

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

---



**Polycopié Pédagogique**

## **RESISTANCE DES MATERIAUX 2**

Par

**YAYA Kamel**

**Maitre de Conférences, Classe B**

*Année universitaire : 2019/2020*

---

## TABLE DES MATIERES

<b>CHAPITRE 1 GENERALITES &amp; RAPPELS .....</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction et hypothèses.....	6
1.2 Torseur des efforts de cohésion .....	7
1.3 Etapes de résolution d'un problème isostatique en RDM .....	12
<b>CHAPITRE 2 FLEXION PLANE DES POUTRES SYMÉTRIQUES .....</b>	<b>16</b>
2.1 Définitions .....	16
2.2 Flexion plane simple .....	16
2.3 Relations différentielles entre le moment fléchissant M, l'effort tranchant V et la charge repartie q .....	17
2.4 Etude des contraintes normales.....	18
2.5 Relation contrainte normale/moment fléchissant .....	20
2.6 Etude des contraintes tangentielles .....	22
2.6.1 Loi de réciprocité des contraintes de cisaillement .....	22
2.6.2 Calcul de la contrainte tangentielle $\tau$ .....	23
2.7 Contraintes maximales .....	25
2.8 Conditions de résistance .....	25
<b>CHAPITRE 3 DÉPLACEMENT DES POUTRES SYMETRIQUES EN FLEXION</b>	
<b>PLANE            30</b>	
3.1 Importance du calcul des déplacements .....	30
3.2 Définitions .....	30
3.3 Equation différentielle de la déformée .....	31
3.4 Méthode d'intégration directe .....	33
3.5 Méthode des paramètres initiaux .....	34

---

3.6	Méthode des moments des aires .....	36
3.7	Méthode de superposition.....	38
<b>CHAPITRE 4 THÉORÈMES GÉNÉRAUX DES SYSTÈMES ÉLASTIQUES .....</b>		<b>44</b>
4.1	Introduction .....	44
4.2	Travail des forces extérieures .....	44
4.2.1	Travail élémentaire d'une force .....	44
4.2.2	Travail d'une force .....	45
4.3	Energie de déformation élastique.....	48
4.3.1	Expression de $W_{ext}$ , travail des efforts extérieurs .....	49
4.3.2	Expression de $W_{def}$ , énergie de déformation élastique .....	49
4.3.3	Energie de déformation élastique en traction .....	50
4.3.4	Energie de déformation élastique en cisaillement.....	51
4.3.5	Energie de déformation élastique en flexion .....	52
4.3.6	Energie de déformation élastique en torsion .....	53
4.3.7	Expression générale de l'énergie de déformation élastique .....	54
4.4	Théorème de Castigliano.....	54
4.4.1	Enoncé du théorème .....	54
4.4.2	Démonstration du théorème.....	55
4.4.3	Calcul des déplacements dans une poutre .....	57
4.5	Méthode de la force fictive généralisée.....	58
<b>CHAPITRE 5 SOLLICITATIONS COMPOSÉES .....</b>		<b>62</b>
5.1	Généralités .....	62
5.2	Flexion déviée.....	62

---

---

5.2.1	Calcul des contraintes en flexion déviée .....	63
5.2.2	Calcul des déplacements en flexion déviée .....	64
5.2.3	Axe neutre en flexion déviée .....	65
5.3	Flexion composée .....	66
5.3.1	Flexion composée avec traction ou compression.....	66
5.3.2	Flexion composée avec traction ou compression excentrée .....	67
5.3.3	Axe neutre en flexion composée .....	68
5.4	Flexion – Torsion.....	69
5.4.1	Moment de flexion idéal.....	69
5.4.2	Condition de résistance.....	70
5.4.3	Déformations .....	70
<b>CHAPITRE 6 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES.....</b>		<b>74</b>
6.1	Généralités .....	74
6.2	Méthodes de résolution des problèmes hyperstatiques .....	76
6.2.1	Méthode des paramètres initiaux .....	76
6.2.2	Méthode de superposition.....	78
6.2.3	Méthode des forces.....	80

---

---

# **CHAPITRE 1**

## **GENERALITES & RAPPELS**

---

# CHAPITRE 1 GENERALITES & RAPPELS

## 1.1 Introduction et hypothèses

La résistance des matériaux (RDM) étudie le comportement des solides déformables. Elle s'intéresse particulièrement à l'étude de la résistance et de la déformation des solides dans le but de déterminer ou de vérifier leurs dimensions afin qu'ils supportent les charges dans des conditions de sécurité satisfaisantes et au meilleur coût (optimisation des formes, des dimensions, des matériaux...).

La résistance des matériaux a trois objectifs principaux :

- la connaissance des caractéristiques mécaniques des matériaux (comportement sous l'effet d'une action mécanique).
- l'étude de la résistance des pièces mécaniques (résistance ou rupture).
- l'étude de la déformation des pièces mécaniques.

Ces études sont élaborées dans le cadre d'hypothèses simplificatrices. Elles constituent le premier niveau des méthodes de calcul des structures.

### 1. Hypothèses sur les matériaux :

Les matériaux des poutres étudiées devront être :

- *Isotropes* : on admet que les matériaux ont, en un même point, les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions. L'isotropie n'est pas vérifiée pour les matériaux tels que le bois, les matériaux composites...etc.
- *Homogènes* : On admet que les matériaux ont les mêmes caractéristiques (composition) en tout point.
- *Continus* : pas de fissure, pas de creux ...

### 2. Hypothèses sur les formes :

L'étude sera limitée aux solides assimilables à une poutre (Figure 1.1) :

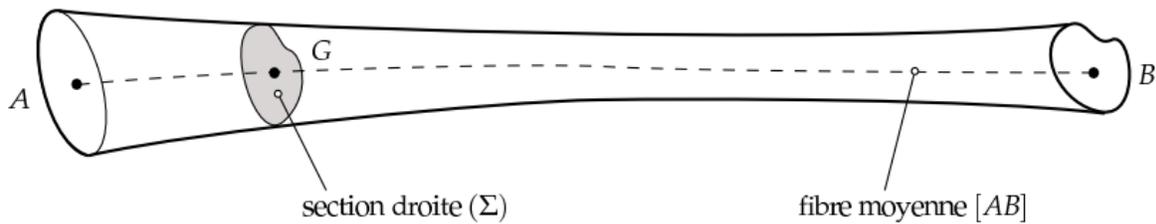


Figure 1.1 : Notion de poutre

- solides dont une dimension est très supérieure aux deux autres;
- pas de variation brusque de section;
- solides dont on peut définir une ligne moyenne (ligne qui relie les barycentres des sections);
- solides dont la fibre moyenne possède un grand rayon de courbure par rapport aux dimensions des sections droites.

### 3. Hypothèse sur les déformations :

On se place toujours dans le cas de petites déformations (autrement dit, les déformations restent faibles comparativement aux dimensions de la poutre), de telle façon à rester à l'intérieur du domaine élastique du matériau (loi de Hooke).

### 4. Hypothèse de Navier Bernoulli :

Les sections droites, planes et perpendiculaires à la ligne moyenne, restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation. Il n'y a pas de gauchissement des sections droites.

## 1.2 Torseur des efforts de cohésion

On considère la poutre chargée représentée par la figure 1.2 Elle est en équilibre sous l'action des charges extérieures  $F_i$  et des réactions de liaison  $R_i$  (supposées connues).

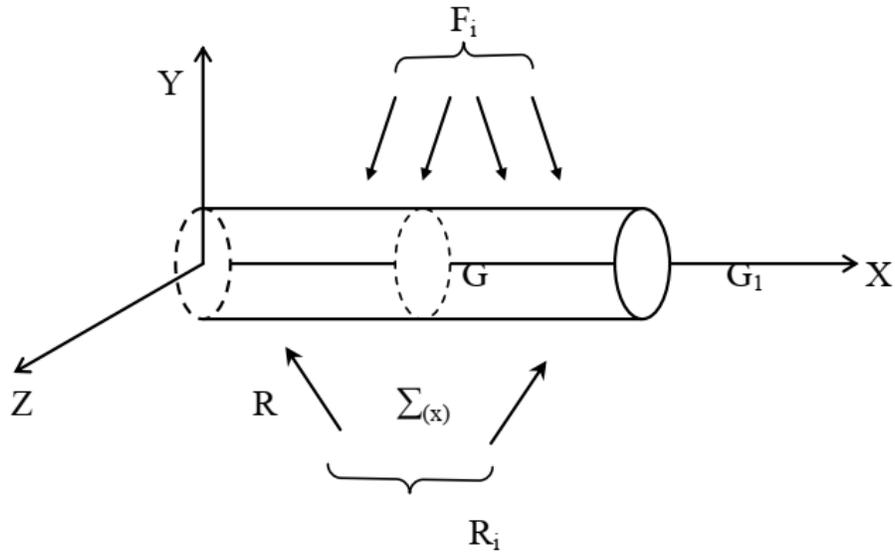


Figure 1.2: Poutre chargée

Pour mettre en évidence les efforts transmis par la matière au niveau de la section  $\Sigma(x)$ , effectuons une coupure imaginaire dans un plan perpendiculaire à la ligne moyenne, de manière à avoir deux tronçons.

Isolons à présent le tronçon (1) située à gauche de la section fictive  $\Sigma(x)$ . Le tronçon est en équilibre sous l'action :

- des forces extérieures qui lui sont appliquées;
- des éventuelles actions de liaison;
- des forces que le tronçon de droite (2) exerce sur le tronçon de gauche (1).

Ces forces se développent à l'intérieure de la matière. Les composantes de l'action du tronçon à droite sur le tronçon à gauche (ou inversement) sont appelés *efforts internes* ou encore *éléments de réduction*.

Nous pouvons exprimer ces *efforts internes* sous la forme d'un torseur, appelé *torseur de cohésion*, écrit au centre de gravité de la section  $\Sigma(x)$ . Dans le torseur de cohésion, on peut faire apparaître la résultante et le moment qui dépendent de la position de la section  $\Sigma(x)$ .

$$\{Cohésion\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(x) \\ \vec{M}_G(x) \end{Bmatrix}$$

Ils sont représentés sur la figure 1.3 :

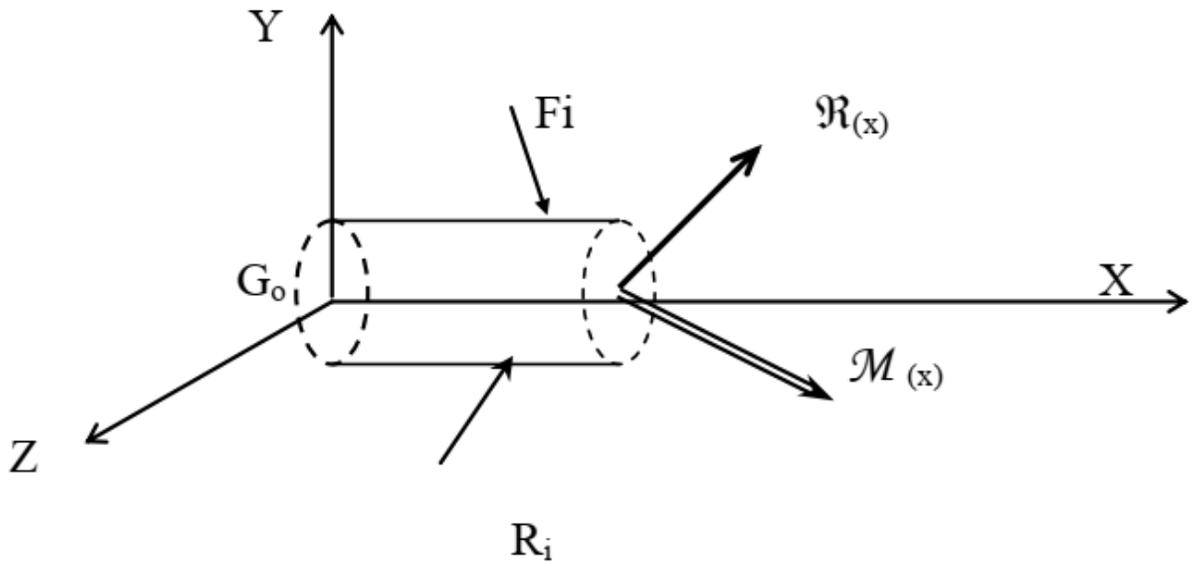


Figure 1.3: Représentation du torseur des efforts internes

Avec :            et             $\vec{M}_G \begin{vmatrix} Mt \\ Mfy \\ Mfz \end{vmatrix}$

- N : effort normal, projection de R sur la normale extérieure (x).
- Vy et Vz : efforts tranchants, projections de R sur le plan de section droite.
- Mt : moment de torsion, projection du moment sur la normale extérieure.
- Mfy et Mfz : moments de flexion, projection du moment sur le plan de section droite.

Toutes ces composantes N, Vy, Vz, Mt, Mfy et Mfz dépendent de la position de la section droite  $\Sigma(x)$ . On peut donc représenter leurs évolutions à l'aide de diagrammes.

---

Suivant les éléments de réduction non-nuls du torseur de cohésion ( $N$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ ,  $M_t$ ,  $M_{fy}$  et  $M_{fz}$ ) on peut alors identifier le type de sollicitation que subit la poutre, à savoir :

Composantes		Sollicitation
N	$> 0$	Extension (traction)
	$< 0$	Compression
$V_y$		Cisaillement
$V_z$		
$M_t$		Torsion
$M_{fy}$		Flexion
$M_{fz}$		

Lorsque l'on a une seule de ces sollicitations on parle de *sollicitation simple*, sinon on a un problème de *sollicitations composées*.

Dans la suite, nous considérerons essentiellement des problèmes plans, les efforts extérieurs étant situés dans le plan  $(O, x, y)$ . Dans ces conditions, les seules composantes non nulles du torseur de cohésion sont :

- l'effort normal  $N(x)$  ;
- l'effort tranchant suivant  $y$ , noté  $V(x)$  ;
- le moment fléchissant suivant  $z$ , noté  $M(x)$

et nous adopterons la représentation de la figure 1.4 :

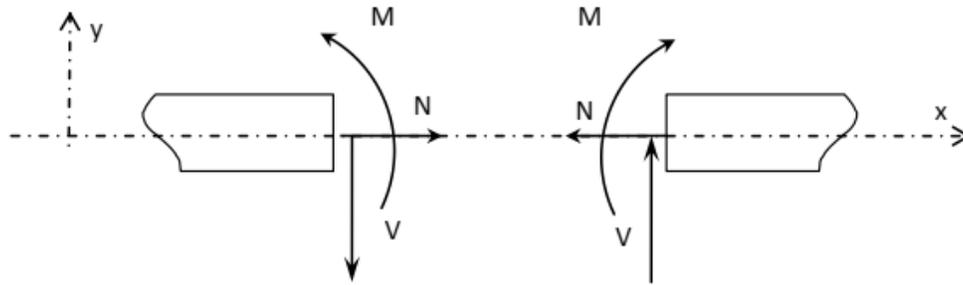


Figure 1.4 : éléments de réduction (N, V et M)

**Par définition:**

1. L'effort normal  $\mathbf{N}$  dans la section  $\Sigma(x)$  est égal à la somme algébrique des projections sur l'axe des  $x$  de toutes les forces (charges extérieures et réactions d'appui), agissant sur le tronçon à gauche de  $\Sigma(x)$ .

$$N = \Sigma F_x$$

Un effort normal exerçant une traction sur la section étudiée sera considéré comme positif.

2. L'effort tranchant  $\mathbf{V}$  dans la section  $\Sigma(x)$  est égal à la somme algébrique des projections sur l'axe des  $y$  de toutes les forces agissant sur la partie de la poutre située à droite de la section  $\Sigma(x)$ .

$$V = \Sigma F_y$$

On considérera un effort tranchant comme positif s'il a tendance à faire tourner la section  $\Sigma(x)$  dans le sens horaire.

3. Le moment fléchissant  $\mathbf{M}$  dans la section  $\Sigma(x)$  est égal à la somme algébrique des moments créés dans cette section par toutes les sollicitations agissant sur le tronçon à droite de  $\Sigma(x)$ .

$$M = \Sigma C + \Sigma F_y \cdot d$$

Où,

$C$  représente un couple concentré;

$d$  le bras de levier de la composante transversale de la force  $F$ .

---

Un moment fléchissant qui provoque des tractions dans les fibres inférieures d'une poutre horizontale sera considéré positif.

Connaissant les sollicitations dans une section quelconque, il suffit alors de faire varier  $x$  le long de la poutre pour connaître les sollicitations dans toutes les sections. On obtient alors des diagrammes des sollicitations  $N$ ,  $V$  et  $M$  en fonction de  $x$ .

### **1.3 Etapes de résolution d'un problème isostatique en RDM**

- 1- Définir le repère de l'étude;
- 2- Calculer les réactions d'appuis dans le repère défini;
- 3- Déterminer le nombre de coupes à effectuer et délimiter la poutre en sections;
- 4- Représenter la partie gauche (ou droite) de la structure coupée soumise à l'action de la partie droite (ou gauche), du chargement extérieur et des réactions d'appuis;
- 5- Résoudre les équations d'équilibre pour chaque coupe afin de déterminer les expressions de  $N$ ,  $V$  et  $M$  en tout point de la barre;
- 6- Calculer les valeurs aux limites de chaque section;
- 7- Tracer les diagrammes de  $N$ ,  $V$  et  $M$  à partir des équations trouvées et des conditions aux limites.

---

---

**CHAPITRE 2**

**FLEXION PLANE DES POUTRES**

**SYMÉTRIQUES**

---

## CHAPITRE 2 FLEXION PLANE DES POUTRES SYMÉTRIQUES

### 2.1 Définitions

Parmi les différentes sollicitations simples étudiées en RDM, la flexion plane tient un rôle prépondérant car elle est fréquente dans les mécanismes et les problèmes de poutres.

Il existe différents types de flexion suivant le système étudié (géométrie de la poutre, configuration des actions mécaniques extérieures, torseur de cohésion ...):

- Flexion pure :  $\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$

- Flexion plane (ou composée) :  $\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ V_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$

- Flexion plane simple :  $\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ V_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$

- Flexion déviée :  $\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ V_y & M_{fy} \\ V_z & M_{fz} \end{Bmatrix}$

Nous limiterons notre étude au cas de la flexion plane simple, car il correspond au cas le plus fréquemment rencontré.

### 2.2 Flexion plane simple

Une poutre est soumise à une *flexion plane simple* si :

- sa géométrie possède un plan de symétrie  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ ;
- les forces extérieures auxquelles elle est soumise sont dans ce plan ou disposées symétriquement par rapport à ce plan;

– le torseur de cohésion s'écrit sous la forme :

$$\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ V_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$$

### 2.3 Relations différentielles entre le moment fléchissant $M$ , l'effort tranchant $V$ et la charge répartie $q$

Considérons une poutre soumise à une charge répartie  $q(x)$  et isolons à l'intérieur de cette poutre un tronçon de longueur  $dx$ , comme montré sur la figure 2.1 :

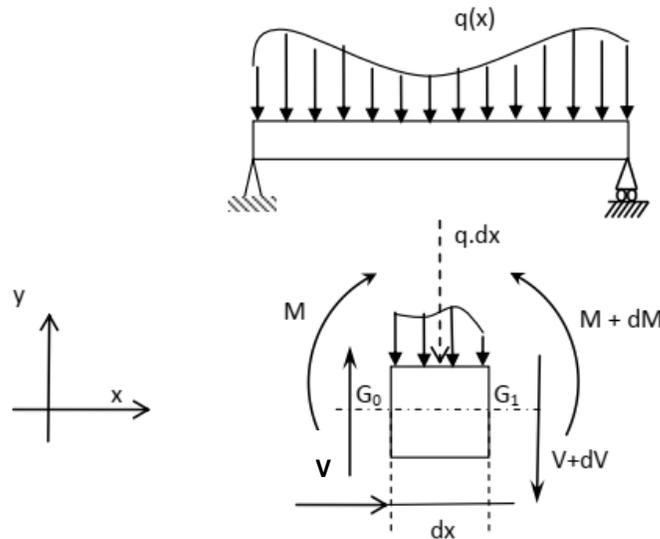


Figure 2.1 : Relation entre  $q$ ,  $V$  et  $M$

Sur le tronçon  $dx$ , les grandeurs  $V$  et  $M$  subissent les variations  $dV$  et  $dM$ , l'équilibre du tronçon est régi par les équations de la statique :

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow V - qdx - V - dV = 0 \Rightarrow q = -\frac{dV}{dx} \\ \Sigma M_{/G1} = 0 &\Rightarrow -M - Vdx + q \frac{dx^2}{2} + M + dM = 0 \end{aligned}$$

En négligeant le terme du second ordre  $q \frac{dx^2}{2}$  dans la somme des moments, on peut écrire :

---

$$V = \frac{dM}{dx}$$

On peut finalement, les équations d'équilibre local d'une poutre droite.

$$q = -\frac{dV}{dx} \quad \text{et} \quad V = \frac{dM}{dx} \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{d^2M}{dx^2}$$

Ces trois relations permettent :

- soit de déterminer V et M dans un tronçon de poutre soumis à une charge répartie;
- soit de vérifier l'exactitude d'un tracé de diagrammes des sollicitations;
- soit de déterminer la section la plus sollicitée en flexion (la section où l'effort tranchant est égal à zéro).

## 2.4 Étude des contraintes normales

Considérons un tronçon de poutre soumis à de la flexion. La figure 2.2 représente ce tronçon avant et après déformation.

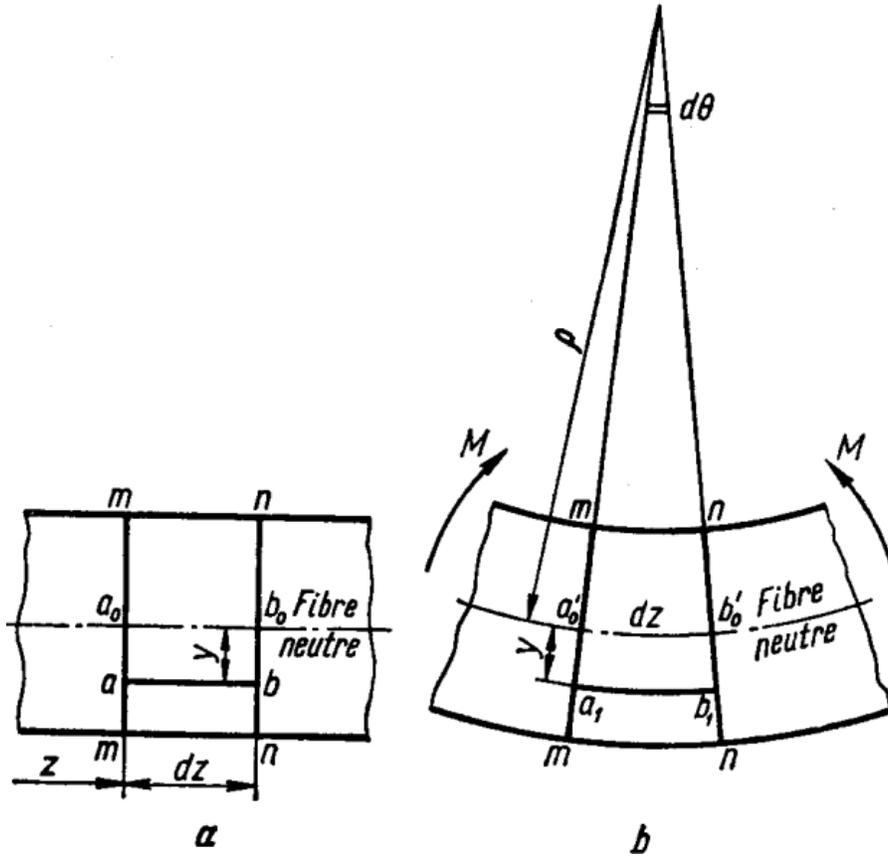


Figure 2.2 :Tronçon de poutre avant et après déformation

Etudions maintenant la variation de longueur d'une fibre quelconque  $ab$  d'ordonnée  $y$  par rapport à la ligne moyenne de la poutre. Cette fibre après déformation se transforme en  $a_1b_1$ . On constate expérimentalement que les fibres situées au dessus de la fibre moyenne se raccourcissent, tandis que les fibres situées sous la fibre moyenne s'allongent. La fibre moyenne ne change pas de longueur : on l'appelle aussi *fibre neutre*.

Ces constats nous permettent de conclure que :

- Les fibres s'allongent ou se raccourcissent;elles sont donc soumises à des contraintes normales.
- Entre chaque fibre, on a des variations de longueur qui induisent des contraintes tangentielles.

---

Intéressons nous dans un premier temps uniquement aux contraintes normales. On a vu que la longueur de la fibre  $ab$  passe à  $a_1b_1$  ; elle subit donc un allongement égal à  $(a_1b_1 - ab)$ . La déformation correspondante s'écrit donc :

$$\varepsilon = \frac{(a_1b_1 - ab)}{ab}$$

En écrivons que :

$$a_1b_1 = (\rho + y)d\theta \quad \text{et} \quad ab = dz$$

On déduit que :

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - dz}{dz}$$

Or par définition la courbure, inverse du rayon de courbure  $\rho$ , est donnée par la relation :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}$$

On peut donc écrire :

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

En restant dans l'hypothèse des petites déformations et de l'élasticité linéaire, cette déformation peut être reliée à la contrainte en utilisant la loi de Hooke :

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}$$

Avec cette dernière équation, on connaît la répartition des contraintes dans une section droite.

## 2.5 Relation contrainte normale/moment fléchissant

La contrainte en un point se définit comme suit :

*Sur un petit élément  $dA$  (appelé facette) appartenant à la surface de la coupure et entourant un point, agit une force  $dF$ . Par définition, la contrainte s'exerçant sur la coupure en ce point vaut :*

---

$$\sigma = \frac{dF}{dA}$$

En calculant le moment de flexion par rapport à l'axe  $\vec{z}$ , on trouve

$$M_{fz} = \int_A y dF = \int_A y(\sigma dA)$$

Comme :

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}$$

Il vient :

$$M_{fz} = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$$

La quantité  $\int_A y^2 dA$  est appelée *moment quadratique* de la section  $A$  par rapport à l'axe  $(G, \vec{z})$ . Cette grandeur ne dépend que de la section  $A$ , et est notée  $I_{Gz}$ . Soit :

$$I_{Gz} = \int_A y^2 dA$$

En résumé, on peut donc écrire :

$$M_{fz} = \frac{E}{\rho} I_{Gz} \quad \text{et} \quad \frac{E}{\rho} = \frac{\sigma}{y}$$

On peut en déduire finalement la relation reliant la contrainte normale au moment fléchissant :

$$\sigma = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y$$

Cette relation permet de déterminer les contraintes normales en fonction du moment fléchissant. A la fibre neutre ( $y=0$ ), les contraintes normales sont nulles, et leur valeur maximale est obtenue au plus loin de la fibre neutre : pour  $y = d/2$  dans le cas d'une section circulaire, et pour  $y = h/2$  pour une section rectangulaire.

Cette répartition est représentée sur la figure 2.3 pour une poutre symétrique.

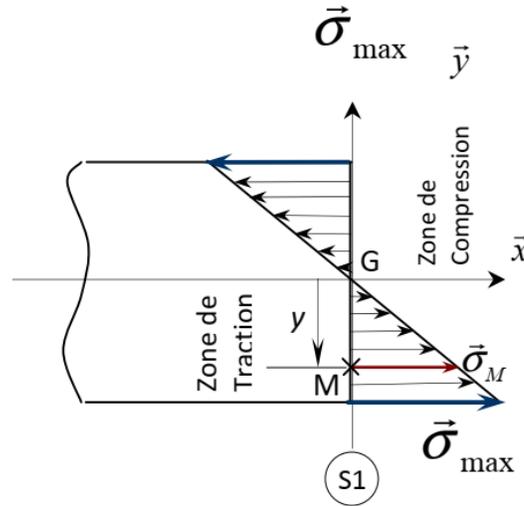


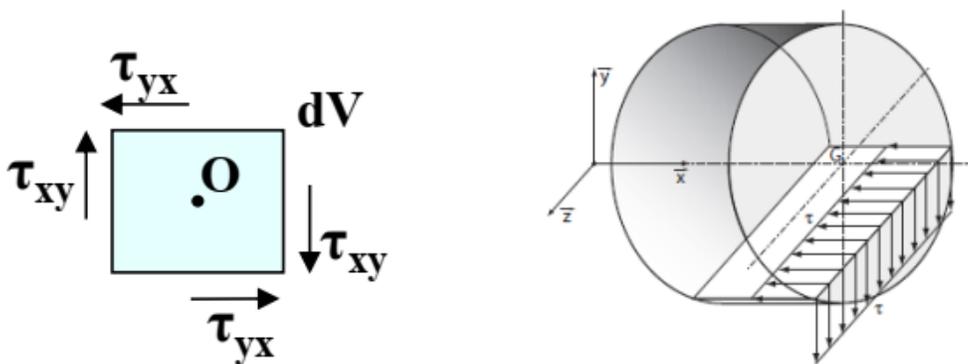
Figure 2.3 : Répartition de la contrainte normale sur la section droite d'une poutre soumise à une sollicitation de flexion plane simple.

## 2.6 Etude des contraintes tangentielles

### 2.6.1 Loi de réciprocité des contraintes de cisaillement

Pour comprendre le comportement des matériaux soumis au cisaillement, il faut revenir à la loi simple suivante (théorème de réciprocité de Cauchy) : *Lorsqu'il existe en un point une contrainte de cisaillement  $\tau$  dans un plan d'un élément, il existe la même contrainte  $\tau$  dans le plan perpendiculaire.*

- Equilibre (PFS) du volume élémentaire  $dV \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$ .
- Cisaillement transversal  $\Leftrightarrow$  cisaillement longitudinal.



### 2.6.2 Calcul de la contrainte tangentielle $\tau$

Isolons un tronçon de poutre limité par les surfaces  $S_1$ ,  $S_3$ ,  $S_2$  et la surface extérieure de la poutre, comme cela est représenté sur la figure 2.5.

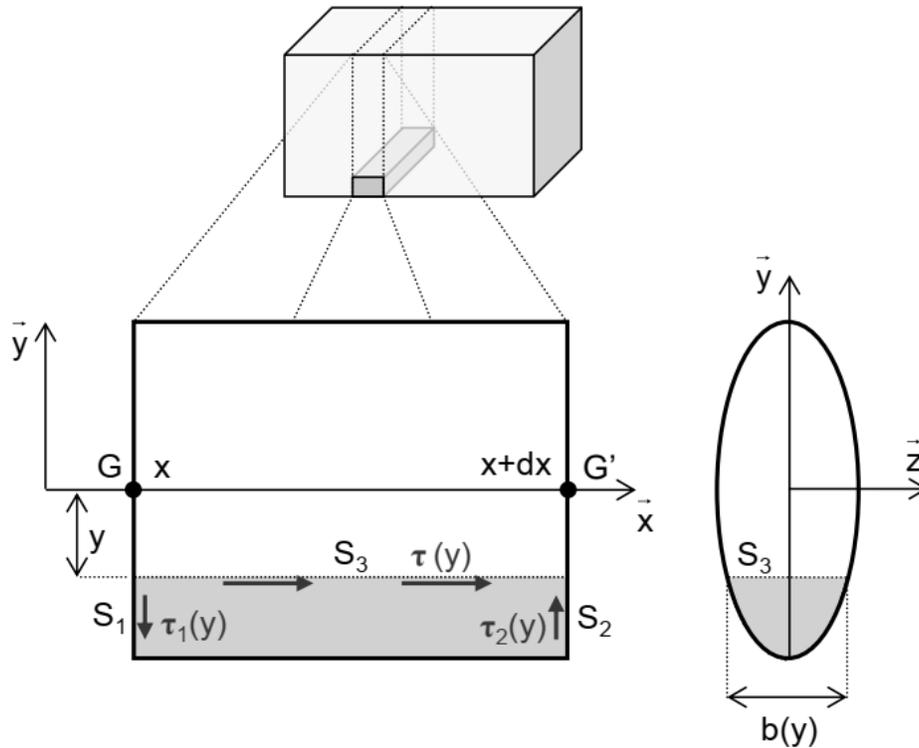


Figure 2.5 : Tronçon de poutre isolé.

Sur chaque section s'exerce les contraintes suivantes :

- Sur  $S_1$  :  $\sigma_1 = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y$  et  $\tau_1(y)$
- Sur  $S_2$  :  $\sigma_2 = -\frac{M_{fz} + dM_{fz}}{I_{Gz}} y$  et  $-\tau_2(y)$
- Sur  $S_3$  :  $\tau(y)$

Ecrivons maintenant l'équilibre statique de ce tronçon, en faisant la projection sur l'axe des x:

---


$$\int_{S_1} \sigma_1 dS + \int_{S_2} \sigma_2 dS + \int_{S_3} \tau dS = 0$$

Soit :

$$\int_{S_1} \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y dS - \int_{S_2} \frac{M_{fz} + dM_{fz}}{I_{Gz}} y dS + \tau(y) b(y) dx = 0$$

Comme  $S_1=S_2$ , on peut simplifier :

$$-\int_{S_1} \frac{dM_{fz}}{I_{Gz}} y dS + \tau(y) b(y) dx = 0$$

En divisant maintenant cette dernière expression par  $dx$ , on obtient :

$$-\frac{1}{I_{Gz}} \frac{dM_{fz}}{dx} \int_{S_1} y dS + \tau(y) b(y) = 0$$

On a démontré dans le chapitre 1, la relation suivante :

$$V_y = \frac{dM}{dx}$$

En remplaçant dans l'expression précédente, on trouve :

$$\tau(y) = \frac{V_y}{b(y) I_{Gz}} \int_{S_1} y dS$$

La quantité  $\int_{S_1} y dS$  est appelée *moment statique* de la section  $S_1$  par rapport à l'axe  $(G, \vec{z})$ . Cette grandeur est notée  $W_{Gz}$ . Soit :

$$W_{Gz}(y) = \int_{S_1} y dS$$

En résumé, on peut donc écrire :

---

$$\tau(y) = \frac{V_y \cdot W_{Gz}(y)}{I_{Gz} \cdot b(y)}$$

On peut remarquer sur cette expression que lorsqu'on s'éloigne au maximum de la ligne moyenne (soit en  $y = d/2$  où  $y = h/2$  selon la de section), l'intégrale qui permet de calculer  $W_{Gz}(y)$  est nulle puisque la section sur laquelle on intègre est nulle.

Ainsi la contrainte tangentielle est nulle sur les deux surfaces supérieures et inférieures de la poutre.

## 2.7 Contraintes maximales

Les contraintes maximales appliquées à la poutre sont données pour les valeurs maximales  $y_{\max}$  de  $y$  et  $z_{\max}$  de  $z$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{fz_{\max}}}{I_{Gz}} \cdot y_{\max}$$

$$\tau_{\max} = \frac{V_{y_{\max}} \cdot W_{Gz}}{I_{Gz} \cdot z_{\max}}$$

## 2.8 Conditions de résistance

La contrainte maximale ne doit pas dépasser les limites élastiques pratiques à la compression-traction et au cisaillement, soit:

$$\sigma_{\max} \leq R_{pe} \Leftrightarrow \frac{M_{fz_{\max}}}{I_{Gz}} \cdot y_{\max} \leq \frac{R_e}{s}$$

$$\tau_{\max} \leq R_{pg} \Leftrightarrow \frac{V_{y_{\max}} \cdot W_{Gz}}{I_{Gz} \cdot z_{\max}} \leq \frac{R_{eg}}{s}$$

**Remarque importante**

---

En général, dans une section droite les contraintes longitudinales  $\sigma$  sont maximales aux points où les contraintes tangentielles  $\tau$  sont nulles, inversement  $\sigma$  est maximal aux points pour lesquels  $\tau$  est nul.

On peut montrer que le rapport des ordres de grandeur de la contrainte tangentielle et de la contrainte normale :

$$\frac{o(\tau)}{o(\sigma)} = \frac{a}{l}$$

Or le rapport  $a/l$  est l'élanement de la poutre (rapport entre la plus grande dimension transversale et la longueur). Pour que le solide étudié puisse être considéré comme une poutre (cf. les hypothèses), le rapport  $a/l$  est inférieur à  $1/5$  et est bien souvent plus faible. On peut donc considérer que dans le cas de la flexion, les contraintes tangentielles sont négligeables devant les contraintes normales. Dès lors, les contraintes maximales apparaîtront le plus souvent dans la section droite soumise aux moments fléchissant les plus importants. C'est seulement dans le cas de pièces de faibles longueurs que les contraintes tangentielles devront être prises en compte dans le dimensionnement de la structure.

---

---

**CHAPITRE 3**

**DÉPLACEMENT DES POUTRES**

**SYMETRIQUES EN FLEXION PLANE**

---

## **CHAPITRE 3 DÉPLACEMENT DES POUTRES SYMETRIQUES EN FLEXION PLANE**

### **3.1 Importance du calcul des déplacements**

Dans toute étude de structure, outre le calcul des réactions, des éléments de réduction et des contraintes, on fait également des calculs de déplacements. Généralement, on fixe pour les déplacements des sections des limites admissibles à ne pas dépasser, tout comme pour les contraintes. Il n'est pas rare même que les conditions de déformabilité soient plus sévères que les conditions de résistance.

La limitation des déplacements vise avant tout à préserver la fonctionnalité de la structure. A titre d'exemple, une trop grande déformabilité des poutres peut provoquer des fissurations et engendrer des amorces de rupture.

Par ailleurs, la résolution des problèmes hyperstatiques fait appel aux calculs de déplacements.

Les poutres considérées sont droites et possèdent un plan de symétrie qui contient les charges appliquées. Dans ces conditions, la flexion se fait dans le plan de symétrie de la pièce considérée.

Ce chapitre expose les principales méthodes qui permettent d'obtenir l'équation de la déformée.

### **3.2 Définitions**

- a) *Déformée* : La *déformée* d'une structure correspond à l'allure de celle-ci lorsqu'elle reçoit un chargement. Elle est intimement liée aux actions qu'elle subit (si l'intensité, le type de chargement, ... change, la déformée changera).
- b) *Flèche* : Lorsqu'une structure est soumise à un moment de flexion, on observe la translation des sections droites perpendiculairement à la ligne moyenne de la poutre. Cette translation s'appelle "*flèche*".
- c) *Rotation* : Les sections de la poutre subissent une rotation. Cette rotation est la même que celle de la ligne moyenne.

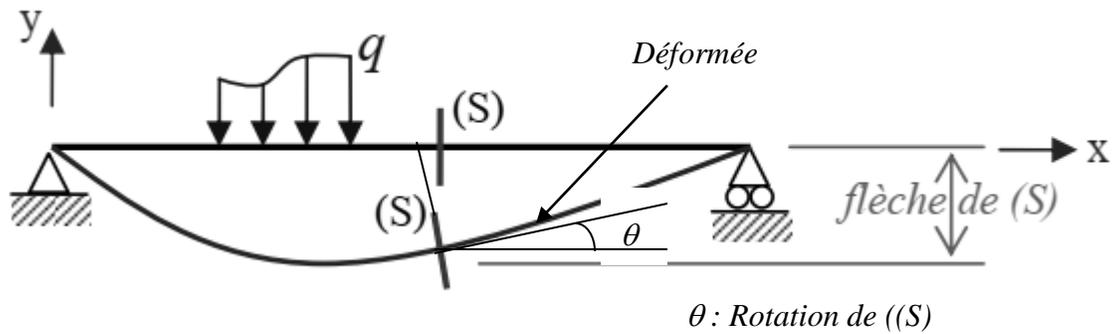


Figure 3.1 : Définitions

### 3.3 Equation différentielle de la déformée

Considérons la poutre reposant sur deux appuis linéaires rectilignes parfaits et soumise à un chargement vertical (Figure 3.1). Les actions mécaniques extérieures provoquent la flexion de la poutre.

L'influence de l'effort tranchant sur la courbure de la *déformée* étant généralement très faible, elle peut être négligée. Nous admettrons donc que la courbure en un point donné de la *déformée* dépend que de la valeur du moment fléchissant en ce point.

Soient deux sections infiniment proches dont la variation d'abscisse vaut  $dx$ . La variation de la rotation de la section en  $x$  à la section en  $x+dx$  vaut  $d\theta$ .  $R$  est le rayon de courbure (Figure 3.2).

En restant dans l'hypothèse des petites déformations, on peut appliquer la loi de Hooke :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E\varepsilon_x \\ \sigma_x &= \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} y$$

Or, par définition et en s'appuyant sur la figure 3.2, on peut écrire :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{(R+y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{y}{R}$$

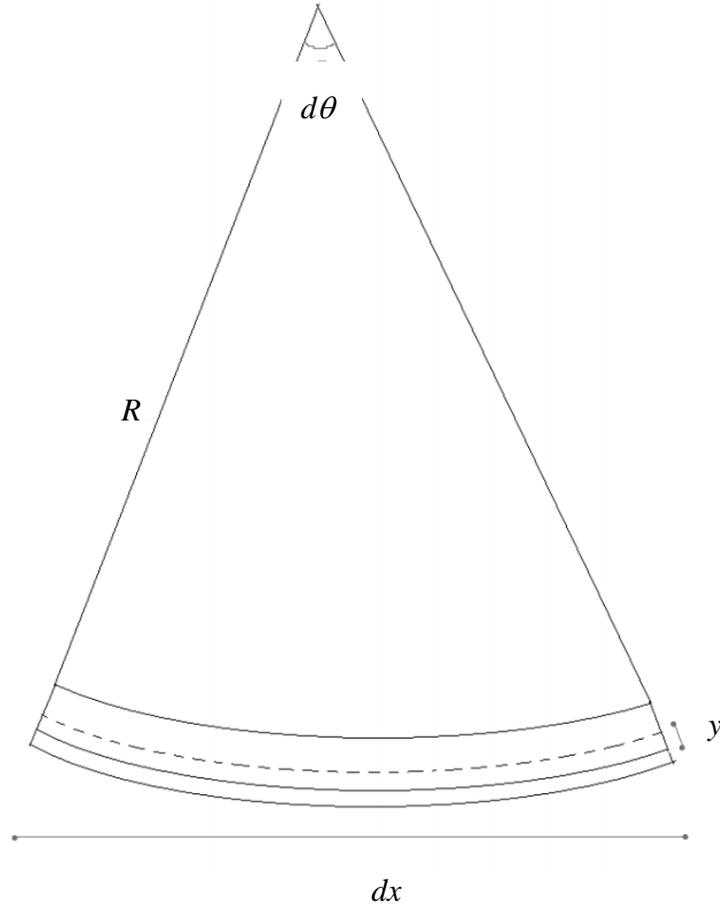


Figure 3.2: **Zoom** de la zone déformée  $dx$ .

Or, en géométrie analytique, on démontre que l'expression du rayon de courbure s'écrit :

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

De plus, le fait que l'on se place dans l'hypothèse des petites perturbations permet de négliger dans l'expression précédente le terme  $y'^2$  devant 1, soit  $1 + y'^2 \approx 1$ , ce qui donne :

$$R \approx \frac{1}{y''}$$

En remplaçant dans l'expression de  $\varepsilon_x$ , on trouve :

---

$$\varepsilon_x = \frac{y}{R} = y y''$$

On en déduit finalement l'équation différentielle vérifiée par la *déformée*,  $y(x)$ , relation de comportement globale entre la flèche et le moment fléchissant :

$$EI_{Gz} y'' = M_{fz} \Rightarrow y'' = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}}$$

C'est cette l'équation différentielle que l'on intègre dans chaque cas particulier afin de déterminer les flèches et les rotations des poutres.

On dispose de plusieurs méthodes pour la résolution cette équation différentielle. Les procédures les plus utilisées seront présentées ci-après.

### 3.4 Méthode d'intégration directe

L'équation de la *déformée*  $y(x)$ , peut être obtenue par intégration successive de l'équation différentielle précédente.

En intégrant une première fois on obtient l'équation de l'angle de rotation :

$$y'(x) = \theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M_{fz}(x)}{EI_{Gz}} dx + C_1$$

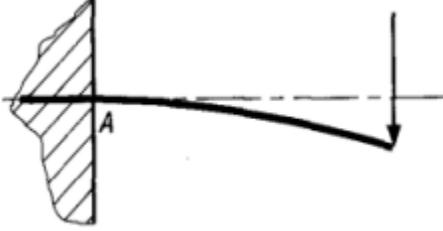
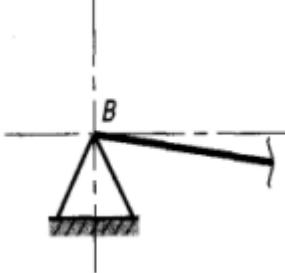
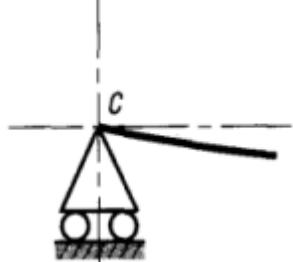
En intégrant une seconde fois obtient l'équation de la flèche :

$$y(x) = \frac{dy'}{dx} = \int \left[ \int \frac{M_{fz}(x)}{EI_{Gz}} dx + C_1 \right] dx + C_2$$

Où  $C_1$  et  $C_2$  sont les constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux limites.

Il faut noter que dans le cas des poutres ayant plusieurs tronçons dont chacun possède sa propre équation du moment, il faut substituer l'expression de  $M_{fz}$  dans chacune des équations différentielles et procéder à l'intégration. Les constantes d'intégration dans ce cas sont déterminées en utilisant les *conditions aux appuis* des extrémités de la poutre et les *conditions de continuité* aux limites des tronçons.

a) *Conditions aux appuis* :

Encastrement	Articulation	Appui simple
 <p data-bbox="289 667 540 709"><math>y_A = 0</math> et <math>y'_A = 0</math></p>	 <p data-bbox="813 699 898 741"><math>y_B = 0</math></p>	 <p data-bbox="1211 688 1295 730"><math>y_C = 0</math></p>

b) Conditions de continuité :

$y_g = y_d$ $y'_g = y'_d$	
---------------------------	---

### 3.5 Méthode des paramètres initiaux

La méthode d'intégration directe devient fastidieuse quand le chargement et/ou la section présente(nt) des discontinuités. Dans ce cas, l'expression de  $M_{fz}/EI_{Gz}$  change à chaque discontinuité et on doit travailler par tronçon. On effectue sur chaque tronçon une double intégration pour obtenir l'expression de sa déformée. Mais comme à chaque double intégration on voit apparaître deux constantes d'intégration, le total des constantes pour toute la poutre est égal au double du nombre de tronçons existants.

La méthode *des paramètres initiaux* permet de réduire les constantes à deux seulement, et ce quelque soit le nombre de tronçons. D'autre part, la méthode fournit une expression unique de la

déformée, valable pour tous les tronçons. L'expression de la rotation s'obtient naturellement par dérivation de la fonction de la déformée.

L'intégration directe de cette expression résulte en deux constantes  $y_0$  et  $\theta_0$  qui sont les paramètres initiaux.

Ainsi si on prend l'origine des coordonnées aux points situés à l'extrême gauche de la poutre, les expressions de  $y(x)$  et  $\theta(x)$  sont données par les équations :

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 + \sum M \frac{(x-a)}{1!} + \sum P \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(x-d)^3}{3!} + \sum q'_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q'_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \dots$$

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\theta_0 \frac{x}{1!} + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum P \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \sum q'_c \frac{(x-c)^5}{5!} - \sum q'_d \frac{(x-d)^5}{5!} + \dots$$

Où :

$M$  : moments concentrés extérieurs ou à l'encastrement

$a$  : distance entre l'origine des coordonnées et les points d'application des moments  $M$

$P$  : les forces concentrées y compris les réactions

$b$  : distances entre l'origine des coordonnées et les points d'application des forces  $P$

$q_c, q_d$  : respectivement, les intensités au début et à la fin de la charge répartie

$q'_c, q'_d$  : respectivement, les valeurs des dérivées de  $q$  aux points  $x=c$  et  $x=d$

Les directions des charges sont positives comme indiquées sur la figure 3.3:

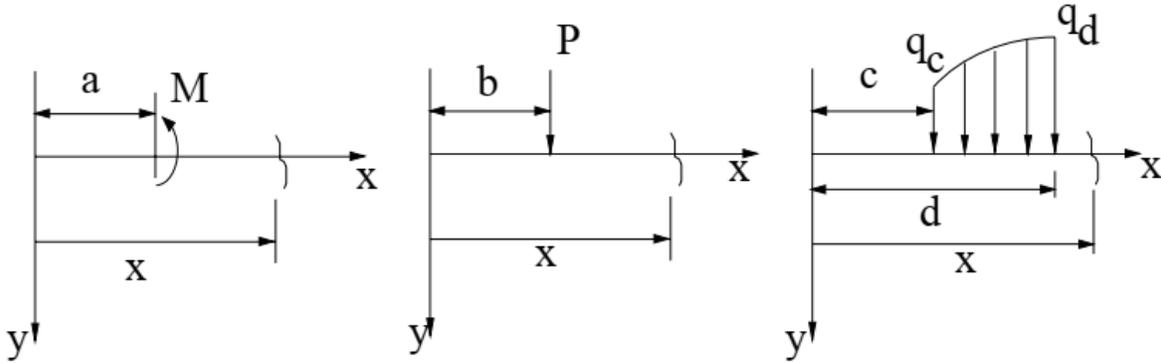


Figure 3.3

$y_0$  et  $\theta_0$  flèche et angle de rotation initiaux (paramètres initiaux), sont déterminés en utilisant les conditions aux appuis.

### 3.6 Méthode des moments des aires

La méthode des "moments des aires" est une méthode par intégration géométrique permettant de calculer la flèche et la rotation d'une poutre à partir du diagramme des moments fléchissants.

Reprenons l'équation différentielle de la déformée (courbe élastique), qui s'écrit :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}}$$

En intégrant cette dernière expression, on peut obtenir la variation de la rotation,  $\theta_{CD} = \theta_D - \theta_C$ , entre les deux points C et D sur la courbe élastique de la poutre (figure 3.3) ; qui s'écrit ainsi :

$$\theta_{CD} = \int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} dx$$

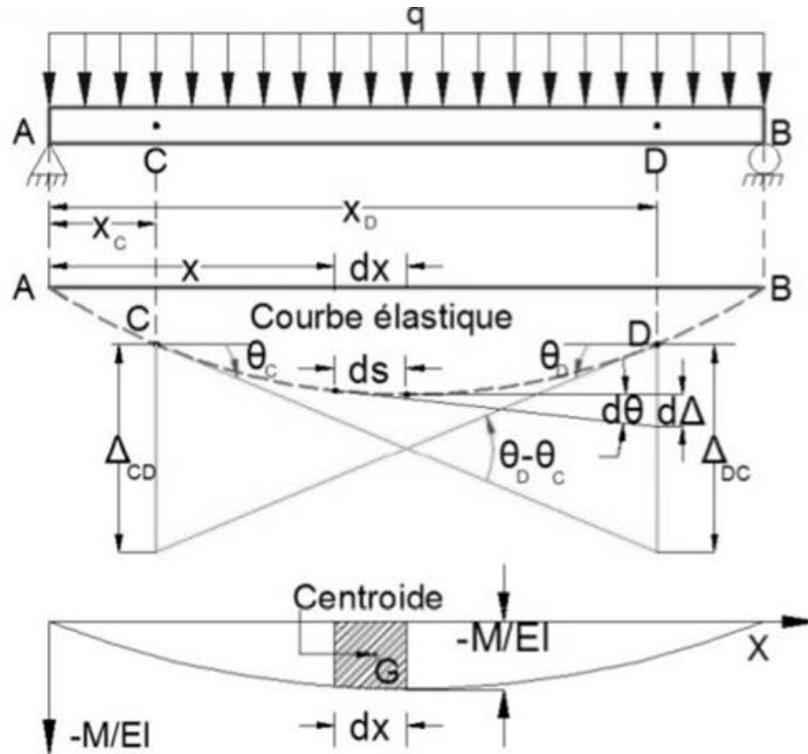


Figure 3.3 : Méthode des moments d'aires.

Or, le terme  $\int_{x_C}^{x_D} \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} dx$  représente l'aire sous la courbe  $M_{fz}/EI_{Gz}$  comprise entre  $x_C$  et  $x_D$  (figure

3.3) ; soit donc :

$$\theta_{CD} = \left[ \text{aire sous } \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} \right]_C^D$$

Cette dernière expression peut s'exprimer sous forme d'un théorème, appelé "Théorème de variation de la pente"; qui s'énonce comme suit :

*"L'angle compris entre les tangentes à la courbe élastique (déformée), en un point C et en un point D, est égal à l'aire (comprise entre ces deux points) sous la courbe du moment fléchissant divisé par la rigidité flexionnelle ( $EI_{Gz}$ )".*

Revenons maintenant sur la figure 3.3; on voit que la distance  $d\Delta$ , peut être calculée comme suit :

---


$$\operatorname{tg}(d\theta) \cong d\theta = \frac{d\Delta}{x_D - x} \Rightarrow d\Delta = (x_D - x)d\theta$$

En intégrant la dernière expression, on obtiendra la distance verticale  $d\Delta_{DC}$

$$\Delta_{DC} = \int_{DC} d\Delta = \int_{x_C}^{x_D} (x_D - x) \left[ \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} \right] dx$$

On définit  $\Delta_{DC}$  comme la flèche tangentielle au point  $D$  par rapport au point  $C$ . Le terme

$\int_{x_C}^{x_D} \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} dx$  représente l'aire sous la courbe  $M_{fz}/EI_{Gz}$  comprise entre  $x_C$  et  $x_D$  (figure 3.3). En

appelant  $\overline{x_{DG}}$ , la distance qui sépare le point  $D$  du centroïde  $G$  de cette aire, on peut réécrire l'expression de  $\Delta_{DC}$ , comme suit :

$$\Delta_{DC} = \overline{x_{DG}} \cdot \left[ \text{aire sous } \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} \right]_C^D$$

Cette dernière expression peut s'exprimer sous forme d'un théorème, le second de la méthode des aire, appelé "Théorème de la flèche tangentielle", qui s'énonce comme suit :

*"La flèche tangentielle issue d'un point quelconque  $D$  (de la courbe élastique) sur la tangente passant par un autre point  $C$  de la courbe élastique est égal au premier moment, par rapport au point  $C$ , de l'aire (comprise entre ces deux points) sous la courbe du moment fléchissant divisé par la rigidité flexionnelle ( $EI_{Gz}$ )".*

### 3.7 Méthode de superposition

La méthode de superposition s'applique uniquement dans le cas où la relation entre le chargement et les déplacements (rotation ou flèche) est linéaire.

Soit une structure soumise à un ensemble de charges  $P_i$ , et soit  $M_{fz}(x)$  le moment fléchissant résultant. Si l'on considère maintenant chaque charge séparément ( $P_1, P_2, \dots, P_n$ ), on aura pour chacune d'elle un moment fléchissant  $M_1(x), M_2(x), \dots, M_n(x)$ . Si on applique les conditions d'équilibre en un point quelconque de la structure, on aura :

---

$$M_{fz}(x) = M_1(x) + M_2(x) + \dots + M_n(x)$$

On vu précédemment que l'expression de la déformée de la poutre s'écrit :

$$M_{fz}(x) = EI_{Gz} y''$$

Soit :

$$M_1(x) + M_2(x) + \dots + M_n(x) = EI_{Gz} y''$$

D'autre part, on peut aussi déterminer l'expression de la *déformée* due à chaque charge séparément, soit :

$$\begin{aligned} M_1(x) &= EI_{Gz} y_1'' \\ M_2(x) &= EI_{Gz} y_2'' \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ M_n(x) &= EI_{Gz} y_n'' \end{aligned}$$

Des deux dernières expressions ci-dessus, on déduit :

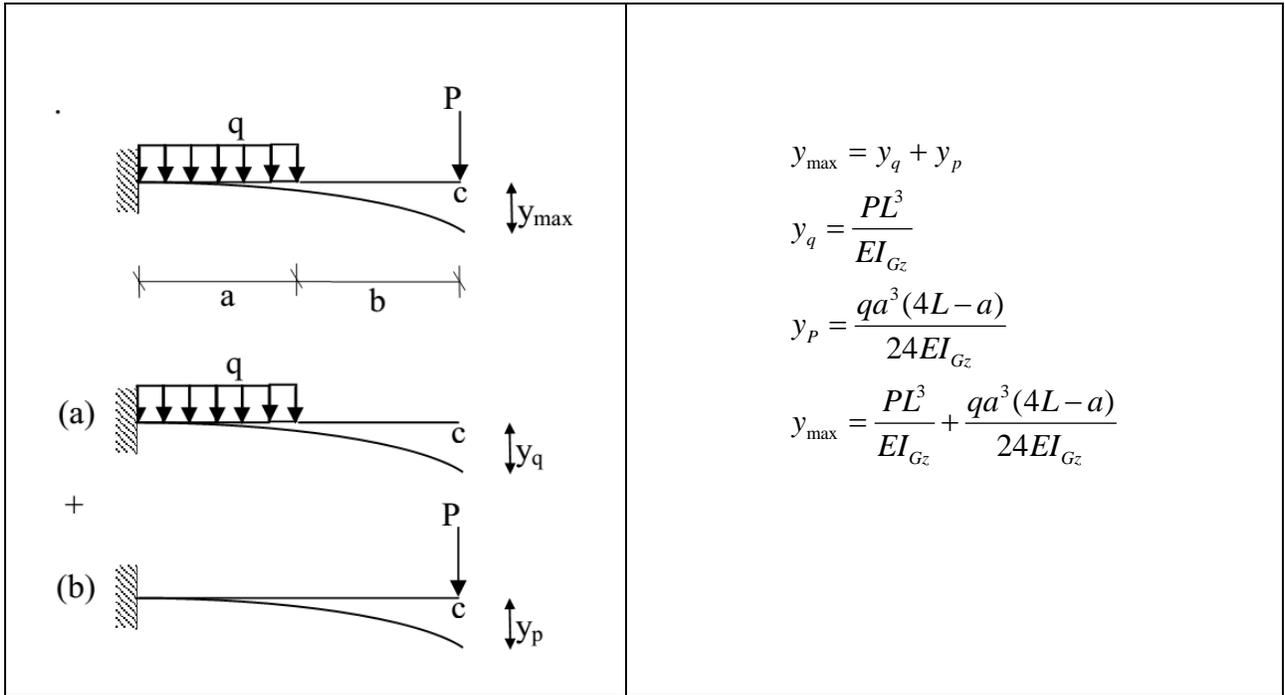
$$\begin{aligned} EI_{Gz} y'' &= EI_{Gz} (y_1'' + y_2'' + \dots + y_n'') \\ &= EI_{Gz} \frac{d^2}{dx^2} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \end{aligned}$$

D'où, finalement :

$$y = (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

En suivant la même démarche que précédemment, la méthode superposition permet de calculer le rotation  $\theta = \theta(x)$ , comme suit :

$$y' = \theta = (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$$



---

---

**CHAPITRE 4**

**THÉORÈMES GÉNÉRAUX DES**

**SYSTÈMES ÉLASTIQUES**

---

---

## CHAPITRE 4 THÉORÈMES GÉNÉRAUX DES SYSTÈMES ÉLASTIQUES

### 4.1 Introduction

L'énergie de déformation constitue un outil important pour l'analyse du comportement des corps déformables; cet outil apporte des solutions rigoureuses et rapides en résistance des matériaux :

- soit pour déterminer les déplacements des points d'une structure,
- soit pour donner des relations complémentaires dans le cas de l'étude des systèmes hyperstatique.

Dans toute la suite du chapitre, les hypothèses suivantes sont prises en compte :

- le matériau constituant les structures étudiées a une loi de comportement élastique linéaire,
- les transformations sont réversibles: elles se produisent suffisamment lentement pour que le système soit à chaque instant dans un état d'équilibre,
- les effets thermiques ne seront pas pris en compte,
- on négligera le poids propre des structures.

### 4.2 Travail des forces extérieures

#### 4.2.1 Travail élémentaire d'une force

Le travail élémentaire  $dW$  d'une force  $\vec{F}$  dont le point d'application A se déplace de A à A' ( $\vec{dl} = \vec{AA'}$ ) est égal au produit scalaire de  $\vec{F}$  par  $\vec{dl}$  (figure 4.1).

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F \cdot dl \cdot \cos \theta$$

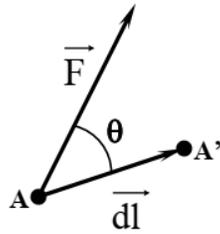


Figure 4.1 : Travail élémentaire d'une force.

#### 4.2.2 Travail d'une force

Nous allons illustrer cette notion de travail d'une force a travers deux exemples.

*Exemple 1* : Etude d'une poutre en flexion, soumise à un effort  $P$ .

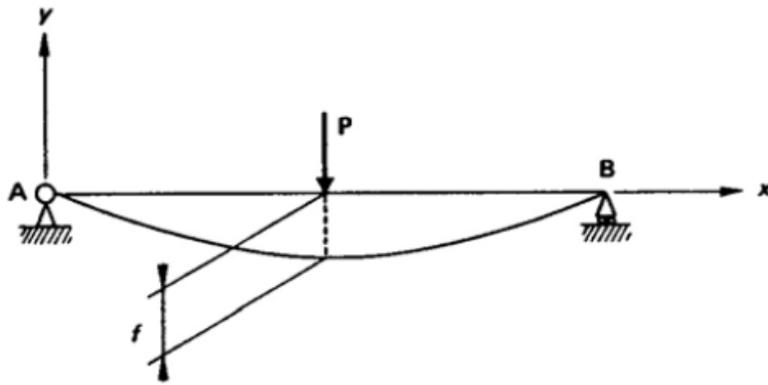


Figure 4.2 : Poutre en flexion, soumise à un effort  $P$ .

Lorsque  $P$  augmente, la flèche  $f$  de la poutre au droit du point d'application de  $P$  augmente proportionnellement à  $P$  si le matériau constituant la poutre est élastique linéaire. On suppose en outre que  $P$  est appliqué progressivement, c'est-à-dire de manière réversible (du point de vue thermodynamique).

Soit  $\lambda$  un paramètre compris entre 0 et 1 ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) permettant de décrire l'évolution de l'effort appliqué, entre 0 et  $P$ .

L'évolution de  $P$  et, respectivement, celle de  $f$  sont représentés dans le tableau suivant:

	$P$	$f$
état initial : 0	0	0
état : $\lambda$	$\lambda P$	$\lambda f$
état in : $(\lambda+d\lambda)$	$(\lambda+d\lambda)P$	$(\lambda+d\lambda)f$
état final : 1	$P$	$f$

où  $d\lambda$  représente une variation très faible du paramètre  $\lambda$ .

L'expression du travail élémentaire effectué pour passer de l'état ( $\lambda$ ) à l'état ( $\lambda + d\lambda$ ) s'écrit:

$$\begin{aligned} dW &= [(\lambda + d\lambda)f - \lambda f] \cdot (\lambda + d\lambda) P \\ &= \lambda \cdot d\lambda \cdot f \cdot P + (d\lambda)^2 \cdot f \cdot P \end{aligned}$$

En négligeant le terme  $(d\lambda)^2 \cdot f \cdot P$  qui représente un infiniment petit d'ordre 2, par rapport au terme  $\lambda \cdot d\lambda \cdot f \cdot P$ , on obtient :

$$dW = \lambda \cdot d\lambda \cdot f \cdot P$$

Finalement, le travail total ( $W$ ) effectué entre l'instant initial (0) et l'instant final (1) est obtenu par l'intégration de  $dW$  entre 0 et 1, d'où:

$$W = \int_0^1 dW = \int_0^1 P \cdot f \cdot \lambda \cdot d\lambda$$

Soit :

$$W = \frac{1}{2} P \cdot f$$

puisque ni  $f$  ni  $P$  ne dépendent de  $\lambda$ .

**Exemple 2 :** Étude d'un barreau en traction, soumise à un effort  $F$ .

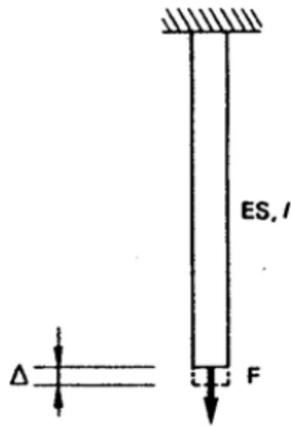


Figure 4.3 : Barreau en traction, soumis à un effort  $F$ .

Comme dans l'exemple 1, le matériau constituant le barreau est élastique linéaire, et l'effort  $F$  est appliqué progressivement.

Un tableau analogue à celui de l'exemple 1, traduisant l'évolution de  $F$  et de l'allongement associé  $\Delta$ , par l'intermédiaire du paramètre d'évolution  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ), résume les différents états:

	$F$	$\Delta$
état initial : 0	0	0
état : $\lambda$	$\lambda F$	$\lambda \Delta$
état in : $(\lambda+d\lambda)$	$(\lambda+d\lambda)F$	$(\lambda+d\lambda)\Delta$
état final : 1	$F$	$\Delta$

D'où l'expression du travail élémentaire, par un raisonnement analogue à celui utilisé pour l'exemple 1:

$$dW = \lambda \cdot d\lambda \cdot F \cdot \Delta$$

Le travail global  $W$  qu'il est nécessaire de fournir au barreau pour l'allonger de  $\Delta$  a alors pour expression:

---

$$W = \int_0^1 dW = \int_0^1 F \cdot \Delta \cdot \lambda \cdot d\lambda$$

Soit :

$$W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta$$

puisque ni  $\Delta$  ni  $F$  ne dépendent de  $\lambda$ .

### 4.3 Énergie de déformation élastique

Pour un solide isolé, en statique, la somme des travaux des efforts extérieurs et des travaux des efforts intérieurs au système est nulle, dans toute transformation réversible:

$$W_{ext} + W_{int} = 0$$

Les structures étudiées dans ce cours sont des structures déformables, l'énergie fournie par le travail des efforts extérieurs appliqués à la structure va servir à la déformer. Le matériau constituant ces structures ayant un comportement élastique linéaire, l'énergie apportée par l'extérieur sert intégralement à déformer le corps, de manière réversible. On a donc:

$$W_{ext} = W_{def}$$

avec:

$W_{ext}$  : énergie apportée par le travail des efforts extérieurs,

$W_{def}$  : énergie de déformation élastique.

Ceci nous conduit à énoncer du théorème fondamental de l'énergie:  
*La somme des travaux des efforts extérieurs appliqués au système est égale à l'énergie de déformation de ce système.*

Soit :

$$\begin{cases} W_{ext} + W_{int} = 0 \\ W_{ext} = W_{def} \end{cases} \Rightarrow W_{int} = -W_{def}$$

---

Qui s'énonce encore :

*La somme des travaux des efforts intérieurs au système est égale à l'opposé de l'énergie de déformation de ce système.*

#### **4.3.1 Expression de $W_{ext}$ , travail des efforts extérieurs**

Reprenons les deux exemples traités au début du chapitre. L'effort extérieur est appliqué progressivement, il induit un déplacement de la structure, déplacement proportionnel à l'effort extérieur lorsque le comportement du matériau est élastique linéaire. Les deux exemples précédents nous permettent d'écrire, sous réserve de vérifier les hypothèses posées dans l'introduction:

$$W_{ext} = \frac{1}{2} F \cdot y_F$$

Avec :

F: effort extérieur appliqué

$y_F$  : déplacement dans le sens de cet effort F

#### **4.3.2 Expression de $W_{def}$ , énergie de déformation élastique**

L'énergie de déformation élastique  $W_{def}$  représente le travail dû aux contraintes et aux déformations engendrées par ces contraintes.

Par analogie avec l'expression précédente ( $W_{ext}$ ), l'énergie de déformation élastique se met sous la forme:

$$W_{def} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon$$

avec une loi de comportement élastique linéaire (figure 4.4).

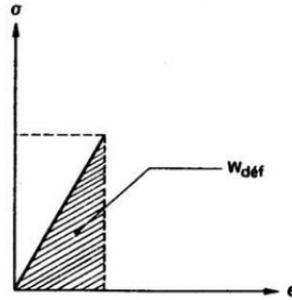


Figure 4.4

Cette expression de l'énergie de déformation va donc faire intervenir les différents types de contraintes dus aux diverses sollicitations, et les déformations engendrées par ces contraintes.

En se limitant ici à l'étude des structures planes, chargées dans leur plan, on va maintenant déterminer les expressions de l'énergie de déformation élastique  $W_{déf}$  en traction/compression, en torsion, en cisaillement et en flexion.

### 4.3.3 Energie de déformation élastique en traction

Considérons le barreau en traction simple représenté à figure 4.5(a).

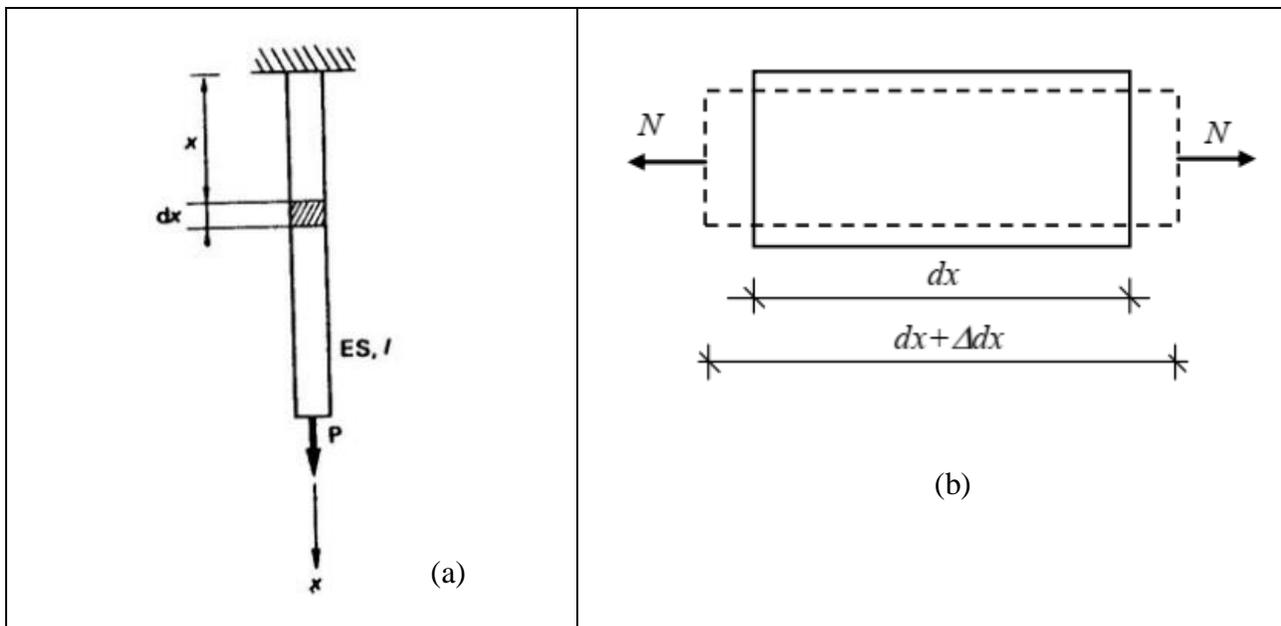


Figure 4.5

---

Isolons à l'intérieur un tronçon de longueur  $dx$  (figure 4.5(b)). Pour ce tronçon de longueur  $dx$ , l'effort normal  $N$  est un effort extérieur ; on peut alors écrire que l'énergie de déformation élastique du tronçon est égale au travail des efforts extérieurs appliqués à ce tronçon (soit ici  $N$ ), soit :

$$dW_{def} = \frac{1}{2} N \cdot \Delta dx$$

$\Delta dx$  : représente l'allongement du tronçon de longueur  $dx$ .

En traction simple, on sait que :

$$\Delta dx = \frac{N dx}{ES}$$

Avec :

E : module d'élasticité longitudinal (module de Young)

S : aire de la section droite du barreau.

En remplaçant dans l'expression précédente, on trouve :

$$dW_{def} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{ES} dx$$

On en déduit finalement, l'expression de l'énergie de déformation élastique en traction :

$$W_{def}^{traction} = \int_{structure} \frac{1}{2} \frac{N^2}{ES} dx$$

L'intégrale étant faite sur toute la longueur de la structure.

#### 4.3.4 Energie de déformation élastique en cisaillement

Par analogie avec l'étude conduite pour la traction, on détermine l'énergie de déformation élastique en cisaillement pour laquelle interviennent :

- la contrainte de cisaillement  $\tau$ ,
- la déformation associée  $\gamma$ .

L'énergie élastique emmagasinée en cisaillement dans un tronçon  $dx$  soumis à un effort tranchant  $V$  vaut :

$$W_{déf}^{cisaillement} = \int_{structure} \frac{1}{2} \frac{V^2}{GS_r} dx$$

L'intégrale étant faite sur toute la longueur de la structure.

Où :

$S_r$  : représente la section réduite, à prendre en compte vis-à-vis du cisaillement,

$G$  : représente le module d'élasticité transversal en cisaillement.

#### 4.3.5 Energie de déformation élastique en flexion

Considérons un tronçon  $dx$  de poutre soumis à un moment de flexion  $M$  (Figure 4.6).

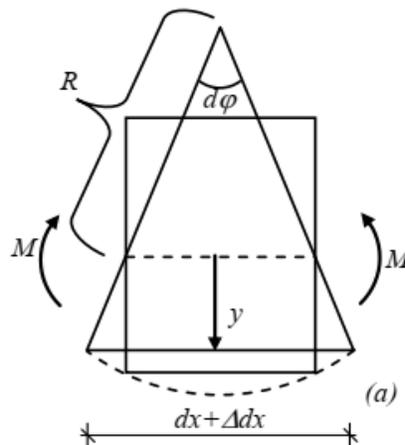


Figure 4.6

L'énergie de déformation élémentaire, due aux contraintes normales est donnée par :

$$dW_{déf} = \frac{1}{2} M d\phi$$

Or on a vu, dans le cours de flexion que la courbure de la poutre était donnée par :

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} = \frac{d\phi}{dx}$$

---

où  $EI$  représente le module de rigidité en flexion de l'élément de structure étudié.

En reportant la valeur de  $d\varphi$  dans l'expression de  $dW_{déf}$ , on obtient:

$$dW_{déf} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx$$

D'où la valeur de l'énergie de déformation élastique en flexion pour l'ensemble de la structure:

$$W_{déf}^{flexion} = \int_{structure} \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx$$

Il s'agit là encore d'une intégrale à calculer sur toute la longueur de la structure

#### 4.3.6 Energie de déformation élastique en torsion

L'angle dont tourne l'une par rapport à l'autre les sections extrêmes du tronçon  $dx$  soumis à un moment de torsion  $M_t$  est donné par (Figure 4.7) :

$$d\varphi_t = \frac{qM_t}{GI_p} dx$$

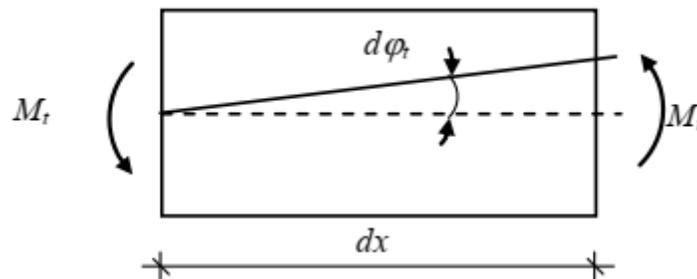


Figure 4.7

Où :

- $q$  est une constante dépendant de la forme et des dimensions de la section, appelée coefficient de torsion ( $q \approx 40I_p^2 / A^4$ ). Ce facteur vaut 1 pour la section circulaire et est supérieur à 1 pour les autres cas.
- la quantité ( $C = GI_p / q$ ) est désignée par *rigidité à la torsion* (ou *rigidité torsionnelle*).

---

L'énergie de déformation élastique emmagasinée dans le tronçon  $dx$  se calcule comme le travail effectué par  $Mt$  lors du déplacement  $d\varphi_t$ :

$$dW_{\text{déf}} = \frac{1}{2} M_t d\varphi_t = \frac{1}{2} \frac{qM_t^2}{GI_p} dx$$

Et pour l'ensemble de la structure:

$$W_{\text{déf}}^{\text{torsion}} = \int_{\text{structure}} \frac{1}{2} \frac{qM_t^2}{GI_p} dx$$

L'intégrale étant faite sur toute la longueur de la structure.

### 4.3.7 Expression générale de l'énergie de déformation élastique

Sur la base des calculs faits précédemment, on peut déduire l'expression générale de *l'énergie de déformation élastique* emmagasinée par une structure soumise à un chargement plan développant les sollicitations  $N$ ,  $V$ ,  $M$  et  $M_t$  :

$$W_{\text{déf}} = W = \int_{\text{structure}} \left( \frac{N^2}{2ES} + \frac{V^2}{2GS_r} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{qM_t^2}{2GI_p} \right) dx$$

Cette relation s'obtient par sommation des contributions de chaque sollicitation du fait que le déplacement provoqué par une des sollicitations ne provoque pas de travail de la part des autres sollicitations (déplacements indépendants).

## 4.4 Théorème de Castigliano

### 4.4.1 Énoncé du théorème

Soit un corps élastique linéaire, ne possédant que des liaisons fixes et chargé par un système d'actions extérieures ( $F_1, F_2, \dots, F_n$ ) appliquées aux points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Le déplacement du point  $A_i$  sous l'action de l'ensemble des forces est noté  $u_i$ .

---

**Énoncé:** la dérivée partielle de l'énergie interne du corps par rapport à l'action  $F_i$  est égale au déplacement du point d'application de  $F_i$  suivant sa ligne d'action (ie la projection du déplacement total de cette action sur son support).

Soit :

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}$$

**Remarque**

Le terme d'**action** doit être pris dans son sens le plus large : ce peut être une force, un couple,...c'est à dire, si l'action  $F_i$  est une force, le déplacement correspondant est une translation et si c'est un couple  $C_i$ , le déplacement correspondant est une rotation.

**4.4.2 Démonstration du théorème**

Considérons un corps élastique chargé par le système d'actions extérieures  $S_1(F_1, F_2, \dots, F_n)$ . Sous l'action de ces charges, le corps emmagasine une énergie de déformation, égale au travail réversible des forces extérieures qui lui sont appliquées sur les déplacements qu'elles induisent à ce corps.

**Étape 1**

Donnons à une force  $F_i$ , appliquée en  $A_i$ , un accroissement  $dF_i$ . L'accroissement de l'énergie de déformation du corps vaut :

$$dW = \frac{\partial W}{\partial F_i} dF_i$$

L'énergie de déformation totale du système vaut alors :

$$W = W(S_1) + dW = W(S_1) + \frac{\partial W}{\partial F_i} dF_i$$

**Étape 2**

Considérons maintenant le corps non chargé, et soumis seulement à l'action élémentaire  $dF_i$ . Le point d'action de cette force élémentaire subit un déplacement  $du_i$  (figure 4.8).

Le travail réversible de l'action  $dF_i$  sur ce déplacement vaut :

$$d^2W_0 = \frac{1}{2} dF_i \cdot du_i$$

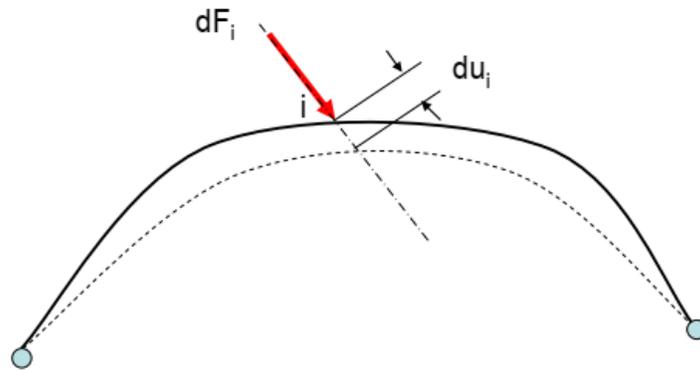
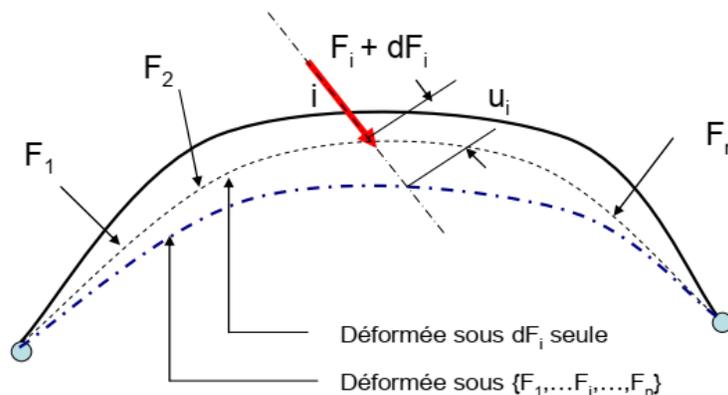


Figure 4.8

Cette énergie est une différentielle de 2<sup>ème</sup> ordre car c'est le produit d'une petite force ( $dF_i$ ) par un petit déplacement ( $du_i$ ).

Appliquons ensuite le système de forces  $S_1$  ( $F_1, F_2, \dots, F_n$ ). L'énergie de déformation emmagasinée est alors égale à l'énergie due au système de forces  $S_1(F_1, F_2, \dots, F_n)$  augmentée du travail de la force  $dF_i$  déjà appliquée et présente avec toute son intensité, par le déplacement  $u_i$  provoqué en  $A_i$  par l'ensemble des forces du système (Figure 4.9), soit :

$$W_1 = W(S_1) + dF_i \cdot u_i$$



---

Figure 4.9

Au total, nous aurons :

$$W' = d^2W_0 + W_1 = d^2W_0 + W(S_1) + dF_i \cdot u_i = W(S_1) + \frac{1}{2} dF_i \cdot du_i + dF_i \cdot u_i$$

Or le terme  $\frac{1}{2} dF_i \cdot du_i$  est un infiniment petit de second ordre par rapport aux autres termes, nous pouvons donc le négliger.

L'énergie de déformation élastique ne dépendant que des états initial et final, il vient :

$$W = W'$$

Soit :

$$W(S_1) + \frac{\partial W}{\partial F_i} dF_i = W(S_1) + dF_i \cdot u_i$$

Soit, finalement :

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}$$

#### 4.4.3 Calcul des déplacements dans une poutre

On a vu que l'expression générale de l'énergie de déformation élastique emmagasinée par une structure soumise à un chargement plan développant les sollicitations  $N$ ,  $V$ ,  $M$  et  $M_t$  est égale à :

$$W = \int_{structure} \left( \frac{N^2}{2ES} + \frac{V^2}{2GS_r} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{qM_t^2}{2GI_p} \right) dx$$

Pour calculer le déplacement du point d'application d'une charge  $Q$ , il suffit d'appliquer directement le théorème de Castigliano en dérivant l'énergie de déformation élastique par rapport à la charge  $Q$ . Il faut bien entendu exprimer cette énergie (donc les sollicitations) en fonction de la charge  $Q$ .

**Remarque :**

---

Plutôt que de calculer dans un premier temps l'expression de l'énergie, qui passe par le calcul d'une intégrale en  $N^2$ ,  $V^2$ ,  $M^2$  et  $M_t^2$ , puis ensuite de dériver cette énergie par rapport à la charge  $Q$ , il est plus commode de dériver directement dans l'intégrale.

Ainsi, si l'on note  $\Delta$  le déplacement de la structure au point d'application d'une force  $Q$  et suivant la ligne d'action de  $Q$ , il vient :

$$\Delta = \frac{\partial W}{\partial Q} = \int_{structure} \left( \frac{N(x)}{ES} \frac{\partial N(x)}{\partial Q} + \frac{V(x)}{GS_r} \frac{\partial V(x)}{\partial Q} + \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial Q} + q \frac{M_t(x)}{GI_p} \frac{\partial M_t(x)}{\partial Q} \right) dx$$

## 4.5 Méthode de la force fictive généralisée

Le théorème de Castigliano permet de calculer le déplacement  $\Delta_i$  dans le sens et au point où est appliqué un effort  $F_i$ , par la relation:

$$\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}$$

Si, à l'endroit où l'on désire calculer un déplacement, il n'y a pas d'effort appliqué, on fera intervenir un effort fictif  $X$ , au point et dans le sens du déplacement  $\Delta$  cherché (figure 4.10). L'expression de  $\Delta$  sera donnée par la relation obtenue en appliquant sur  $X$  le théorème de Castigliano :

$$\Delta = \left( \frac{\partial W(P, X)}{\partial X} \right)_{X=0}$$

où  $W(P, X)$  représente l'énergie de déformation de la structure, calculée en fonction de :  
 $P$  : désignant globalement l'ensemble des efforts extérieurs appliqués à la structure,  
 $X$  : effort fictif.

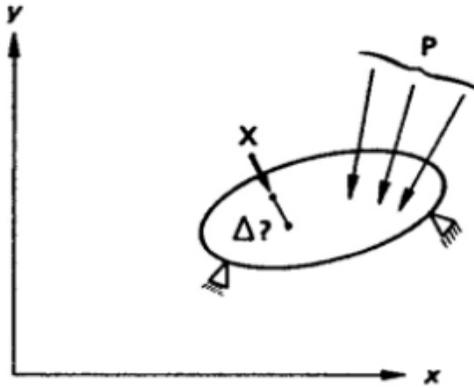


Figure 4.10

**Remarque :**

$X$  est un effort fictif, qui donc n'existe pas dans la structure réelle: c'est pour cette raison qu'après avoir calculé  $\frac{\partial W}{\partial X}$  on prend la valeur de cette expression pour  $X=0$ .  $X$  ne fait que servir d'intermédiaire, afin de permettre le calcul de  $\Delta$  par application du théorème de Castigliano.

---

**CHAPITRE 5**

**SOLLICITATIONS COMPOSÉES**

---

---

## CHAPITRE 5 SOLLICITATIONS COMPOSÉES

### 5.1 Généralités

Les poutres sont parfois chargées de façon complexe et les sollicitations engendrées, appelées sollicitations composées, ne peuvent pas être étudiées et schématisées à l'aide de sollicitations simples, comme la traction/compression simple, le cisaillement simple, la torsion simple et la flexion simple.

Cependant, dans un grand nombre de cas, les études peuvent être ramenées à la superposition de plusieurs sollicitations simples. On applique alors le *Principe de Superposition*, à savoir l'addition d'études de systèmes simples. Ceci concerne :

- les actions extérieures.
- Les contraintes.
- Les sollicitations (efforts normaux, tranchants, moments de torsion et fléchissants)
- les déformations.

### 5.2 Flexion déviée

**Définition :** *La flexion déviée ou flexion gauche est un mode de flexion tel que le plan du moment fléchissant ne coïncide pas avec un des axes centraux principaux d'inertie de la section droite.*

D'ordinaire, on réduit la flexion déviée à deux flexions planes; pour cela, les sollicitations agissant dans des plans longitudinaux arbitraires se décomposent en composantes situées dans les plans principaux.

Dans certain cas les chargements en flexion sont inclinés par rapport à l'un des axes principaux, la décomposition de ce chargement en deux composantes parallèle aux axes produit une flexion déviée.

L'étude de la flexion déviée revient à décomposer les sollicitations en deux flexions planes suivant les plans principaux. Dès lors, la résolution est équivalente à "2 fois" ce qui à été fait en flexion simple (figure 5.1).

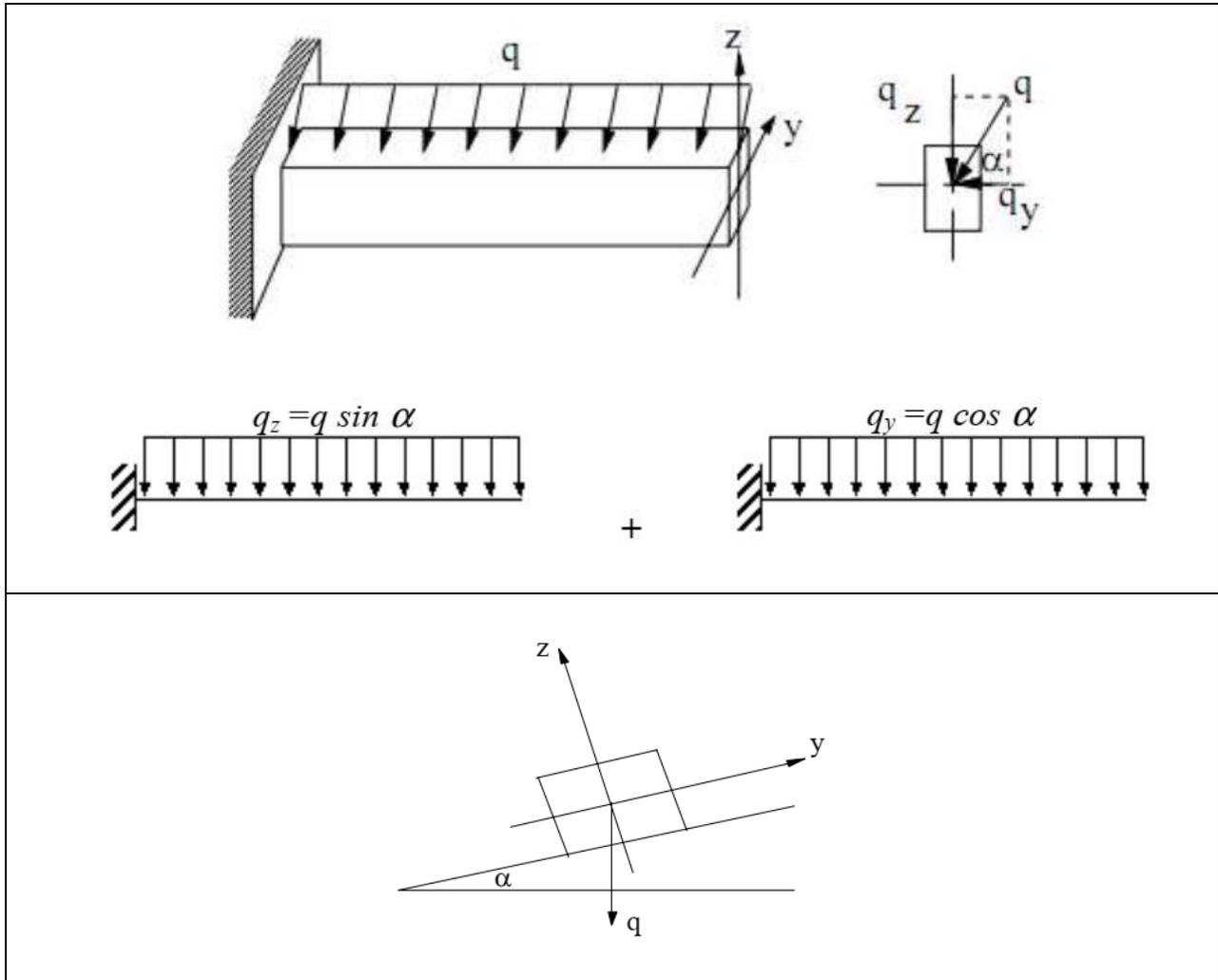


Figure 5.1

### 5.2.1 Calcul des contraintes en flexion déviée

Pour une action simultanée de  $M_y$  et  $M_z$ , les contraintes en un point de coordonnées  $y$  et  $z$  se déterminent par la formule :

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

---

Avec :

$I_y$  et  $I_z$  moments d'inertie principaux de la section droite de la poutre suivant  $y$  et  $z$ ,

$M_y$  et  $M_z$  sont les moments fléchissant par rapport aux axes  $y$  et  $z$  qui sont les composantes du moment fléchissant résultants.

Ce résultat est établi directement en considérant la flexion déviée comme la somme de deux flexions dirigées suivant les axes centraux d'inertie et en appliquant le principe de superposition, où :

$$\begin{aligned}M_z &= M \sin \alpha \\M_y &= M \cos \alpha \\M &= \sqrt{M_z^2 + M_y^2}\end{aligned}$$

où  $M$  est le moment résultant appliqué au plan incliné suivant un angle  $\alpha$  par rapport au plan principal d'inertie  $zy$  de la poutre.

L'expression de la contrainte, en fonction du moment résultant  $M$ , peut alors s'écrire:

$$\sigma = M \left( \frac{\cos \alpha}{I_y} z + \frac{\sin \alpha}{I_z} y \right)$$

On peut alors en déduire la condition de résistance, qui s'écrit :

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left( \frac{\cos \alpha}{I_y} z_{\max} + \frac{\sin \alpha}{I_z} y_{\max} \right) \leq R_{pe}$$

Avec :

$R_{pe}$  : résistance pratique à l'extension.

### 5.2.2 Calcul des déplacements en flexion déviée

Le déplacement vertical  $y$  (la flèche) et la rotation  $\theta$  d'une section quelconque de la poutre en flexion déviée sont définis comme les sommes géométrique des déplacements verticaux et des rotations due aux composantes du moment fléchissant agissant dans les plans principaux de la poutre.

$$y_{zy} = \sqrt{y_z^2 + y_y^2}$$

$$\theta_{zy} = \sqrt{\theta_z^2 + \theta_y^2}$$

On rappelle que :

$$\theta_z = \frac{dy}{dz} \quad \text{et} \quad \theta_y = \frac{dz}{dy}$$

### 5.2.3 Axe neutre en flexion déviée

L'axe neutre est l'ensemble des points pour lesquels la contrainte  $\sigma$  est nulle.

Soit :

$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = 0 \Rightarrow y = -\frac{M_y}{M_z} \frac{I_z}{I_y} z$$

L'axe neutre est alors représenté par une droite passant par le centre de gravité de la section (figure 5.2).

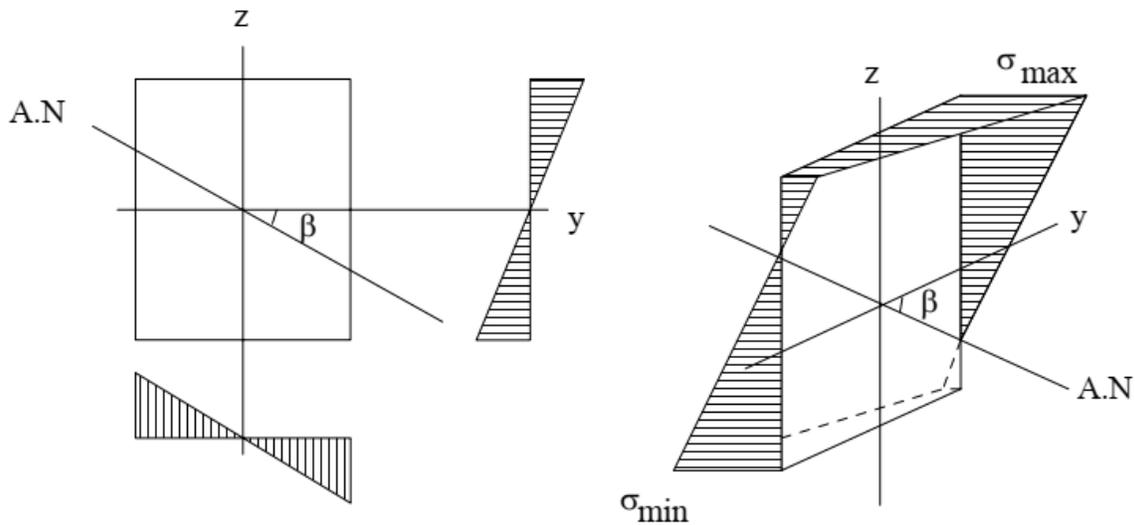


Figure 5.2

En remplaçant  $M_y$  et  $M_z$  par leurs valeurs, on peut écrire :

$$y = -\frac{I_z}{I_y} z \operatorname{tg} \alpha$$

La tangente de l'axe neutre s'écrit alors :

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{I_z}{I_y} \operatorname{ctg} \alpha$$

## 5.3 Flexion composée

**Définition** : La flexion composée est un mode de flexion tel que toute section est soumise à un moment fléchissant (suivant un des axes centraux principaux d'inertie) ainsi qu'à un effort normal appliquée au centre de gravité.

### 5.3.1 Flexion composée avec traction ou compression

C'est le cas général d'une poutre soumise à des chargements transversaux et longitudinaux, ou en une section donnée, les efforts internes  $M_z$ ,  $M_y$ ,  $V_x$ ,  $V_y$  ainsi que  $N$  sont présents (figure 5.3).

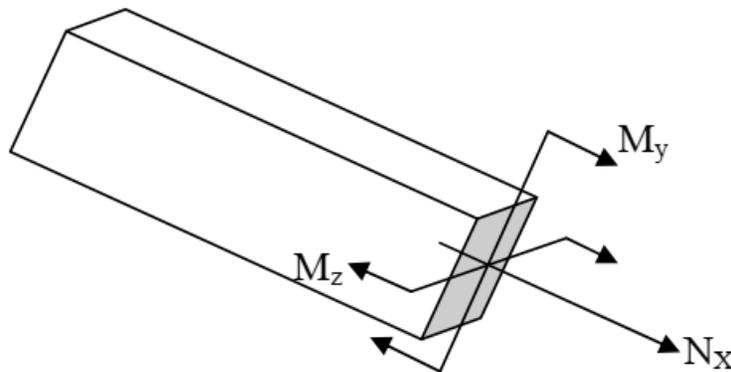


Figure 5.3

En négligeant le cisaillement ( $V_x=V_y=0$ ) et en appliquant le principe de superposition, on peut déterminer la contrainte normale globale en un point quelconque de la section normale par:

$$\sigma = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

---

Pour une section symétrique, la condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{N_x}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y_{\max} \pm \frac{M_y}{I_y} z_{\max} \leq R_{pe}$$

### 5.3.2 Flexion composée avec traction ou compression excentrée

La flexion composée peut être aussi le résultat de l'action d'une force longitudinale excentrée par rapport à l'axe moyen de la poutre. On rencontre ce cas de chargement généralement dans les éléments courts sollicités par une force excentrée dont les coordonnées du point d'application sont  $y_p, z_p$  (figure 5.4).

Les efforts internes en une section quelconque sont :

$$\begin{aligned} N_x &= P \\ M_z &= P \cdot y_p \\ M_y &= P \cdot z_p \end{aligned}$$

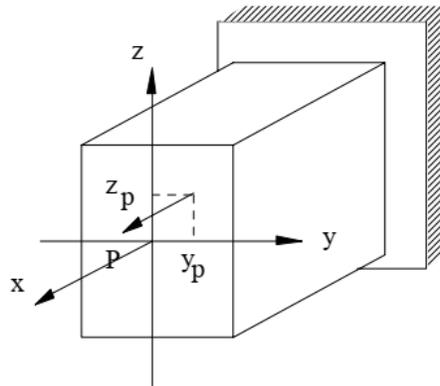


Figure 5.4

D'où les contraintes en un point dans la section :

$$\sigma = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

Cette expression de la contrainte globale en flexion composée peut être écrite sous la forme:

---


$$\sigma = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{A M_z}{P I_z} y + \frac{A M_y}{P I_y} z \right]$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \left[ 1 + y_P \frac{A}{I_z} y + z_P \frac{A}{I_y} z \right]$$

En posant :

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

On obtient finalement :

$$\sigma = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{z_P}{i_y^2} z + \frac{y_P}{i_z^2} y \right]$$

Pour un effort normal excentré, la condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[ 1 \pm \frac{z_P}{i_y^2} z_{\max} \pm \frac{y_P}{i_z^2} y_{\max} \right] \leq R_{pe}$$

### 5.3.3 Axe neutre en flexion composée

L'axe neutre est l'ensemble des points pour lesquels la contrainte  $\sigma$  est nulle.

Soit :

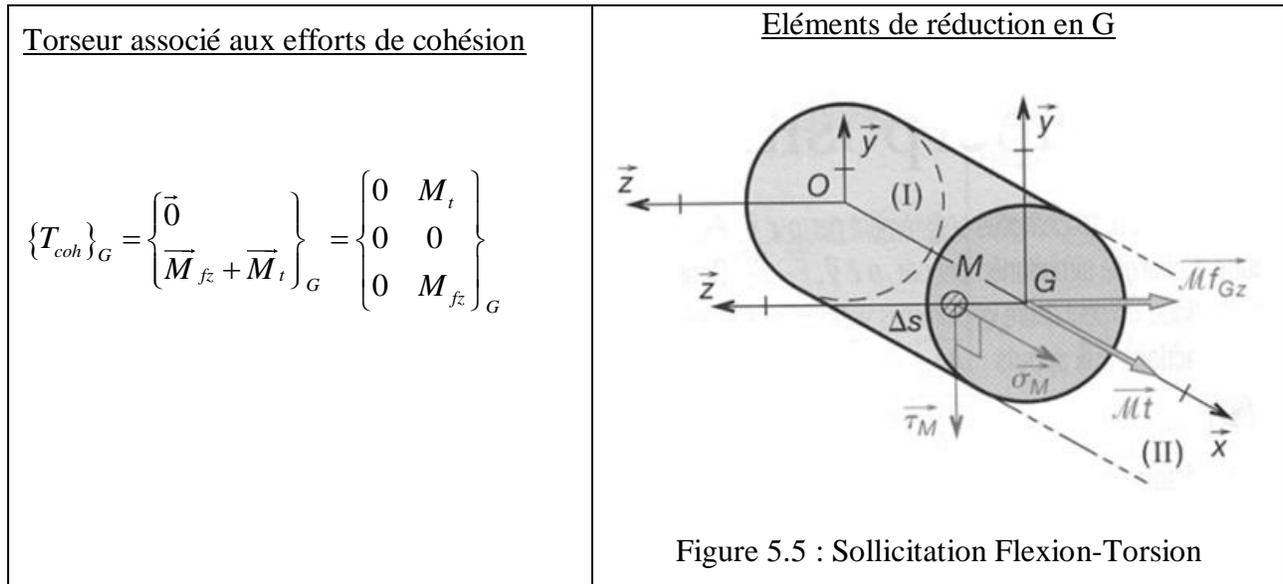
$$\sigma = 0 \Rightarrow 1 + \frac{z_P}{i_y^2} z + \frac{y_P}{i_z^2} y = 0$$

A partir de cette dernière équation, on peut voir que l'axe neutre en flexion composée coupe les axes  $z$  et  $y$  aux points :

$$\left( y = 0, \quad z = -\frac{i_y^2}{z_P} \right) \quad \text{et} \quad \left( z = 0, \quad y = -\frac{i_z^2}{y_P} \right)$$

## 5.4 Flexion – Torsion

**Définition :** un arbre est soumis à une sollicitation de flexion-torsion si le torseur associé aux efforts de cohésion peut se réduire en G, barycentre de la section droite S, à un moment de torsion et à un moment de flexion (figure 5.5).



### 5.4.1 Moment de flexion idéal

Un cas extrêmement courant en mécanique est le calcul d'arbre de machine. Dans la plupart des cas, l'arbre sera soumis à de la flexion (et donc aussi au cisaillement) et à de la torsion. Le cisaillement étant négligeable, nous nous trouvons devant un cas de sollicitations combinées de flexion et de torsion.

Pour faire les calculs dans ce cas là, on considère l'arbre comme simplement fléchi sous l'action d'un moment de flexion appelé **moment de flexion idéal**. La contrainte normale est alors déduite à partir du moment idéal de flexion défini par la formule suivante :

$$Mf_i = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) \cdot Mf + \frac{1}{2\lambda} \sqrt{Mf^2 + Mt^2}$$

Avec :

$Mf_i$  : Moment idéal de flexion [N.mm]

---

$Mf$  : Moment de flexion [N.mm]

$Mt$  : Moment de torsion [N.mm]

$\lambda = R_{pg}/R_{pe}$  ; pour les aciers  $\lambda=0.5$ , pour les fontes  $\lambda=1$

### 5.4.2 Condition de résistance

La condition de résistance d'un arbre sollicité à la flexion-torsion s'écrit :

$$|\sigma_M|_{\max} \leq R_{pe}$$

$\sigma_M$  est déterminée à partir du moment idéal de flexion, donc :

$$|\sigma_M|_{\max} = \frac{Mf_i}{I_{Gz}} |y|_{\max} \leq R_{pe}$$

### 5.4.3 Déformations

- Pour le calcul des flèches verticales, partir de la sollicitation de flexion supposée seule, et vérifier ensuite que cette flèche est acceptable :

$$|f|_{\max} \leq f_{\lim}$$

- Pour le calcul des angles de torsion, partir de la sollicitation de torsion supposée seule, et vérifier ensuite que cet angle est acceptable :

$$|\theta|_{\max} \leq \theta_{\lim}$$

---

---

**CHAPITRE 6**  
**RÉSOLUTION DES SYSTÈMES**  
**HYPERSTATIQUES**

---

---

## CHAPITRE 6    RÉSOLUTION DES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES

### 6.1 Généralités

Considérons une structure soumise à l'action d'un système de forces dans l'espace tridimensionnel  $(x, y, z)$  (figure 6.1).

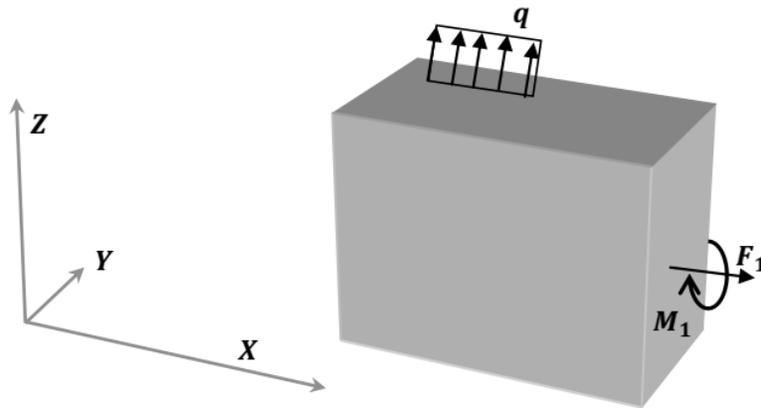


Figure 6.1

L'équilibre de la structure s'écrit, en utilisant les équations d'équilibre de la statique, comme suit :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & \sum M_{/x} &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & \sum M_{/y} &= 0 \\ \sum F_z &= 0 & \sum M_{/z} &= 0\end{aligned}$$

Les sommations se rapportent à toutes les composantes de forces et de moments par rapport aux trois axes de référence  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Nous pouvons donc écrire 6 équations d'équilibre dans le cas général d'un corps tridimensionnel.

**Remarque :**

Dans le cas plan, le système d'équations ci-dessus se réduit à trois équations d'équilibre, qui s'écrivent dans le plan  $(x, y)$  :

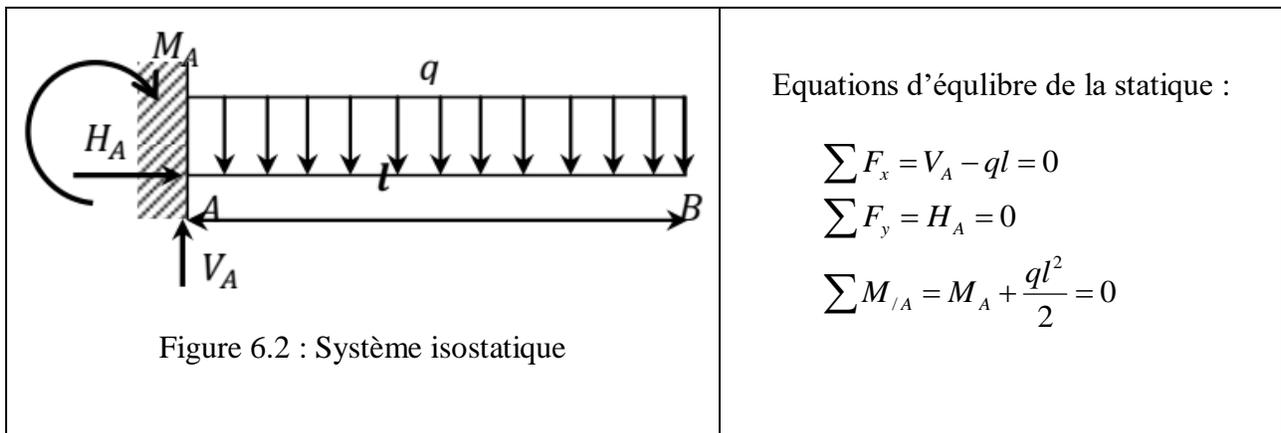
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_{/z} = 0$$

– **Système isostatique :**

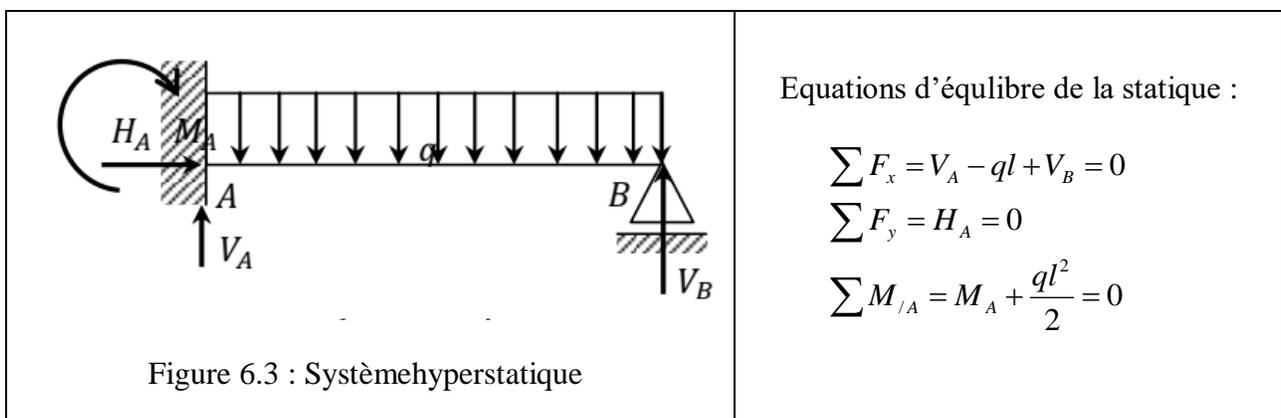
Un système est dit *isostatique* (figure 6.2), si les composantes de réaction peuvent être déterminées au moyen des équations d'équilibre de la statique seules, i.e. :



Nous avons un système de trois équations (les trois équations d'équilibre de la statique) avec trois inconnues (les réactions à l'encastrement :  $H_A$ ,  $V_A$  et  $M_A$ ) qui peuvent être déterminées facilement.

– **Système hyperstatique :**

Un système est dit *hyperstatique* lorsque le nombre d'équations d'équilibre de la statique est insuffisant pour déterminer l'ensemble des réactions d'appui (Figure 6.3) :



---

Nous avons un système de trois équations (les trois équations d'équilibre de la statique) avec quatre inconnues (les réactions à l'encastrement :  $H_A$ ,  $V_A$ ,  $V_B$  et  $M_A$ ); il manque donc une équation pour calculer les réactions d'appuis. On dit que le système est une fois hyperstatique.

On définit ainsi le *degré d'hyperstaticité* d'un système comme la valeur qui donne le nombre d'inconnus supplémentaires, i.e., le nombre d'inconnues surabondantes par rapport au 3 équations d'équilibre de la statique

– **Degré d'hyperstaticité :**

Soit  $P$  le nombre de réactions inconnues et  $N$  le nombre d'équations d'équilibre (lois fondamentales).

Si  $P-N=0$  : l'équilibre est dit *isostatique*

Si  $P-N=1$  : l'équilibre est dit *hyperstatique d'ordre 1*

Si  $P-N=n$  : l'équilibre est dit *hyperstatique d'ordre n*

## 6.2 Méthodes de résolution des problèmes hyperstatiques

Nous avons vu précédemment qu'un système est hyperstatique si le nombre d'inconnues de liaison est supérieur au nombre d'équations issues de la statique. Cette différence est appelée le degré d'hyperstaticité du système.

Pour étudier et analyser une structure de degré d'hyperstaticité  $n$ , il est nécessaire d'établir des équations supplémentaires (dites équations de compatibilités). Les méthodes consistent à choisir un système de base à partir duquel on détermine le système isostatique le plus simple auquel on ajoute ( $n$ ) équations supplémentaires pour calculer toutes les inconnues, soit :

Système hyperstatique d'ordre  $n$  = Système isostatique + ( $n$ ) équations supplémentaires pour calculer toutes les inconnues.

Plusieurs méthodes permettent de résoudre ces problèmes hyperstatiques.

### 6.2.1 Méthode des paramètres initiaux

Nous allons illustrer cette méthode à partir de l'étude d'un exemple.

---

**Exemple :**

Considérons une poutre simplement appuyée en A et encastrée en B. Elle porte une charge répartie (triangulaire) sur toute sa longueur  $L$  (Figure 6.4).

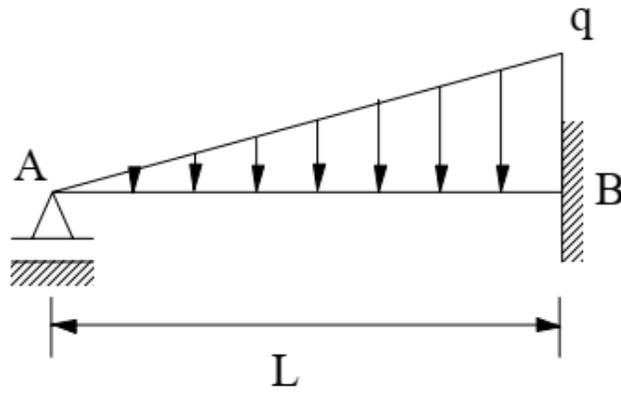


Figure 6.4

La poutre possède quatre réactions inconnues à calculer :

- La réaction  $R_A$  en A,
- Les réactions  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$  et le moment d’encastrement  $M_B$  en B.

Soit :

$$P-N=4-3=1$$

Le système est donc hyperstatique d’ordre  $n=1$ .

La méthode de résolution consiste à écrire les équations de la déformée en fonction de la réaction  $R_A$  au point A, en utilisant la méthode des paramètres initiaux vue au chapitre 3.

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 - R_A \frac{x^2}{2} + \frac{q}{L} \frac{x^4}{24}$$
$$EIy(x) = EIy_0 + EI\theta_0 x - R_A \frac{x^3}{6} - \frac{q}{L} \frac{x^3}{120}$$

Pour déterminer les paramètres initiaux,  $\theta_0$  et  $y_0$ , ainsi que la réaction  $R_A$ , écrivons les trois conditions aux limites (appuis) du système :

- $y(0)=0$

- 
- $y(L)=0$
  - $\theta(L)=0$

$$y(0) = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow EIy(L) = 0 \Rightarrow EI\theta_0 L - R_A \frac{L^3}{6} + \frac{qL^4}{120} = 0$$

$$\theta(L) = 0 \Rightarrow EI\theta_0 - R_A \frac{L^2}{2} + \frac{qL^3}{24} = 0$$

D'où :

$$R_A = \frac{qL}{10}$$

$$\theta_0 = \frac{qL}{120EI}$$

On peut ainsi déterminer les expressions de l'effort tranchant et du moment fléchissant :

$$V(x) = \frac{qL}{10} - \frac{q}{2L} x^2$$

$$M_f(x) = \frac{qL}{10} x - \frac{q}{6L} x^3$$

### 6.2.2 Méthode de superposition

Dans le cadre linéaire (petites déformations, petits déplacements et élasticité linéaire), le problème hyperstatique peut être décomposé en problèmes isostatiques dont les solutions sont connues. Ensuite, par application du *principe de superposition*, la flèche du problème initial est déterminée.

Considérons, par exemple, la poutre hyperstatique d'ordre 1 (Figure 6.5) ; la liaison surabondante est représentée en pointillés.

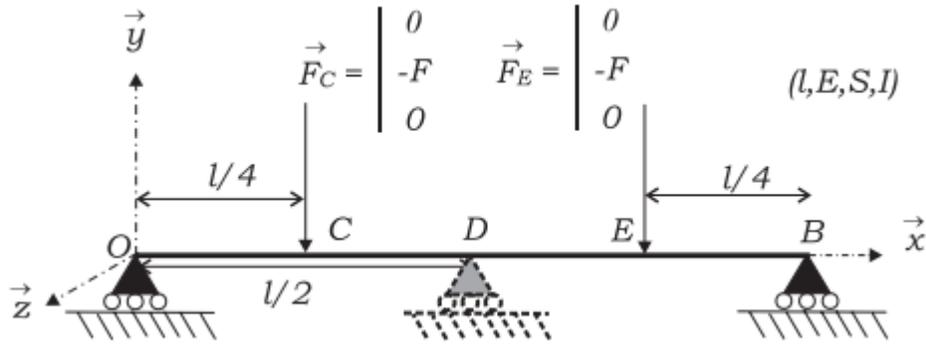


Figure 6.5

La poutre hyperstatique de la figure 6.5 peut être décomposée en deux problèmes isostatiques de solution connue (Figure 6.6).

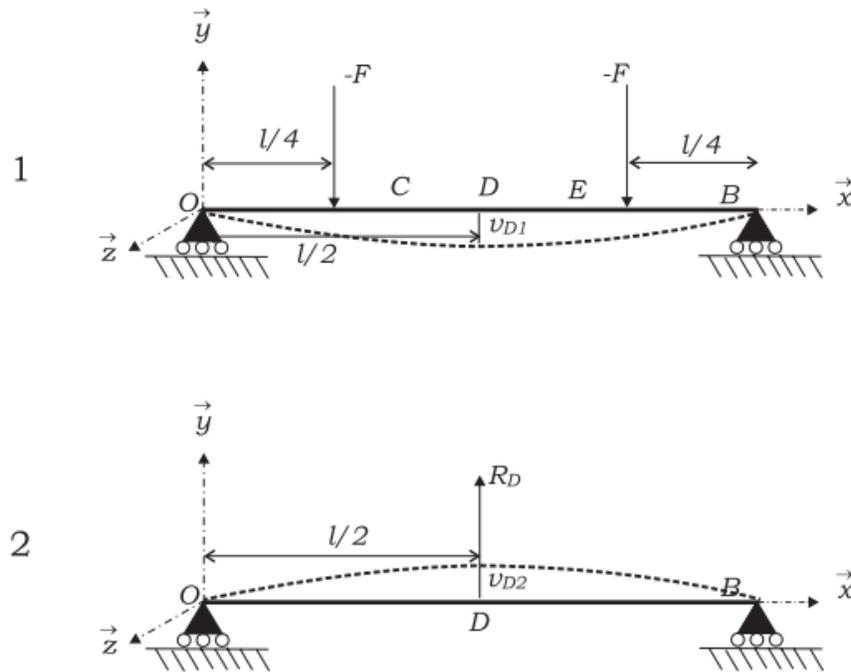


Figure 6.6

On superpose une poutre soumise à de la flexion quatre points (Figure 6.6-1), et la même poutre en flexion trois points soumise à un effort central d'intensité (Figure 6.6-2)  $R_D$  égal à la réaction produite par l'appui central du problème initial. La flèche totale étant la superposition de ces deux problèmes, le déplacement au centre doit être nul pour satisfaire la condition cinématique

---

imposée par l'appui central. Cette condition conduit finalement à une relation permettant de déterminer l'effort de réaction, et donc par suite d'expliciter les moments et donc les flèches.

En posant :

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = v_D$$
$$v_D = v_{D1} + v_{D2} = 0$$

Le calcul des flèches  $v_{D1}$  et  $v_{D2}$  par l'une des méthodes vues au chapitre 3, donne :

$$v_{D1} = -\frac{11Fl^3}{384EI}$$
$$v_{D2} = \frac{R_D l^3}{48EI}$$

Ce qui donne finalement :

$$R_D = \frac{11F}{8}$$

### 6.2.3 Méthode des forces

#### 6.2.3.1 Principe Méthode des forces

La méthode des forces s'appuie principalement sur le *principe de superposition*. Avec cette méthode, on prend comme inconnues les forces dans les liaisons surabondantes. Les liaisons surabondantes sont supprimées et remplacées par des forces inconnues qu'il faut chercher. La structure initiale (hyperstatique) est transformée en une structure isostatique soumise aux charges extérieures de départ et aux forces introduites (les inconnues hyperstatiques).

Les équations supplémentaires qui permettent de déterminer les forces inconnues sont obtenues en exprimant la "continuité" de la structure déformée dans les liaisons supprimées (surabondantes). Ces conditions supplémentaires de déformation se nomment "conditions de compatibilité cinématiques".

Comme il y a plusieurs possibilités de rendre isostatique un système hyperstatique, il en résulte plusieurs façons de mettre le problème en équations. Pour la simplification des calculs, il y a intérêt à considérer les liaisons surabondantes qui rendent les équations générales de continuité aussi simples que possible.

### 6.2.3.2 Résolution d'un problème hyperstatique par la méthode des forces

Nous allons illustrer les différentes étapes de la méthode, à travers un exemple simple.

Considérons la poutre encadrée en A simplement appuyée en B, chargée à mi-portée par une charge concentrée  $P$  (Figure 6.7).

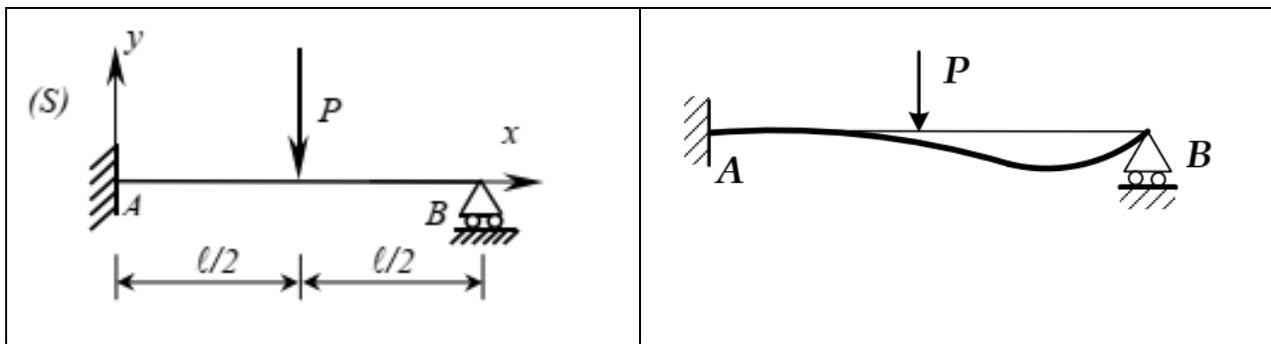


Figure 6.7

#### 1. Détermination du degré d'hyperstaticité :

$$d^{\circ}h = n = (3 \cdot l_3 + 2 \cdot l_2 + 1 \cdot l_1) - 3 \cdot b$$

Avec :

$l_1$ : liaisons appuis simples

$l_2$ : liaisons articulations (appuis doubles)

$l_3$ : liaisons encastremets

$b$  : nombre de barres

Si:

$d^{\circ}h > 0$ : système hyperstatique.

$d^{\circ}h = 0$ : système isostatique.

---

$d^{\circ}h < 0$ : système hypostatique (mécanisme).

En appliquant à l'exemple étudié, on aura :

1 liaison encastrement : 3 inconnues ( $l_3=3$ ).

0 liaison articulation : 0 inconnues ( $l_2=0$ ).

1 liaison appui simple : 1 inconnue ( $l_1=1$ ).

1 barre : 3 équations ( $b=1$ ).

$$d^{\circ}h = n = (3 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 1) - 3 \times 1 = 1$$

La structure est hyperstatique de degré 1

## 2. Recherche de structures isostatiques associées :

Soit une structure hyperstatique ( $S$ ) de degré d'hyperstaticité  $n$ , soumise à un chargement initial  $X_0$  connu. On peut rendre ( $S$ ) équivalente à une structure isostatique en pratiquant  $n$  coupures et en introduisant  $n$  forces inconnues ( $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$ ). Cette nouvelle structure est dite *structure isostatique associée* ( $S$ ) qu'on note ( $S_0$ ).

Pour une structure hyperstatique, il existe plusieurs structures isostatiques associées.

Dans l'exemple étudié, on propose la structure isostatique associée, ( $S_0$ ), ci-dessous (Figure 6.8).

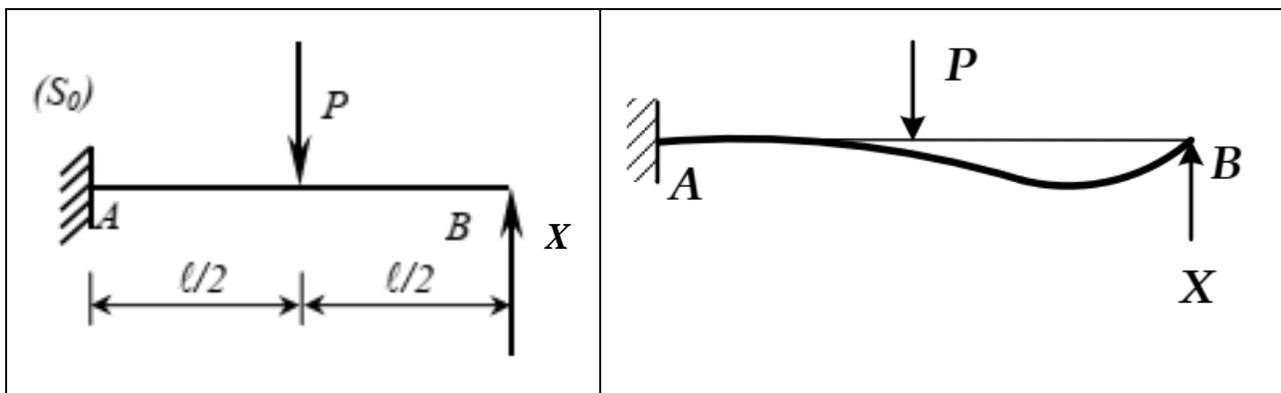


Figure 6.8

Dans la structure ( $S_0$ ), on a éliminé l'appui simple en B et on a introduit la réaction correspondante  $X$  ( $X=R_B$  : réaction de l'appui B).

## 3. Application du principe de superposition :

On applique le principe de superposition sur la structure isostatique associée ( $S_0$ ) en décomposant suivant les différents chargements (chargement extérieur connu  $X_0$  et les chargements inconnus  $X_i$ ) sous forme de somme de plusieurs structures dont chacune est soumise à un seul chargement. Dans l'exemple étudié, on a (Figure 6.9):

$$(S_0) = (S_1) + (S_2)$$

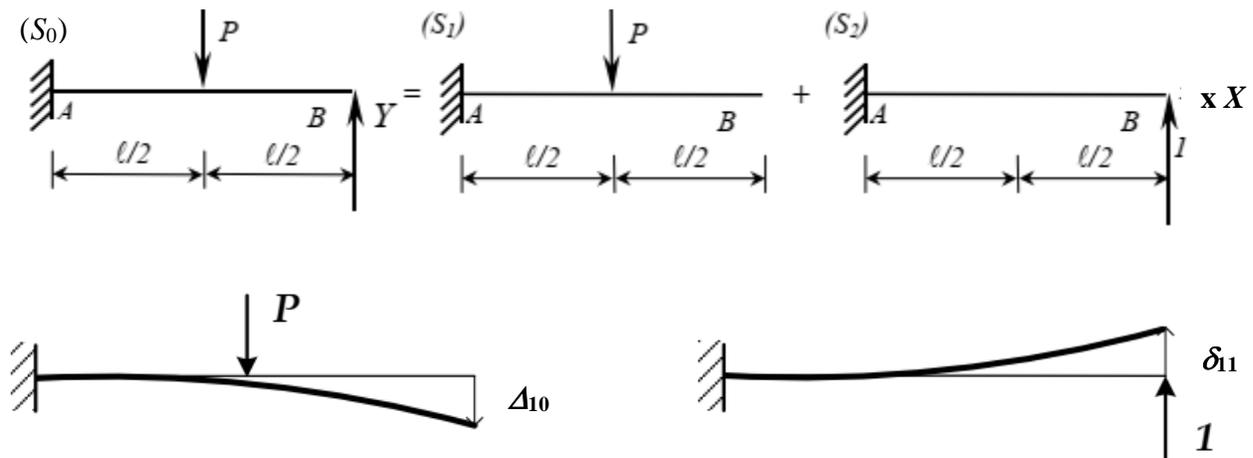


Figure 6.9

Avec :

$X$  : la réaction d'appui en B (l'inconnu du problème) ;

$\Delta_{10}$ : le déplacement en B sous l'effet de la charge externe dans la structure isostatique associée;

$\delta_{11}$ : le déplacement en B sous l'effet d'une charge unité appliquée au droit de la coupure dans la structure isostatique associée.

#### 4. Conditions de déplacements (et rotations) :

On exprime les conditions de déplacements (et rotations) pour que la structure isostatique associée soit identique à la structure initiale (S).

Ce déplacement est ensuite exprimé à partir des structures de la décomposition par le principe de superposition.

---

Dans l'exemple étudié, la condition de compatibilité cinématique doit exprimer le fait que le déplacement en B est nul, soit :

$$\Delta_B = 0 = \Delta_{10} + \delta_{11} \cdot X$$

### 5. Calcul des déplacements (et rotations):

Le calcul des déplacements (et des rotations)  $\Delta_{ij}$  et  $\delta_{ij}$  passe par l'étude des différentes structures de la décomposition par le principe de superposition.

Le plus souvent, on néglige les travaux de déformations dues au travail de l'effort normal et au travail de l'effort tranchant devant le travail du moment fléchissant (cas courant où cette hypothèse n'est pas faite; barre bi-articulée).

En appliquant *le théorème de la charge unité*, on calcule chaque déplacement (et rotation).

**Théorème de la charge unité** : Soit  $\Delta$  le déplacement en P selon la normale  $\vec{n}$  d'une poutre de longueur L; on applique une force virtuelle d'intensité égale à 1 en P selon  $\vec{n}$  pour déterminer  $\Delta$ . Selon le Principe des travaux virtuels (PTV) et en négligeant l'effet de N et V, on peut écrire :

$$\Delta_{ij} = \int \frac{M_i \overline{M}_j}{EI} dx$$

Avec :

$M_i$  : Moment fléchissant dû aux charges externes dans la structure isostatique associée

$\overline{M}_j$  : Moment fléchissant dû à une charge unité.

Dans l'exemple étudié, on néglige les déformations dues au travail de l'effort tranchant devant les déformations dues au travail du moment fléchissant.

On obtient pour les diagrammes des moments fléchissants (Figure 6.10) :

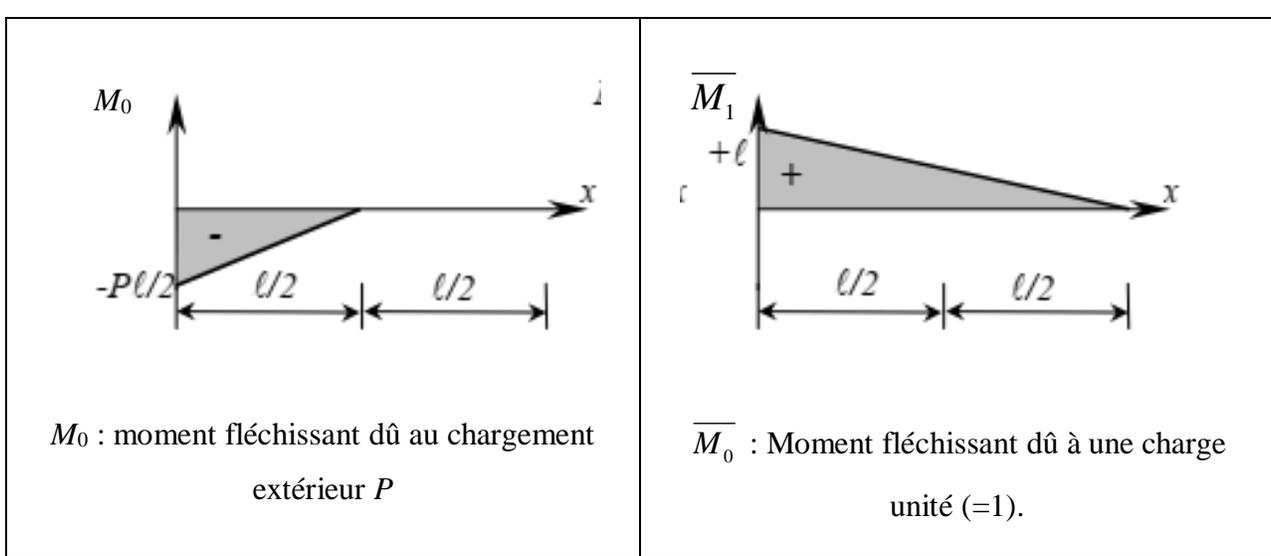


Figure 6.10

En utilisant le *théorème de la charge unité*, on trouve :

$$\Delta_{10} = \int_0^l \frac{M_0 \overline{M}_1}{EI} dx = -\frac{5Pl^3}{48EI}$$

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EI} dx = \frac{l^3}{3EI}$$

### 6. Résolution du système:

La résolution du système peut se faire par substitution ou par combinaison linéaire entre les équations du système.

Dans l'exemple étudié, le système d'équations se résume à une seule équation :

$$\Delta_B = 0 = \Delta_{10} + \delta_{11} \cdot X$$

D'où

$$X = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-5Pl^3}{48EI} \cdot \frac{3EI}{l^3} = +\frac{5P}{16}$$

### 7. Résolution de la structure:

Connaissant les inconnues hyperstatiques, il suffit d'écrire les équations d'équilibre de la structure hyperstatique initiale afin de déterminer les réactions et moments au niveau des appuis.

Le but étant de déterminer le torseur des efforts internes dans toute la structure ( $N$ ,  $V$  et  $M_f$  pour une structure plane) pour dimensionner ou vérifier les différentes sections.

Dans l'exemple étudié, l'inconnue hyperstatique  $X$  étant déterminée précédemment, les réactions et le moment d'encastrement au niveau de l'appui A ont pour valeurs:

$$\begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} = P - \frac{5P}{16} = \frac{11P}{16} \\ M_A = +P \cdot \frac{l}{2} - \frac{5P}{16} \cdot l = +\frac{3Pl}{16} \end{cases}$$

D'où les diagrammes d'effort tranchant et de moment fléchissant (Figure 6.11):

