt = \lim_{x \to 0} \int_x^1 \ln t \, dt$

$= \lim_{x \to 0} [t \ln t - t]_x^1$

$= \lim_{x \to 0} (-1 - x \ln x + x) = -1$ CV

donc I_1 converge.

I_2 ? On a $\forall t \geq 1$, $\ln t < t$

donc $\frac{\ln t + 5}{t^3 + 2} < \frac{t + 5}{t^3 + 2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t}{t^3} = \frac{1}{t^2}$

Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ conv, car $\alpha = 2 > 1$.

alors I_2 converge.

D'où I conv.

2) $I = \int_1^2 \frac{\ln(t+1)}{t^2-1}\, dt$

Un seul point singulier $a = 1$.

Au voisinage de $t = 1$, on a :

$$\frac{\ln(t+1)}{t^2-1} = \frac{\ln(t+1)}{(t+1)(t-1)} \sim \frac{\ln 2}{2(t-1)}$$

2

Il en résulte que I converge si et seulement si $\int_1^2 \frac{1}{t-1}\, dt$ converge.

Mais, $\int_1^2 \frac{1}{t-1}\, dt$ diverge, car $p = 1$ $\left((t-1)^p, p=1\right)$

alors l'intégrale I diverge.

3) $\int_2^{+\infty} \frac{e^{t\sqrt{t}}}{t^p+1}\, dt$

Un seul point singulier $t = +\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{e^{t\sqrt{t}}}{t^p+1} \sim \frac{e^{t\sqrt{t}}}{t^p} \geq 1, \ \forall p \in \mathbb{R}$$

2

Puisque $\int_2^{+\infty} 1\, dt$ div, il en résulte que $I = \int_2^{+\infty} \frac{e^{t\sqrt{t}}}{t^p+1}\, dt$ div.

4) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$

On a deux points singuliers

$a = 0, \quad b = +\infty$

On pose $I_1 = \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$

I_1 ?

On a $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \lim_{t \to 0} \sqrt{t}\, \frac{\sin t}{t} = 0$

Ainsi I_1 est un integrale propre, et donc elle converge.

I_2 ? D'après la regle d'Abel,

$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ Conv.

D'où I Conv.

2

II. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{p-1}}\, dt$

Ici, nous avons deux points singuliers

$a = 0,\ b = +\infty.$

Ainsi I Converge ssi I_1 et I_2 Convergent, où ...(1)

$I_1 = \int_0^1 \frac{\cos t}{t^{p-1}}\, dt\ ,\ I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{p-1}}\, dt$

I_1 ?

On a : $\forall t \in]0,1]$, $\frac{\cos t}{t^{p-1}} \geq 0$.

On a aussi, $\frac{\cos t}{t^{p-1}} \sim \frac{1}{t^{p-1}}$ qd $t \sim 0$

donc I_1 conv si et seulement si $p-1 \leq 0$

càd : $\boxed{I_1 \text{ conv ssi } p \leq 1}$ ... (2)

I_2 : I_2 Converge si et seulement si $p-1 > 0$

càd : $\boxed{I_2 \text{ conv ssi } p > 1}$ ... (3)

De (1) et (2),(3), on deduit que

I div pour tout $p \in \mathbb{R}$.

4