Chapitre 1

Notions de logique

Chapitre 2

Ensembles et Applications

2.1 Ensembles

2.1.1 Définitions et notations

Un ensemble $\mathbf{E}$ est une collection d'objets tous distincts rassemblés d'après une propriété commune. Ces objets sont appelés éléments de $\mathbf{E}$. Un élément x appartenant à $\mathbf{E}$, se note $x \in \mathbf{E}$, sinon $x \notin \mathbf{E}$.

- Certains ensembles auront un nombre fini d'éléments, et seront appelés : ensembles finis.
- Un ensemble peut-être écrit :
  - i) **En extension** : On donne la liste de ses éléments. Par exemple : $\mathbf{E} = \{0, 3, 5, 9\}$, $\mathbf{E}$ ensemble des étudiants de première année MI.
  - ii) **En compréhension** : On donne la ou les propriétés qui caractérisent ses éléments. $\mathbf{E} = \{x |\ x \text{ vérifie la propriété } \ P(x)\}$.
- Le nombre d'éléments de $\mathbf{E}$ est appelé cardinal de $\mathbf{E}$, on le note par $Card(\mathbf{E})$.

Exemple 2.1.
- *Ensemble des entiers naturels* $\mathbb{N}$.
- *Ensemble des entiers relatifs* $\mathbb{Z}$.
- *Ensemble des rationnels* $\mathbb{Q}$.
- *Ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$.
- *Ensembles des nombre complexe* $\mathbb{C}$.
- *L'ensemble qui n'a aucun élément, est appelé ensemble vide, on le note* $\emptyset$.

- *Tout ensemble de la forme* $\mathbf{E} = \{x\}$, *est appelé singleton.*

2.1.2 Sous ensembles

On dit que $\mathbf{F}$ est un sous ensemble de $\mathbf{E}$ et on note $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$, si tout élément de $\mathbf{F}$ appartient à $\mathbf{E}$.

On dit aussi que $\mathbf{F}$ est une partie de $\mathbf{E}$. On écrit

$\mathbf{F} \subset \mathbf{E} \Longleftrightarrow \forall x,\ (x \in \mathbf{F}) \Longrightarrow (x \in \mathbf{E})$.

$\mathbf{F} \not\subset \mathbf{E} \Longleftrightarrow \exists x, (x \in \mathbf{F})$ et $(x \notin \mathbf{E})$.

Exemple 2.2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Ensemble des parties d'un ensemble

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble, on note par $\mathcal{P}(\mathbf{E})$, l'ensemble des parties de $\mathbf{E}$. On écrit :

$\mathcal{P}(\mathbf{E}) = \{A,\ \ A \subset \mathbf{E}\}$.

Remarque 2.1.

1. $A \in \mathcal{P}(\mathbf{E}) \Longleftrightarrow A \subset \mathbf{E}$
2. $\{x\} \in \mathcal{P}(\mathbf{E}) \Longleftrightarrow x \in \mathbf{E} \Longleftrightarrow \{x\} \subset \mathbf{E}$.
3. $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$, ($\mathcal{P}(\mathbf{E})$ n'est pas vide même si $\mathbf{E}$ est vide).
4. $\mathbf{E} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$.

Exemple 2.3. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\quad \mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

De manière générale : si $Card(\mathbf{E}) = n$, *alors* $Card(\mathcal{P}(\mathbf{E})) = 2^n$. *(Démonstration par récurrence sur* n*).*

Egalité de deux ensembles

Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ deux ensembles.

$\mathbf{E} = \mathbf{F} \Longleftrightarrow (\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$ et $\mathbf{F} \subset \mathbf{E})$

$\mathbf{E} \neq \mathbf{F} \Longleftrightarrow (\mathbf{E} \not\subset \mathbf{F}$ ou $\mathbf{F} \not\subset \mathbf{E})$

2.1.3 Opérations sur $\mathcal{P}(\mathbf{E})$

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$. On définit les parties suivantes de $\mathbf{E}$.

- Complémentaire de A dans $\mathbf{E}$: $\complement_{\mathbf{E}}A = \{x \in \mathbf{E},\ x \notin A\}$.
- Réunion de A et B : $A \cup B = \{x \in \mathbf{E}, (x \in A) \vee (x \in B)\}$.
- Intersection de A et B : $A \cap B = \{x \in \mathbf{E}, (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.
- Différence A moins B : $A \setminus B = \{x \in \mathbf{E}, (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.
- Différence symétrique de A et B : $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Ensembles disjoints

Deux ensembles $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ sont disjoints si et seulement si $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} = \emptyset$.

2.1.4 Propriétés

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$

1. $\complement_{\mathbf{E}}\emptyset = \mathbf{E}$, $\complement_{\mathbf{E}}\mathbf{E} = \emptyset$, $\complement_{\mathbf{E}}(\complement_{\mathbf{E}}A) = A$.
2. $A \cup B = B \cup A$, $\quad A \cup \emptyset = A$, $\quad A \cup A = A$, $\quad A \cup \mathbf{E} = \mathbf{E}$,
   $A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B$, $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $A \cap B = B \cap A$, $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$, $\quad A \cap A = A$, $\quad A \cap \mathbf{E} = A$,
   $A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B$, $\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $\quad (A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A = B$
   $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C$
4. $\complement_{\mathbf{E}}(A \cup B) = \complement_{\mathbf{E}}A \cap \complement_{\mathbf{E}}B$, $\quad A \cap \complement_{\mathbf{E}}A = \emptyset$, $\quad \complement_{\mathbf{E}}(A \cap B) = \complement_{\mathbf{E}}A \cup \complement_{\mathbf{E}}B$, $\quad A \cup \complement_{\mathbf{E}}A = \mathbf{E}$,
   $A \subset B \Longleftrightarrow \complement_{\mathbf{E}}B \subset \complement_{\mathbf{E}}A$.
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$
6. $\complement_{\mathbf{E}}A = \mathbf{E} \setminus A$, $\quad A \setminus \emptyset = A$, $\quad A \setminus B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subset B$, $\quad A \setminus B = A \cap \complement_{\mathbf{E}}B = A \setminus (A \cap B)$
7. $A\Delta B = B\Delta A$, $\quad A\Delta\emptyset = A$, $\quad A\Delta A = \emptyset$, $\quad A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Preuve. Montrons la 4$^{\text{ème}}$ propriété $\complement_{\mathbf{E}}(A \cup B) = \complement_{\mathbf{E}}A \cap C_{\mathbf{E}}^{B}$ (il suffit de démontrer la double inclusion).

a) $\complement_{\mathbf{E}}(A \cup B) \subset \complement_{\mathbf{E}}A \cap \complement_{\mathbf{E}}B$?

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x \in \complement_{\mathbf{E}}(A \cup B) &\Longrightarrow x \in \mathbf{E} \text{ et } x \notin A \cup B \\
&\Longrightarrow x \in \mathbf{E} \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \\
&\Longrightarrow (x \in \mathbf{E} \text{ et } x \notin A) \text{ et } (x \in x \notin B) \\
&\Longrightarrow (x \in \complement_{\mathbf{E}}A) \text{ et } (x \in \complement_{\mathbf{E}}B) \\
&\Longrightarrow x \in \complement_{\mathbf{E}}^{A} \cap \complement_{\mathbf{E}}B.
\end{aligned}$$

b) $\complement_{\mathbf{E}}A \cap \complement_{\mathbf{E}}B \subset \complement_{\mathbf{E}}(A \cup B)$?

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x \in \complement_{\mathbf{E}}A \cap \complement_{\mathbf{E}}B &\Longrightarrow (x \in \complement_{\mathbf{E}}A)\text{et } (x \in \complement_{\mathbf{E}}B) \\
&\Longrightarrow (x \in \mathbf{E} \text{ et } x \notin A) \text{ et } (x \in \mathbf{E} \text{ et } x \notin B) \\
&\Longrightarrow x \in \mathbf{E} \text{ et } x \notin (A \cup B) \\
&\Longrightarrow x \in \complement_{\mathbf{E}}(A \cup B).
\end{aligned}$$

$\square$

Partition d'un ensemble

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble, $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbf{E}$ constituent une partition de $\mathbf{E}$ si et seulement si $A_i \neq \emptyset, \forall i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j, \quad$ et $\quad \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \mathbf{E}$.

Exemple 2.4. *Soit* $\mathbf{E} = \{1, 2, 3, 4\}, A_1 = \{1\}, \ A_2 = \{2, 3\}$ *et* $A_3 = \{4\}$ *constituent une partition de* $\mathbf{E}$.
$A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{3, 4\}$ *est une autre partition de* $\mathbf{E}$.

2.1.5 Produit cartésien de deux ensembles

Définitions

Soit $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ deux ensembles décrits respectivement par l'élément x et y.
On appelle **couple** ou **doublet**, un élément tel que :$(x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow (x = x' \wedge y = y')$ ou par négation : $(x, y) \neq (x', y') \Longleftrightarrow (x \neq x' \vee y \neq y')$. x : est la première coordonnée et

y est la deuxième coordonée de (x, y).

On appelle **produit cartésien** de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ l'ensemble noté par $\mathbf{E}\times\mathbf{F}$ décrit par les couples (x, y), où $x \in \mathbf{E}$ et $y \in \mathbf{F}$.

$\mathbf{E}\times\mathbf{F} = \{(x, y) : x \in \mathbf{E} \text{ et } \ y \in \mathbf{F}\}$.

Remarque 2.2. Soient $x \in \mathbf{E}$ et $y \in \mathbf{F}$ alors

$(x, y) \in \mathbf{E}\times\mathbf{F}$, $\{x, y\} \in \mathcal{P}(\mathbf{E}\cup\mathbf{F})$, $\{x, y\} = \{y, x\}$,

$(x, y) \in \mathbf{E}\times\mathbf{F}$ et $(y, x) \in \mathbf{F}\times\mathbf{E}$.

Si $\mathbf{E} = \mathbf{F}$, on écrit $(x, y) \in \mathbf{E}\times\mathbf{E} = \mathbf{E}^2$.

Exemple 2.5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$.

$[0, 1]\times\mathbb{R} = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ y \in \mathbb{R}\}$.

$\{1, 2\}\times\{0, 1, 2\} = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$.

Propriétés

Soient $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ des ensembles.

1. $\mathbf{E}\times\mathbf{F} = \emptyset \Longleftrightarrow (\mathbf{E} = \emptyset \vee \mathbf{F} = \emptyset)$.
2. $\mathbf{E}\times(\mathbf{F}\cap\mathbf{G}) = (\mathbf{E}\times\mathbf{F})\cap(\mathbf{E}\times\mathbf{G})$.
3. $\mathbf{E}\times(\mathbf{F}\cup\mathbf{G}) = (\mathbf{E}\times\mathbf{F})\cup(\mathbf{E}\times\mathbf{G})$.
4. $(A \subset \mathbf{E} \text{ et } B \subset \mathbf{F}) \Longrightarrow A\times B \subset \mathbf{E}\times\mathbf{F}$.
5. $(\mathbf{G} \neq \emptyset, \mathbf{E}\times\mathbf{G} = \mathbf{F}\times\mathbf{G}) \Longrightarrow \mathbf{E} = \mathbf{F}$
6. $\mathbf{E}\times\mathbf{F}\times\mathbf{G} = (\mathbf{E}\times\mathbf{F})\times\mathbf{G} = \mathbf{E}\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$.
7. $(\mathbf{E}\times\mathbf{G})\cap(\mathbf{F}\times\mathbf{H}) = (\mathbf{E}\cap\mathbf{F})\times(\mathbf{G}\cap\mathbf{H})$.

Preuve. Démontrons la dernière propriété.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}\times\mathbf{G})\cap(\mathbf{F}\times\mathbf{H}) &= \{(x, y) : (x, y) \in \mathbf{E}\times\mathbf{G} \text{ et } \ (x, y) \in \mathbf{F}\times\mathbf{H}\} \\
&= \{(x, y) : (x \in \mathbf{E} \wedge y \in \mathbf{G}) \text{ et } \ (x \in \mathbf{F} \wedge y \in \mathbf{H})\} \\
&= \{(x, y) : (x \in \mathbf{E} \wedge x \in \mathbf{F}) \text{ et } (y \in \mathbf{G} \wedge y \in \mathbf{H})\} \\
&= \{(x, y) : (x \in \mathbf{E}\cap\mathbf{F}) \text{ et } (y \in \mathbf{G}\cap\mathbf{H})\} \\
&= (\mathbf{E}\cap\mathbf{F})\times(\mathbf{G}\cap\mathbf{H})
\end{aligned}$$

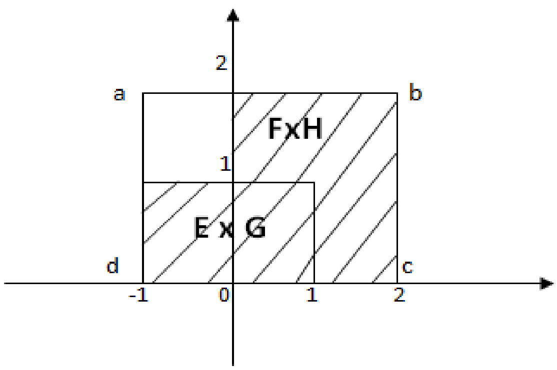
□

Remarque 2.3. $(\mathbf{E}\cup\mathbf{F})\times(\mathbf{G}\cup\mathbf{H}) = (\mathbf{E}\times\mathbf{G})\cup(\mathbf{F}\times\mathbf{H})$ n'est pas toujours vraie. Voici un contre exemple : Soit $\mathbf{E} = [-1,1]$, $\mathbf{F} = [0,2]$, $\mathbf{G} = [0,1]$, $\mathbf{H} = [0,2]$

On a $\mathbf{E}\cup\mathbf{F} = [-1,2]$, $\mathbf{G}\cup\mathbf{H} = [0,2]$, $(\mathbf{E}\cup\mathbf{F})\times(\mathbf{G}\cup\mathbf{H}) = [-1,2]\times[0,2]$ représente le réctangle *abcd* (voir la figure ci-dessous).

On a $\mathbf{E}\times\mathbf{G} = [-1,1]\times[0,1]$ et $\mathbf{F}\times\mathbf{H} = [0,2]\times[0,2] = [0,2]^2$.

D'où $(\mathbf{E}\times\mathbf{G})\cup(\mathbf{F}\times\mathbf{H}) \subset (\mathbf{E}\cup\mathbf{F})\times(\mathbf{G}\cup\mathbf{H})$ mais $(\mathbf{E}\cup\mathbf{F})\times(\mathbf{G}\cup\mathbf{H}) \not\subset (\mathbf{E}\times\mathbf{G})\cup(\mathbf{F}\times\mathbf{H})$.



2.2 Applications

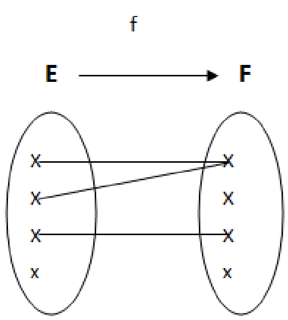
2.2.1 Définitions

Soient **E** et **F** deux ensembles.

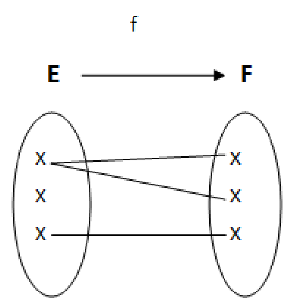
Définition 2.1. **(Fonction)**

On appelle fonction de **E** dans **F** toute loi f qui fait correspondre à tout élément x de **E** **au plus** un élément $y = f(x)$ de **F**.

L'ensemble $D_f = \{x \in \mathbf{E} |\ \exists y \in \mathbf{F} : y = f(x)\}$ est l'ensemble de définition de f.



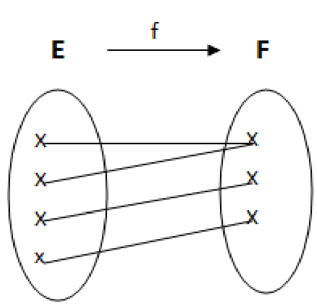
f est une fonction



f n'est pas une fonction

Définition 2.2. **(Application)**

On appelle application de **E** dans **F** toute loi f qui fait correspondre à chaque élément x de **E** un élément **unique** $y = f(x)$ appartenant à **F**.



f est une application

Remarque 2.4. Une fonction f de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$ est une application sur son domaine de définition. Par exemple

$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ est une fonction alors que $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ est une application.

Définition 2.3.

- $\forall x \in \mathbf{E}$, l'élément $y \in \mathbf{F}|\ y = f(x)$ (s'il existe) est appelé **image** de x par f ;
- $\forall y \in \mathbf{F}$, tout élément $x \in \mathbf{E}$ (il peut ne pas exister, il peut en exister un, ou en exister plus d'un) est appelé **antécédent** de y par f ;

Remarque 2.5. Pour montrer que $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ est une application, il faut montrer que :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{E} : x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Définition 2.4. **(Application identité)**

On appelle **application identité dans E**, l'application notée $Id_{\mathbf{E}}$ tel que

$$\begin{array}{rccc} Id_{\mathbf{E}}: & \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{E} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbf{E} : f(x) = x$.

Définition 2.5. **(Graphe d'une application)**

Le graphe de l'application $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ est la partie de $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ définie par :

$$G = \{(x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F}|\ y = f(x)\}.$$

Définition 2.6. **(Ensemble des applications)**

L'ensemble de toutes les applications de $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ est noté par $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

Définition 2.7. **(Restriction d'une application)**

Soit $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ une application et $A \subset \mathbf{E}$.

L'application $\begin{array}{rccc} g: & A & \longrightarrow & \mathbf{F} \\ & x & \longmapsto & g(x) \end{array}$

telle que $g(x) = f(x)$, $\forall x \in A$ est appelée **restriction de f à A** que l'on note $f_{|A}$.

f est appelée **prolongement de g à E**.

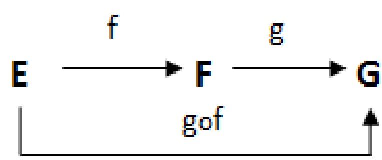
Définition 2.8. **(Egalité de deux applications)**

Deux applications $f, g : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ sont **égales** si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{E}$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.

2.2.2 Composition d'applications

Définition 2.9. **(Applications composées)**

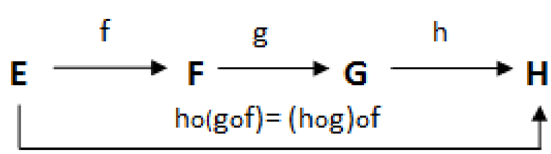
Soient $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ et $g : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ deux applications.
L'application $h : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{G}$ définie par $h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$ est appelée **application composée** de f et g.



Exemple 2.6. *Si* $\mathbf{E} = \mathbf{F} = \mathbf{G} = \mathbb{R}$ *avec* $f(x) = \sin x$ *et* $g(x) = x^2$.

- $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sin^2 x$;
- $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sin x^2$.

Remarque 2.6.
- En général $(f \circ g) \neq (g \circ f)$;
- $\forall f,\ g,\ h :\ h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.



Définition 2.10. **(Image directe, image réciproque)**

Soit $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ une application, $A \subset \mathbf{E}$, $B \subset \mathbf{F}$).

(i) On appelle **image directe de** A **par** f et on note $f(A)$ l'ensemble

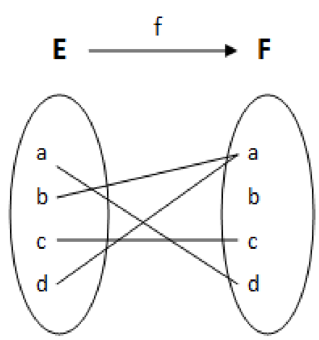
$$f(A) = \{y \in \mathbf{F} |\ \exists x \in A : y = f(x)\} \subset \mathbf{F};$$

(ii) On appelle **image réciproque de** B **par** f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbf{E} |\ f(x) \in B\} \subset \mathbf{E}.$$

Exemple 2.7. *Soient* $\mathbf{E} = \{a, b, c, d\}$ *et* $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ *une application définie par :*

$$f(a) = d,\ f(b) = a,\ f(c) = c,\ f(d) = a.$$



$f(\{a, b, c\}) = \{d, a, c\},\ f(\{b, d\}) = \{a\},\ f(\{a, d\}) = \{d, a\}$
$f^{-1}(\{a\}) = \{b, d\},\ f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ *et* $f^{-1}(\{a, c, d\}) = \{b, c, a, d\} = \{a, b, c, d\} = \mathbf{E}.$

Exemple 2.8. *Soit l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$.

Calculons : $f([0, 1[),\ f(\mathbb{R}),\ f(]-1, 2[)$ *et* $f^{-1}([1, 2[,\ f^{-1}([-1, 1], f^{-1}(\{3\}),\ f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}).$

$f([0, 1[) = [f(0), f(1)[= [0, 1[$ *(car f est strictement croissante sur* $[0, 1[$.

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[,\ f(]-1, 2[) = [0, 1[\cup]1, 4[$ *car* f *est strictement décroissante sur* $]-1, 0]$ *et strictement croissante sur* $[0, 2[$.

$f^{-1}([-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} |\ -1 \leq x^2 \leq 1\} = [-1, 1],\ \ f^{-1}([1, 2[=]-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}[,$

$f^{-1}(\{3\}) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}.$

2.2.3 Injectivité, surjectivité et bijectivité

Soient $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ deux ensembles et $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ une application.

Définition 2.11. **(Injectivité, surjectivité et bijectivité)**

f est dite :

- **Injective :** si toute image $y \in \mathbf{F}$ admet **au plus** (1 ou 0) antécédant dans $\mathbf{E}$. Autrement dit :
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{E} : \; f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2;$$
- **Surjective :** si pour toute image $y \in \mathbf{F}$, il existe au moins un antécédant $x \in \mathbf{E}$ tel que $y = f(x)$. (il suffit de résoudre l'équation $y = f(x)$). Autrement dit :
$$\forall y \in \mathbf{F}, \exists x \in \mathbf{E} : \; y = f(x);$$
- **Bijective :** si f est injective et f surjective, c.à.d. si pour toute image $y \in \mathbf{F}$, il existe un unique antécédent $x \in \mathbf{E}$ tel que $y = f(x)$. (l'existence de x vient de la surjection et l'unicité de l'injection). Autrement dit :
$$\forall y \in \mathbf{F}, \exists ! x \in \mathbf{E} : \; y = f(x).$$

Remarque 2.7. .

- $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ est injective $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbf{E} : \; x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2);$
- Pour démontrer que f n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments de $\mathbf{E}$ différents qui ont la même image ;
- A ne pas confondre la définition de l'injection avec la définition d'une application : $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{E} : \; x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
- f surjective $\Longleftrightarrow \; f(\mathbf{E}) = \mathbf{F}$.

Exemple 2.9. *Reprenons l'exemple de la fonction f définie de $\{a, b, c, d\} \longrightarrow \{a, b, c, d\}$ par : $f(a) = d, \; f(b) = a, \; f(c) = c, \; f(d) = a$.*

- *f n'est pas injective car il existe deux éléments b et d de $\mathbf{E}$ tel que $b \neq d$ et $f(b) = f(d) = a$.*

- *f n'est pas surjective car :* $\exists\, b \in \mathbf{E}$ *tel que* $\forall x \in \mathbf{E} : f(x) \neq b$.

Exemple 2.10. *Considérons l'application f définie par :*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

- *f n'est pas injective car il existe deux éléments de $\mathbb{R}$ qui sont -1 et 1 avec $-1 \neq 1$ et $f(-1) = f(1) = 1$.*
- *f n'est pas surjective car :* $\exists\, y \in]-\infty, 0[,\ \forall x \in \mathbb{R} : y \neq f(x)$.

Proposition 2.1. *Soit $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ une application.*

1. *Pour tout A, $B \subset \mathbf{E}$*
   (a) $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$.
   (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   (c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ *avec égalité si f est injective.*
2. $\forall\, A^{'},\ B^{'} \subset \mathbf{F}$
   (a) $A^{'} \subset B^{'} \Longrightarrow f^{-1}(A^{'}) \subset f^{-1}(B^{'})$.
   (b) $f^{-1}(A^{'} \cup B^{'}) = f^{-1}(A^{'}) \cup f^{-1}(B^{'})$.
   (c) $f^{-1}(A^{'} \cap B^{'}) = f^{-1}(A^{'}) \cap f^{-1}(B^{'})$.
   (d) $f^{-1}\left(\complement_{\mathbf{F}} A^{'}\right) = \complement_{\mathbf{E}} f^{-1}(A^{'})$.
3. $\forall\, A \subset \mathbf{E}$ *et* $\forall\, B \subset \mathbf{F}$.
   (a) $f^{-1}\left(f(A)\right) \supset A$ *avec égalité si f est injective.*
   (b) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ *avec égalité si f est surjective.*

Preuve. 1. Pour tout A, $B \subset \mathbf{E}$

(a) $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$

$$\begin{aligned} \text{Soit } y \in f(A) &\Longrightarrow \exists x \in A : y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in B : y = f(x) \ (\text{car} A \subset B) \\ &\Longrightarrow y \in f(B). \end{aligned}$$

(b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$$\begin{aligned} \text{Soit } y \in f(A \cup B) &\Longrightarrow \exists x \in A \cup B : y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in A \text{ ou } x \in B : y = f(x) \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

D'où $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \text{Soit } y \in f(A) \cup f(B) &\Longrightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \\ &\Longrightarrow y = f(x_1) \text{ ou } y = f(x_2) \text{ avec } x_1 \in A \text{ et } x_2 \in B \\ &\Longrightarrow \exists\ x \in A \cup B (x = x_1 \text{ ou } x = x_2) \text{ tel que } y = f(x) \in f(A \cup B). \end{aligned}$$

Donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Des deux inclusions précédentes, on déduit que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

(c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$$\begin{aligned} \text{Soit } y \in f(A \cap B) &\Longrightarrow \exists x \in A \cap B : y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in A \text{ et } x \in B : y = f(x) \in f(A) \text{ et } y = f(x) \in f(B) \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \text{ et } y \in f(B). \end{aligned}$$

Donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. La réciproque est en général fausse comme on peut le voir dans l'exemple suivant

Exemple 2.11. $\mathbf{E} = \{a, b\}$, $\mathbf{F} = \{c\}$, $f(a) = f(b) = c$, $A = \{a\}$ *et* $B = \{b\}$.

$f(A \cap B) = \{y = f(x) :\ x \in A \cap B\} = \emptyset$;

$f(A) = \{y |\ \exists\ x \in A :\ y = f(x)\} = \{c\}$;

$f(B) = \{y |\ \exists\ x \in B :\ y = f(x)\} = \{c\}$;

$f(A) \cap f(B) = \{c\} \neq f(A \cap B) = \emptyset$.

2. $\forall\ A',\ B' \subset \mathbf{F}$

(a) $A' \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in f^{-1}(A') &\Longrightarrow f(x) \in A' \\ &\Longrightarrow f(x) \in B' \text{ (car } A' \subset B') \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(B')\end{aligned}$$

(b) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in f^{-1}(A' \cup B') &\Longleftrightarrow f(x) \in A' \cup B' \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in A' \text{ ou } f(x) \in B' \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A') \ \text{ ou } \ y \in f^{-1}(B') \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(A').\end{aligned}$$

Par conséquent, $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

(c) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in f^{-1}(A' \cap B') &\Longleftrightarrow f(x) \in A' \cap B' \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in A' \text{ et } \ f(x) \in B' \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A') \ \text{ et } \ y \in f^{-1}(B') \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(A')\end{aligned}$$

(d) $f^{-1}\left(\complement_{\mathbf{F}} A'\right) = \complement_{\mathbf{E}} f^{-1}(A')$

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in f^{-1}\left(\complement_{\mathbf{F}} A'\right) &\Longleftrightarrow f(x) \in \complement_{\mathbf{F}} A' \\ &\Longleftrightarrow f(x) \notin A' \\ &\Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(A') \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_{\mathbf{E}} f^{-1}(A').\end{aligned}$$

D'où $f^{-1}\left(\complement_{\mathbf{F}} A'\right) = \complement_{\mathbf{E}} f^{-1}(A')$.

3. $\forall\, A \subset \mathbf{E}$ et $\forall\, B \subset \mathbf{F}$

   (a) $f^{-1}\left(f(A)\right) \supset A$ avec égalité si f est injective

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in A &\Longrightarrow f(x) \in f(A)\\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(f(A)).\end{aligned}$$

   Alors $A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$.

   Si f est injective, alors $f^{-1}\left(f(A)\right) \subset A$. En effet,

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in f^{-1}(f(A)) \Longrightarrow f(x) \in f(A) &\Longrightarrow \exists\, x^{'} \in A \text{ tel que } f(x) = f(x^{'})\\ &\Longrightarrow x = x^{'}(\text{ car } f \text{ est injective}) \Longrightarrow x \in A.\end{aligned}$$

   Des deux inclusions précédentes, on déduit que $A = f^{-1}\left(f(A)\right)$ si f est injective.

   (b) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ avec égalité si f est surjective.

$$\begin{aligned}\text{Soit } y \in f\left(f^{-1}(B)\right) &\Longrightarrow \exists x \in f^{-1}(B) | y = f(x)\\ &\Longrightarrow f(x) = y \in B\end{aligned}$$

   Si f surjective $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$. En effet,

$$\begin{aligned}\text{Soit } y \in B &\Longrightarrow y \in \mathbf{F}\\ &\Longrightarrow \exists x \in \mathbf{E} : y = f(x) \text{ (car } \ f \text{ surjective}\\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(B)\\ &\Longrightarrow y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 2.2. *La composition de deux applications injectives (respectivement surjectives, respectivement bijectives) est injective (respectivement surjective, respectivement bijective).*

Preuve. Soient $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ et $g : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$, alors $g \circ f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{G}$.

1. f et g injectives $\Longrightarrow (g \circ f)$ injective ?

   Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbf{E} : (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$?

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \quad &\Longrightarrow \quad g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \\ &\Longrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \text{ car } g \text{ est injective} \\ &\Longrightarrow \quad x_1 = x_2 \text{ car } f \text{ est injective.}\end{aligned}$$

   Donc $(g \circ f)$ est injective.

2. f et g surjectives $\Longrightarrow (g \circ f)$ surjective ?

   Soit $z \in \mathbf{G},\ \exists\ ?x \in \mathbf{E} : z = (g \circ f)(x)$.

$$\begin{aligned}\text{Soit } z \in \mathbf{G} \quad &\Longrightarrow \quad \exists\ y \in \mathbf{F} : z = g(y) \text{ car } g \text{ est surjective} \\ &\Longrightarrow \quad \exists\ x \in \mathbf{E} : y = f(x) \text{ car } f \text{ est surjective} \\ &\Longrightarrow \quad z = g(y) = g[f(x)] = (g \circ f)(x).\end{aligned}$$

   Donc $(g \circ f)$ surjective.

3. f et g bijectives $\Longrightarrow (g \circ f)$ bijective ?

$$\begin{aligned}f \text{ et } g \text{ bijectives} \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ injective, } g \text{ injective, } f \text{ surjective et } g \text{ surjective} \\ &\Longrightarrow \quad (g \circ f) \text{ est injective et} (g \circ f) \text{ est surjective} \\ &\Longrightarrow \quad (g \circ f) \text{ est bijective.}\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3. *Soient $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ et $g : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ deux applications.*

1. *$(g \circ f)$ injective $\Longrightarrow$ f injective ;*
2. *$(g \circ f)$ surjective $\Longrightarrow$ g surjective.*

Preuve. $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ et $g : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$

1. Supposons que $(g \circ f)$ est injective et montrons que f est injective.

$$\begin{aligned}\text{Soit } x_1,\ x_2 \in \mathbf{E} | f(x_1) = f(x_2) \quad &\Longrightarrow \quad g[f(x_1)] = g[f(x_2)], \text{ car } g \text{ est une application} \\ &\Longrightarrow \quad (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\Longrightarrow \quad x_1 = x_2, \text{ car } (g \circ f) \text{ est injective.}\end{aligned}$$

Donc f est une application injective.

2. Supposons que $(g \circ f)$ est surjective et montrons que g est surjective.

   Soit $z \in \mathbf{G} \Longrightarrow \exists\ x \in \mathbf{E} | z = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

   Donc $\exists\ y = f(x) \in \mathbf{F} | z = g[f(x)] = g(y)$.

   Par conséquent, g est une application surjective.

$\square$

2.2.4 Application réciproque

Proposition 2.4. *(et définition)**(Application réciproque)***

Soient $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ deux ensemblle et $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ une application.

1. *L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{E}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbf{F}}$ et $g \circ f = Id_{\mathbf{E}}$.*

2. *Si f est bijective alors l'application g est unique et elle est bijective. L'application g s'appelle* ***la bijection réciproque*** *de f et est notée f^{-1}. De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Preuve. 1. $\Longrightarrow$) Supposons que f est bijective.

f surjective $\Longrightarrow \forall y \in \mathbf{F}, \exists x \in \mathbf{E} : y = f(x)$

On pose $g(y) = x$.

$$\begin{aligned}
g(y) = x \quad &\Longrightarrow \quad f(g(y)) = f(x) = y,\ \forall y \in \mathbf{F} \\
&\Longrightarrow \quad f \circ g = Id_{\mathbf{F}} \\
&\Longrightarrow \quad f \circ g \circ f = Id_{\mathbf{F}} \circ f \quad \text{en composant à droite par } f \\
&\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbf{E}, f[(g \circ f)(x)] = f(x) \\
&\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbf{E}\, (g \circ f)\,(x) = x \quad \text{car } f \text{ est injective} \\
&\Longrightarrow \quad g \circ f = Id_{\mathbf{E}}
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Supposons que g existe et montrons que f est bijective.

- La surjection : Soit $y \in \mathbf{F}$. On pose $x = g(y) \in \mathbf{E}$ alors $f(x) = f(g(y)) = Id_{\mathbf{F}}(y) = y$. Donc f est surjective.

- L'injectivité : Soient $x_1, x_2 \in \mathbf{E} : f(x_1) = f(x_2)$, montrons que $x_1 = x_2$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow g(f(x_1) = g(f(x_2) \\ &\Longrightarrow Id_E(x_1) = Id_E(x_2) \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

  D'où f es injective.

2. Si f est bijective alors g est aussi bijective car $g \circ f = Id_{\mathbf{E}}$ et $f \circ g = Id_{\mathbf{F}}$. En appliquant ce qui précède, avec g à la place de f on aura, $g^{-1} = f$.
   Montrons que g est unique : Supposons qu'il existe une autre application réciproque de f, notée $h \Longrightarrow h \circ f = Id_{\mathbf{E}}$ et $f \circ h = Id_{\mathbf{F}}$, en composant à droite par g, on aura $h \circ f \circ g = Id_{\mathbf{E}} \circ g \Longrightarrow h = g$.
   D'où l'unicité de l'application réciproque.

$\square$

Exemple 2.12. *Considérons l'application f définie par*

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & (x-1)^2 \end{array}$$

Montrons que f est bijective et calculons f^{-1}.

f est injective car

$$\begin{aligned} \forall x_1,\ x_2 \in [0,1] : f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \\ &\Longrightarrow (x_1-1)^2 - (x_2-1)^2 = 0 \\ &\Longrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2-2) = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 \ ou \\ x_1 + x_2 - 2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = 1 \end{cases} \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

f est surjective car $\forall y \in [0,1], \exists\ x \in [0,1] : y = f(x)$.

En effet,

$$\begin{aligned} y = f(x) \Longrightarrow y = (x-1)^2 &\Longrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y} \\ &\Longrightarrow x = 1 \pm \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Comme $x = 1 + \sqrt{y} \notin [0,1] \Longrightarrow x = 1 - \sqrt{y} \in [0,1]$ *, d'où*

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & 1-\sqrt{x}. \end{array}$$

Remarque 2.8. Il ne faut pas confondre l'application réciproque $f^{-1} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{E}$ qui n'existe que si f est bijective avec l'application $f^{-1} : \mathcal{P}(\mathbf{F}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{E})$ qui existe pour toute application. La définition de l'image réciproque ne suppose pas que f soit bijective.

Proposition 2.5. *Soient* $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ *et* $g : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ *deux applications bijectives. L'application* $g \circ f$ *est bijective et sa bijection reciproque est* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve. f, g bijective $\Longrightarrow g \circ f$ bijective (voir la preuve de la proposition 2.2).
Montrons que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
Soit $h = g \circ f$, il faut chercher h^{-1} telle que $h \circ h^{-1} = Id_{\mathbf{G}}$ et $h^{-1} \circ h = Id_{\mathbf{F}}$.
$Id_{\mathbf{G}} = (g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = g \circ [f \circ (g \circ f)^{-1}]$
D'où $g^{-1} = f \circ (g \circ f)^{-1} \Longrightarrow f^{-1} \circ g^{-1} = f^{-1} \circ f \circ (g \circ f)^{-1}$ (en composant à gauche par f^{-1}
d'où $(g \circ f)^{-1} = (g \circ f)^{-1}$.
On vérifie $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = Id_{\mathbf{E}}$.

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ Id_{\mathbf{G}} \circ f \\ &= f^{-1} \circ f = Id_{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

□