

Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA – BEJAÏA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE DES PROCÉDES



COURS
TRANSFERT DE MATIERE

Dr Rachid KETRANE

SOMMAIRE

Avant-propos	3
--------------------	---

Chapitre I : Généralités sur le transfert de matière

I.1. Introduction.....	5
I.2. Définitions	8
I.3. Concentrations des constituants dans les phases.....	9
I.4. Loi des pressions partielles-Loi de Dalton	14
I.5. Gaz dissous dans les liquides-Loi d'Henry	16

Chapitre II : Transfert de matière par convection et par diffusion moléculaire

II.1. Introduction	18
II.2. Diffusion moléculaire et transfert de matière	18
II.3. Vitesse des constituants et flux de matière	19
II.3.1. Définitions	19
II.3.2. Densité de flux de transfert massique.....	19
II.3.3. Densité de flux de transfert molaire	22
II.4. Première loi de FICK	23
II.5. Coefficient de diffusion	26
II.5.1. Coefficient de diffusion dans les gaz	26
II.5.2. Coefficient de diffusion dans les liquides	26

Chapitre III : Bilan élémentaire de matière-Profil de concentration en écoulement laminaire

III.1. Introduction	27
III.2. Bilan de matière-Conditions aux limites.....	27
III.3. Diffusion à travers un gaz stagnant ou gaz immobile	28
III.3.1. Définition	28
III.3.2. Equations régissant la diffusion à travers un gaz stagnant	29
III.4. Contre diffusion équimolaire	33

Chapitre IV : Equation générale pour un mélange binaire-Equation de continuité

IV.1. Introduction	38
IV.2. Equation de continuité	39
IV.2.1. Bilan de matière molaire.....	39
IV.2.2. Bilan de matière massique.....	42

Chapitre V : Transfert entre phases

V.1. Introduction	43
-------------------------	----

V.2. Coefficient de transfert de matière	43
V.3. Analyse dimensionnelle	47
V.4. Théories de transfert	50
V.4.1. Modèle de pénétration.....	50
V.4.2. Modèle de Nernst (paroi-fluide)	51
V.4.3. Modèle de la couche limite	52
V.5. Théorie du double film de transfert de matière (théorie de Lewis et Whitman).....	52
V.5.1. Relation entre le coefficient de transfert de matière global et les coefficients de transfert de matière partiels	54
V.5.2. Relation entre le coefficient de transfert de matière global en phase gazeuse avec coefficient de transfert de matière global en phase liquide	55
V.5.3. Analogie avec l'électricité	56
Bibliographie	58

Avant-propos

Les industries chimiques et parachimiques ont pour objectif de fabriquer, à partir de matières premières brutes, toute une variété de matières élaborées qui sont ensuite utilisées par les industries pétrochimiques, pharmaceutiques, alimentaires, textiles, etc. Les procédés de traitement basés sur le *transfert de matière* ou encore *transfert de masse* sont très nombreux et très importants pour les industries chimiques et pétrochimiques.

Les opérations de séparation telles que la distillation, l'absorption des gaz, l'extraction par solvant, etc., font appel au transfert de matière entre phases (liquide-vapeur, liquide-liquide), mises en contact de manière convenables dans des appareils tels que colonne à distiller (à plateaux ou à remplissage), extracteur liquide-liquide (avec ou sans agitation mécanique), etc. Si, dans ces appareils, le transfert était infiniment rapide, les phases seraient en équilibre partout où elles sont en contact : les concentrations d'un soluté dans chaque phase seraient reliées par les lois des équilibres thermodynamiques liquide-vapeur ou liquide-liquide correspondant à la séparation envisagée. En réalité, la vitesse du transfert est limitée et, pour un mode de contact déterminé, dépend :

- de facteurs moléculaires : les solutés diffusent dans un fluide par suite de l'agitation moléculaire ;
- de facteurs hydrodynamiques agissant à deux niveaux :
 - o transport de matière par convection ;
 - o création d'une aire interfaciale plus ou moins importante par division de l'une des phases (gouttes ou bulles, répartition sur la surface des éléments de garnissage).

Un phénomène de transfert ou encore phénomène de transport est un phénomène réversible durant lequel une grandeur physique est transportée par le biais de molécules. C'est un phénomène transversal présent dans tous les domaines de la science et de l'ingénierie. Tous les phénomènes de transport ont pour origine l'inhomogénéité d'une grandeur intensive. C'est la tendance spontanée des systèmes physiques et chimiques à rendre uniformes ces grandeurs qui provoquent le transport.

En ce qui concerne la diffusion particulaire, elle ne peut avoir lieu que dans un fluide, contrairement à la diffusion thermique qui peut être à l'œuvre dans un solide. Les phénomènes de diffusion sont souvent en « concurrence » avec les phénomènes de convection : un sel en solution aqueuse peut être « transféré » d'une région plus concentrée vers une région moins concentrée par diffusion seule (dans ce cas, les particules du fluide « support », l'eau dans l'exemple choisi, ont un déplacement moyen nul), ou bien le processus peut être accéléré par un mouvement d'ensemble des particules du fluide servant au transfert (on parle alors de « transport convectif »). Il est clair que les solides ne sont pas concernés par les phénomènes de convection.

Chapitre I

Généralités sur le transfert de matière

I.1. Introduction

Tout procédé de transformation de la matière, qu'il soit chimique ou biologique, consiste en une séquence d'opérations qui peuvent être rangées sous deux rubriques comme représenté par la figure I.1 :

- Réacteur siège de la transformation ;
- Séparation et/ou Mélange.

Ces dernières concernent le traitement de la matière première et la séparation des produits issus de la réaction, celle-ci n'étant en général ni totale ni sélective, ce qui implique un recyclage des matières premières ainsi que des rejets de matière. Quant aux procédés dits «physiques», ils ne comportent que les opérations de séparation et/ou mélange.

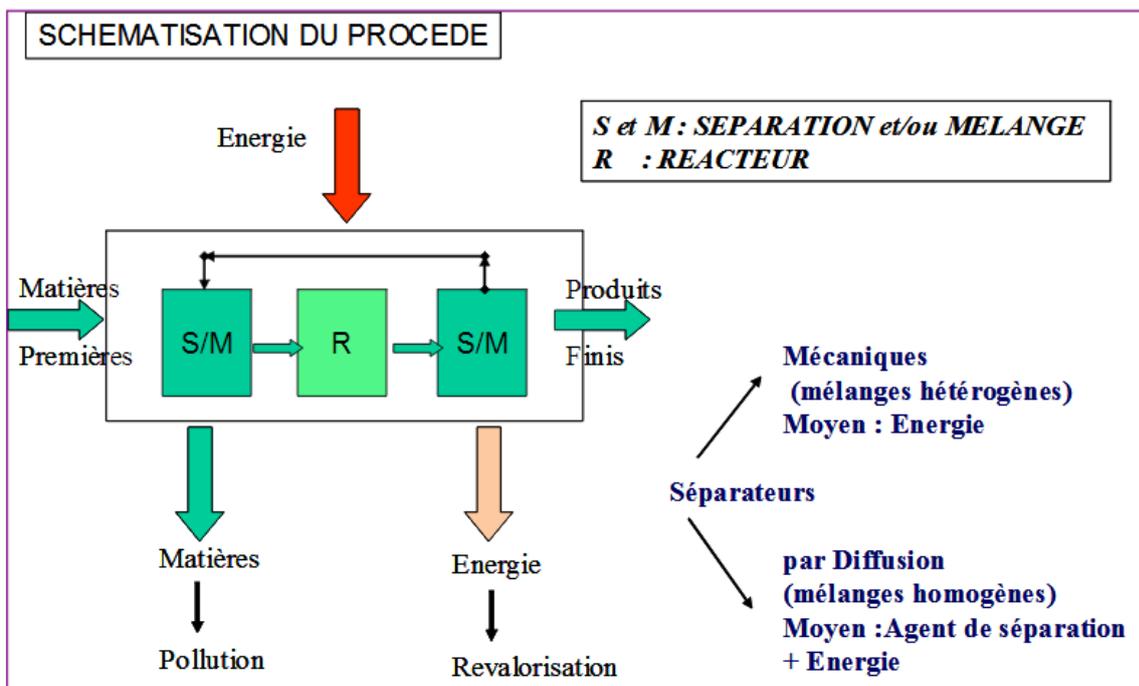


Figure I.1 : Schématisation du procédé

Les séparateurs peuvent être divisés en deux familles : - Mécaniques
- Diffusionnels

Les premiers concernent, bien que ce ne soit pas une règle générale absolue, la séparation de systèmes hétérogènes (au sens macroscopique du terme). On peut citer les opérations de filtration, décantation, centrifugation, sédimentation, pressage, flottation, etc. L'énergie nécessaire à ces opérations est de l'énergie mécanique, d'où leur nom : c'est par exemple de

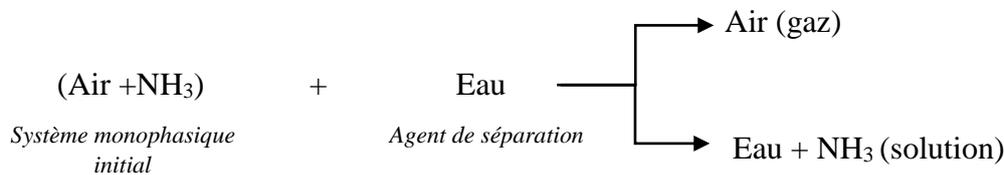
l'énergie de mise en circulation avec ou sans mise en pression, d'entraînement de rotors à plus ou moins grande vitesse, de pressage, etc. La consommation énergétique est en général faible.

Quant aux seconds, ils sont plus complexes, plus chers sur le plan énergétique et concernent, en général, la séparation de mélanges « homogènes » comme par exemple l'épuration de gaz, la séparation par rectification de coupes pétrolières liquides, l'extraction d'huile de graines, etc. Ils nécessitent un agent de séparation.

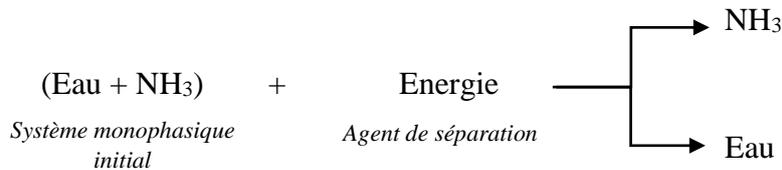
La plupart du temps, on mettra en œuvre deux opérations unitaires couplées comme, par exemple, pour l'élimination d'ammoniac d'un mélange air-ammoniac.

Exemple : Elimination d'ammoniac (NH_3) d'un courant gazeux (air- NH_3) qui peut se faire en deux étapes :

1^{ère} étape : Elimination de l'ammoniac du mélange gazeux

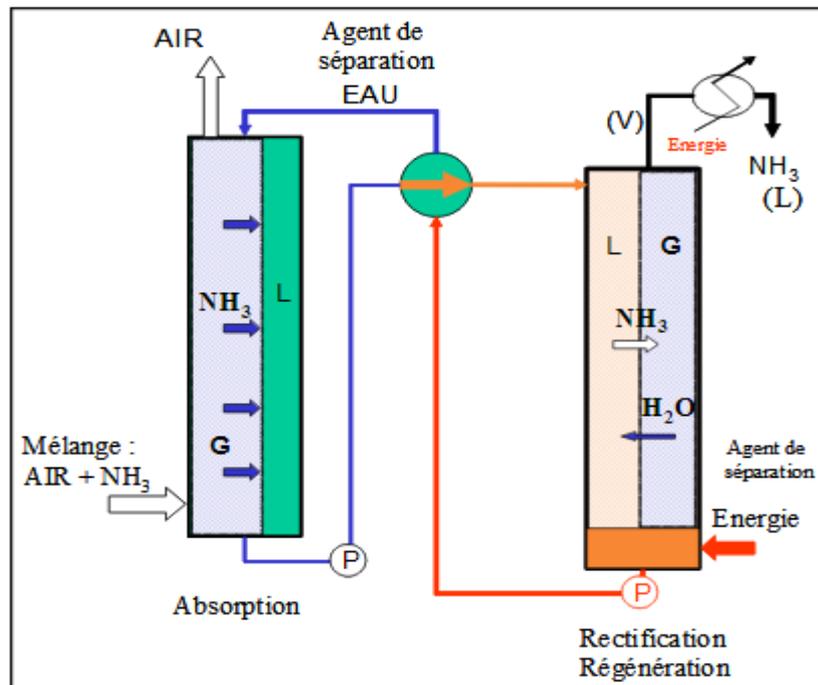
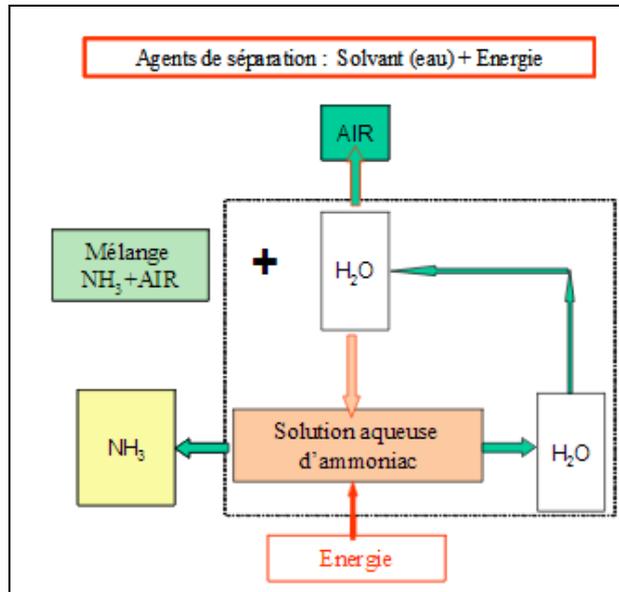


2^{ème} étape : Récupération de l'ammoniac du mélange liquide (Eau- NH_3)



La première étape consiste en une absorption de l'ammoniac par l'eau (agent de séparation) ; dans la seconde, le mélange eau-ammoniac est séparé par rectification avec apport d'énergie qui constitue le second agent de séparation. Dans la colonne d'absorption, l'ammoniac est transféré de la phase gaz vers la phase liquide alors que dans la colonne de rectification l'ammoniac passe de la phase liquide à la phase vapeur générée par l'apport d'énergie : dans ces deux appareils il a été réalisé un transfert de matière.

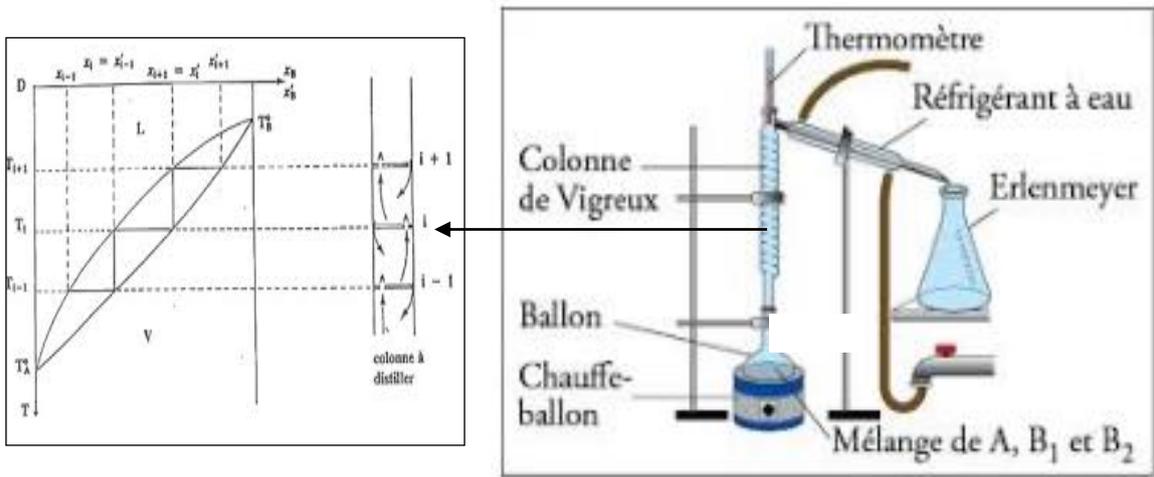
La séparation se traduit par les schémas des figures I.2 et I.3 suivantes :



Figures I.2 et I.3 : Séparation du mélange air-NH₃

Le cas de deux constituants peut être aussi envisagé quand il s'agit de la distillation et de la rectification (Fig. I.4. et I.5.)

Exemple : soit le cas d'un mélange liquide miscible (A : Eau - B : Alcool). Pour séparer l'alcool de l'eau, on procède par distillation comme le montre les figures suivantes.



Figures I.4 et I.5 : Distillation d'un mélange miscible alcool-eau

On va considérer le cas le plus simple du mélange A-B où B est le composé le plus volatil. A l'instant où les premières vapeurs sont dégagées leur composition est plus riche en B que le mélange initial. Au cours du temps, la fraction molaire en B du liquide dans le bouilleur diminue car il s'évapore une proportion plus grande de B que de A. Les vapeurs seront toujours plus riches en B que le mélange liquide dans le bouilleur mais leur composition montrera une teneur en B plus faible qu'initialement. On obtient donc un distillat de moins en moins concentré en B. Au cours de la distillation, la température va augmenter dans le bouilleur car le liquide s'appauvrit en composé le plus volatil. En résumé, il s'agit ici d'un processus d'échange de matière et de chaleur qui consiste à chauffer un mélange liquide jusqu'à son point d'ébullition puis à le condenser.

I.2. Définitions

Le transfert de matière est une redistribution d'une substance (A) entre deux phases avec ou sans réaction chimique. Ainsi, il existe au minimum trois constituants : la phase ① et la phase ② séparées par une interface ou interphase et une substance (A) comme illustré par la figure suivante :

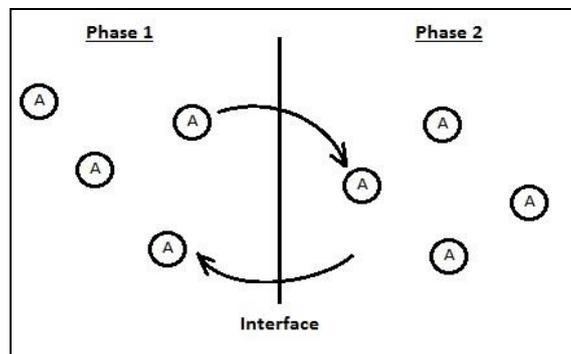


Figure I.6 : Représentation schématique d'un système de transfert de matière

Ces phases peuvent être solide (S), liquide (L) ou gazeuse (G) et on distingue plusieurs combinaisons possibles :

Absorption : $G \xrightarrow{A} L$

Désorption : $G \xleftarrow{A} L$

Absorption (séchage) : $S \xrightarrow{A} L$

Extraction liquide-liquide : $L \rightleftharpoons L$

Exemples : (L : Eau, A : NH₃, G : Air) et (L : Eau, A : CO₂, G : Air)

Au sein de la même phase, la matière peut se déplacer par deux modes : convection et diffusion moléculaire.

- Convection : c'est le mouvement d'ensemble du fluide dû aux forces extérieures.
- Diffusion moléculaire : mouvement dû aux différences de concentration (ou de température), on parle alors de gradient de concentration (ou gradient de température).

Principes de transfert de matière :

- Le transfert de matière est un procédé déséquilibré ;
- La quantité de matière transférée est proportionnelle à un potentiel ou à une force motrice ;
- Le transfert de matière s'effectue par deux mécanismes (diffusion et convection) ;
- L'étape la plus lente limite la vitesse de transfert (en général c'est la diffusion) ;
- Les procédés de transfert de matière sont réversibles.

I.3. Concentrations des constituants dans les phases

On exprime souvent les concentrations des constituants des mélanges liquides (ou bien gazeux) en fractions molaires. Cependant, en pratique de calcul des procédés basés sur le transfert de matière tels que rectification, absorption, séchage, etc, les concentrations des constituants des mélanges sont exprimées en fractions massiques.

Désignons les nombres de moles par n_A , n_B et n_C et leurs masses par m_A , m_B et m_C des constituants A, B et C qui composent un mélange liquide (ou gazeux).

Notation ou nomenclature des systèmes diffusionnels

Ainsi pour le constituant A :

En phase liquide : $x_A, \bar{x}_A, X_A, \bar{X}_A, C_A^L, \bar{C}_A^L$

En phase gaz : $y_A, \bar{y}_A, Y_A, \bar{Y}_A, C_A^G, \bar{C}_A^G$

Remarque :

Sans (-) au-dessus : x_A , X_A et C_A^L sont exprimées en molaire

Avec (-) au-dessus : \bar{x}_A , \bar{X}_A et \bar{C}_A^L sont exprimées en massique.

En général, on a affaire à un mélange de n constituants ou espèces. Soit i une espèce ou un constituant de ce mélange.

Pour un mélange liquide, on a :

$$\sum x_i = 1 \text{ ou } \sum \bar{x}_i = 1$$

Ou encore pour un mélange gazeux :

$$\sum y_i = 1 \text{ ou } \sum \bar{y}_i = 1$$

Dans ce qui suit, sont présentées les concentrations du constituant A d'un mélange en phase liquide et il devient très aisé par la suite de déduire les expressions des concentrations en phase gaz.

En premier lieu sont présentées les concentrations en termes de fractions et relations entre elles.

I.3.1. Fraction molaire x_A

$$x_A = \frac{n_A}{\sum n_i}$$

Cas d'un mélange binaire A+ B :

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B}$$

I.3.1. Fraction massique \bar{x}_A

$$\bar{x}_A = \frac{m_A}{\sum m_i}$$

Cas d'un mélange binaire A+ B :

$$\bar{x}_A = \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

I.3.3. Expression de $x_A = f(\bar{x}_A)$

On a :

$$n_A(\text{mol}) = \frac{m_A(\text{g})}{M_A(\text{g}|\text{mol})}$$

Par ailleurs :

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{\frac{m_A/M_A}{M_A + m_B}}{\left(\frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B}\right) \times \frac{1}{m_A + m_B}}$$

Pour avoir enfin :

$$x_A = \frac{\bar{x}_A/M_A}{\frac{\bar{x}_A}{M_A} + \frac{\bar{x}_B}{M_B}}$$

I.3.4. Expression de $\bar{x}_A = f(x_A)$

$$\bar{x}_A = \frac{m_A}{m_A + m_B} = \frac{n_A M_A}{n_A M_A + n_B M_B} = \frac{(n_A \cdot M_A) \frac{1}{n_A + n_B}}{(n_A M_A + n_B M_B) \frac{1}{n_A + n_B}}$$

$$\bar{x}_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B}$$

I.3.5. Fraction molaire relative X_A

$$X_A = \frac{n_A}{n_B}$$

I.3.6. fraction massique relative \bar{X}_A

$$\bar{X}_A = \frac{m_A}{m_B}$$

I.3.7. Expression de $X_A = f(\bar{X}_A)$

$$X_A = \frac{n_A}{n_B} = \frac{m_A}{m_B} \cdot \frac{M_B}{M_A} = \bar{X}_A \cdot \frac{M_B}{M_A}$$

$$X_A = \bar{X}_A \cdot \frac{M_B}{M_A} \quad (*)$$

I.3.8. expression de $\bar{X}_A = f(X_A)$

$$(*) \Rightarrow \bar{X}_A = X_A \cdot \frac{M_A}{M_B}$$

I.3.9. Expression de $X_A = f(\bar{x}_A)$

$$X_A = \frac{n_A}{n_B} = \frac{m_A}{m_B} \frac{M_B}{M_B} = \frac{\frac{m_A}{m_A + m_B}}{\frac{m_B}{m_A + m_B}} \times \frac{M_B}{M_A}$$

$$X_A = \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}_B} \cdot \frac{M_B}{M_A}$$

I.3.10. Expression de $X_A = f(x_A)$

$$X_A = \frac{n_A}{n_B} = \frac{n_A/n_A + n_B}{n_B/n_A + n_B}$$

$$X_A = \frac{x_A}{x_B}$$

I.3.11. Expression de $\bar{X}_A = f(\bar{x}_A)$

$$\bar{X}_A = \frac{m_A}{m_B} = \frac{m_A / m_A + m_B}{m_B / m_A + m_B}$$

$$\bar{X}_A = \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}_B}$$

I.3.12. Expression de $\bar{X}_A = f(x_A)$

$$\bar{X}_A = \frac{m_A}{m_B} = \frac{n_A \cdot M_A}{n_B \cdot M_B} = \frac{n_A / (n_A + n_B) \cdot M_A}{n_B / (n_A + n_B) \cdot M_B}$$

$$\bar{X}_A = \frac{x_A}{x_B} \cdot \frac{M_A}{M_B} = \frac{x_A}{1 - x_A} \cdot \frac{M_A}{M_B}$$

I.3.13. Expression de $x_A = f(X_A)$

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{n_A / n_B}{(n_A + n_B) / n_B}$$

$$x_A = \frac{X_A}{X_A + 1}$$

I.3.14. Expression de $x_A = f(\bar{X}_A)$

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{m_A / M_A}{\frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B}} = \frac{\frac{m_A}{M_A} \times \frac{1}{m_B}}{\frac{m_A}{m_B} \cdot \frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}}$$

$$x_A = \frac{\frac{\bar{X}_A}{M_A}}{\frac{\bar{X}_A}{M_A} + \frac{1}{M_B}}$$

En termes de concentrations, la notation est comme suit : $\begin{cases} C_A^G \text{ (gaz)} \\ \bar{C}_A^G \text{ (gaz)} \end{cases}$ et $\begin{cases} C_A^L \text{ (liquide)} \\ \bar{C}_A^L \text{ (liquide)} \end{cases}$

Soit :

C_A : Concentration molaire en volume (mol A/m³)

\bar{C}_A : Concentration massique en volume (kg A/m³)

$$C_A = \frac{n_A}{V} \quad \text{Avec} \quad \sum C_i = C \text{ qui est la concentration molaire totale en volume}$$

$$\bar{C}_A = \frac{m_A}{V} \quad \text{Avec} \quad \sum \bar{C}_i = \rho \quad (\text{masse volumique})$$

- $\bar{C}_A = C_A \cdot M_A$ Il est aisé de vérifier par les unités $(\frac{Kg A}{m^3} = \frac{mol A}{m^3} \cdot \frac{Kg A}{mol A})$
- $C_A = x_A \cdot C$ et $\bar{C}_A = \bar{x}_A \rho$

Il est aussi aisé de vérifier ces deux relations par les unités $(\frac{Kg A}{m^3} = \frac{kg A}{kg tot} \cdot \frac{Kg tot}{m^3})$

- $\rho = C \cdot M$

La masse moléculaire moyenne d'un mélange de plusieurs composants d'un fluide s'exprime comme suit :

$$M_{moy} = \sum y_i \cdot M_i$$

Ou encore :

$$M_{moy} = \sum X_i \cdot M_i$$

I.3.15. Expression de $x_A = f(C_A)$:

$$x_A = \frac{C_A}{C_A + C_B} = \frac{C_A}{C} = x_A$$

I.3.16. Expression de $x_A = f(\bar{C}_A)$:

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{m_A/M_A}{\frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B}} = \frac{\frac{m_A}{V} \cdot 1/M_A}{\frac{m_A}{V} \cdot \frac{1}{M_A} + \frac{m_B}{V} \cdot \frac{1}{M_B}} = \frac{\bar{C}_A/M_A}{\bar{C}_A/M_A + \bar{C}_B/M_B} = x_A$$

$$= \frac{\frac{m_A}{M_A V}}{\frac{m_A}{M_A V} + \frac{m_B}{M_B V}} = \frac{\frac{m_A}{M_A V}}{(\frac{m_A + m_B}{M_A + M_B}) \cdot \frac{1}{V}}$$

Par ailleurs :

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{\frac{m_A}{M_A V}}{\frac{n_A + n_B}{V}} = \frac{C_A \cdot \frac{1}{M_A}}{C_A + C_B} = \frac{C_A/M_A}{C}$$

$$x_A = \frac{C_A}{C \cdot M_A}$$

I.3.17. Expression de $\bar{C}_A = f(x_A)$:

$$\bar{C}_A = \frac{m_A}{V} = \frac{n_A \cdot M_A}{V} = \frac{\frac{n_A}{n_A + n_B}}{\frac{n_A + n_B}{V}} \cdot M_A$$

$$= \frac{n_A}{n_A + n_B} \cdot (\frac{n_A}{V} + \frac{n_B}{V}) \cdot M_A$$

$$= x_A \cdot (C_A + C_B) \cdot M_A \quad \text{Or: } C_A + C_B = C$$

$$\bar{C}_A = x_A \cdot C \cdot M_A$$

I.3.18. Expression de $\bar{x}_A = f(\bar{C}_A)$:

$$\bar{x}_A = \frac{m_A}{m_A + m_B} = \frac{m_A/V}{m_A/V + m_B/V} = \frac{C_A}{C_A + C_B} = \frac{C_A}{\rho} \quad \text{Or: } \bar{C}_A + \bar{C}_B = \rho$$

$$\bar{x}_A = \frac{\bar{C}_A}{\rho}$$

I.3.19. Expression de $\bar{X}_A = f(\bar{C}_A)$:

$$\bar{X}_A = \frac{m_A}{m_B} = \frac{m_A/V}{m_B/V} = \frac{C_A}{C_B} \quad \text{Or: } \bar{C}_A + \bar{C}_B = \rho \Rightarrow \bar{C}_B = \rho - \bar{C}_A$$

$$\bar{X}_A = \frac{\bar{C}_A}{\rho - \bar{C}_A}$$

I.3.20. Expression de $\bar{X}_A = f(C_A)$:

$$(C_A = \frac{n_A}{V})$$

$$\bar{X}_A = \frac{m_A}{m_B} = \frac{n_A \cdot M_B}{n_B \cdot M_B} = \frac{\frac{n_A}{V} \cdot M_A}{\frac{n_B}{V} \cdot M_B} = \frac{C_A \cdot M_A}{C_B \cdot M_B} = \frac{C_A \cdot M_A}{(C - C_A) \cdot M_B}$$

$$\bar{X}_A = \frac{C_A \cdot M_A}{(C - C_A) \cdot M_B}$$

I.3.21. Expression de $C_A = f(\bar{x}_A)$:

$$C_A = \frac{n_A}{V} = \frac{m_A}{M_A} \times \frac{1}{\frac{m_A + m_B}{m_A + m_B}} = \frac{1}{M_A} \cdot \frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot \frac{m_A + m_B}{V}$$

$$C_A = \frac{\rho \bar{x}_A}{M_A}$$

I.4. Loi des pressions partielles-Loi de Dalton

On appelle pression partielle d'un gaz noté P_i se trouvant dans un mélange avec d'autres constituants gazeux la pression à laquelle se trouverait s'il occupait le volume total V du mélange.

Dans ce qui suit, ne sont examinés ici que les gaz supposés parfaits.

Loi des gaz parfaits : $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

Paramètres		Unités (SI)	Unités
P	Pression	Pa	atm
V	Volume	m ³	L
n	Nombre de mole	mol	mol
R	Constante des gaz parfaits	Pa. m ³ /mol.K	atm.L/mol.K
T	Température	K	K

Il est possible de déterminer à partir de la loi des gaz parfaits la concentration molaire totale d'un mélange gazeux, ainsi :

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow P = \frac{n}{V} \cdot R \cdot T \Rightarrow C^G = \frac{n}{V} = \frac{P}{R \cdot T} \Rightarrow C^G = \frac{P}{R \cdot T}$$

Par ailleurs, il est aussi possible de déduire la masse volumique ρ d'un mélange gazeux :

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow PV = \frac{m}{M_{moy}} \cdot R \cdot T \Rightarrow P \cdot M_{moy} = \frac{m}{V} \cdot R \cdot T \Rightarrow P \cdot M_{moy} = \rho \cdot R \cdot T$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{P \cdot M_{moy}}{R \cdot T}$$

Considérons un mélange gazeux d'un volume V, maintenu sous une pression totale P_t et à une température constante T. Ce mélange est composé des constituants gazeux A, B et C ayant respectivement les volumes V_A, V_B et V_C. Soient n_A, n_B et n_C, le nombre de moles respectifs des constituants gazeux A, B et C.

Deux cas seront examinés :

1^{er} Cas :

Supposons que P_A est la pression partielle de A et que ce dernier occupe tout le volume V du mélange gazeux. Dans ce cas la loi des gaz parfaits peut s'écrire comme suit :

$$P_A \cdot V = n_A \cdot R \cdot T$$

En généralisant aux autres composés, on aura :

$$P_A \cdot V = n_A \cdot R \cdot T \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$P_B \cdot V = n_B \cdot R \cdot T \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$$P_C \cdot V = n_C \cdot R \cdot T \quad \dots\dots\dots (iii)$$

En sommant les trois équations précédentes, on obtient :

$$(P_A + P_B + P_C) \cdot V = (n_A + n_B + n_C) \cdot RT \quad \dots\dots\dots (iiii)$$

Or la somme des pressions partielles représente la pression totale du système.

L'équation (iiii) devient : P_t · V = n_t · R · T

En divisant l'équation (i) par l'équation (iii), on aura :

$$\frac{(i)}{(iii)} \Rightarrow \frac{P_A}{P_t} = \frac{n_A}{n_t}$$

Sachant que le milieu est gazeux alors : $\frac{P_A}{P_t} = y_A$

$\Rightarrow P_A = y_A \cdot P_t$ C'est la loi de DALTON

2^{ème} Cas :

Dans ce cas, le même mélange gazeux d'un volume V, maintenu sous une pression totale P_t et à une température constante T est considéré.

On a :

n_A occupe V_a

n_B occupe V_B

n_C occupe V_C

Ainsi la loi des gaz parfaits peut s'écrire :

$$PV_A = n_A \cdot R \cdot T \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$PV_B = n_B \cdot R \cdot T \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$$CV_C = n_C \cdot R \cdot T \quad \dots\dots\dots (iii)$$

En sommant les trois équations précédentes, on obtient :

$$P(V_A + V_B + V_C) = (n_A + n_B + n_C)RT \quad \dots\dots\dots (iiii)$$

Or la somme des volumes partiels représente le volume total du système et la somme des nombres de moles partiels représente le nombre de moles total du système.

L'équation (iiii) devient : $P_t \cdot V = n_t \cdot R \cdot T$

En divisant l'équation (i) par l'équation (iiii), on aura :

$$\frac{(i)}{(iiii)} \Rightarrow \frac{P \cdot V_A}{P \cdot V} = \frac{n_A}{n} \Rightarrow V_A = \frac{n_A}{n} \cdot V \Rightarrow V_A = y_A \cdot V$$

Enfin : $V_A = y_A \cdot V$

Cette relation montre que le volume partiel est directement proportionnel à la fraction.

I.5. Gaz dissous dans les liquides-Loi d'Henry

La loi **d'Henry**, formulée par **William Henry** en 1803, énonce : « A température constante et à l'équilibre, la quantité de gaz dissout dans un liquide est proportionnelle à la pression partielle qu'exerce ce gaz sur le liquide. »

Les gaz se dissolvent dans les liquides, c'est le cas de l'eau gazeuse qui contient de grandes quantités de gaz carbonique. La quantité de gaz emmagasinée dépend de la pression de gaz en équilibre avec le liquide.

Soit un gaz A en équilibre entre une phase liquide et une phase gazeuse.

Dans la phase gazeuse :

La loi de Dalton : $P_A = y_A \cdot P$

Dans la phase liquide :

$P_A^* = H \cdot x_A$ C'est la loi d'Henry

A température constante, la quantité de gaz dissous dans un liquide est proportionnelle à la pression exercée par ce gaz sur le liquide :

- Si la température augmente, la dissolution diminue ;
- En permanence quand un gaz est en contact avec un liquide il y a échange entre le gaz et le gaz dissous ;
- A l'équilibre, les échanges sont identiques.

Où :

P_A^* : Pression partielle de A à l'équilibre (*)

H : Constante d'Henry.

x_A : Fraction molaire de A.

Ou bien : $P_A = H \cdot x_A^*$

Avec : P : pression partielle de A.

H : Constante d'Henry.

x_A^* : Fraction molaire de A à l'équilibre.

Ou bien encore : $P_A^* = H' C_A$
 $P_A = H' C_A^*$

Remarque : Il faut faire attention aux unités. Suivant les unités données pour la constante d'Henry, on choisira l'une des deux relations.

Valeurs de la constante d'Henry de quelques gaz dans l'eau à 298,15 K

Gaz	H (atm)
O ₂	4,259×10 ⁴
H ₂	7,099×10 ⁴
CO ₂	0,163×10 ⁴
N ₂	9,077×10 ⁴
He	14,97×10 ⁴
Ne	12,30×10 ⁴
Ar	3,955×10 ⁴
CO	5,828×10 ⁴

Chapitre II

Transfert de matière par convection et par diffusion moléculaire

II.1. Introduction

Le phénomène de *transfert de matière* ou de *transfert de masse* est un phénomène réversible durant lequel une grandeur physique est transportée par le biais de molécules. Il a pour origine l'inhomogénéité d'une ou plusieurs grandeurs (la concentration, température ou pression) répartie(s) entre deux phases. C'est la tendance spontanée des systèmes physiques et chimiques à rendre uniforme ces grandeurs qui provoquent le transport.

Ainsi, le transfert de matière peut être défini comme la migration d'un constituant d'un système depuis une région où sa concentration est élevée vers une autre région où sa concentration est moindre : c'est le déplacement sous l'effet d'un gradient de concentration, sans intervention des forces extérieures (agitation, pression,...).

Cette migration peut avoir lieu, soit sous l'influence du mouvement Brownien et on dit que l'on a affaire à la *diffusion moléculaire*, soit sous l'effet de la turbulence au sein du fluide et on dit que l'on a alors affaire à la *diffusion turbulente*.

La migration d'un constituant peut aussi avoir lieu sous l'effet de la *convection* qui est le transport lié au mouvement d'ensemble du fluide. La convection peut être naturelle ou forcée.

II.2. Diffusion moléculaire et transfert de matière

Les différentes opérations unitaires ont pour principe de base le transfert de matière et dans toutes les opérations de transfert de masse, la diffusion a lieu dans au moins une phase et souvent dans les deux (gaz-liquide), (gaz-solide) ou (liquide-solide).

Ainsi, par exemple, lors du phénomène d'absorption des gaz, le soluté diffuse à travers la phase gazeuse vers l'interface des deux phases puis à travers le liquide. Pour la distillation, le constituant le plus volatil diffuse à travers le liquide vers l'interface et quitte celle-ci pour diffuser dans la vapeur.

Dans le cas de la cristallisation, le soluté diffuse à travers la solution mère vers les cristaux et se dépose sur les surfaces solides.

Pour le procédé de séchage, l'eau diffuse à travers le solide à sécher vers la surface de celui-ci et fini par se vaporiser et diffuse comme vapeur dans le gaz qui peut être l'air ambiant.

II.3. Vitesse des constituants et flux de matière

II.3.1. Définitions

Le *flux de matière* est la quantité de matière qui traverse une surface perpendiculairement pendant une unité de temps (1s). C'est une grandeur vectorielle.

Le *flux de matière molaire* est exprimé en mol/s et le *flux de matière massique* est exprimé en kg/s.

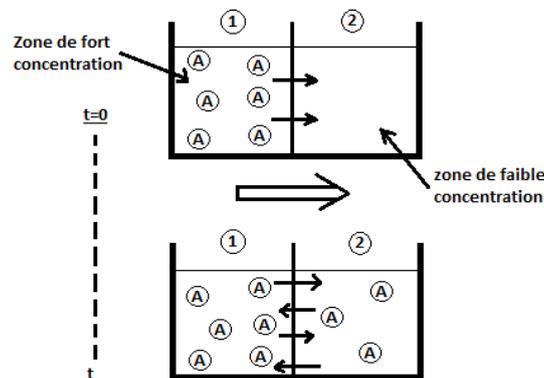
La densité de flux est le flux de matière par unité de surface (1m²). C'est également une grandeur vectorielle.

La *densité de flux de matière molaire* notée \vec{N}_A est exprimée en mol/m²s et la *densité de flux de matière massique* notée \vec{n}_A est exprimée en kg/m²s.

$$\text{Densité de flux} = \frac{\text{Flux}}{\text{Surface}}$$

D'une manière générale, le flux de transfert de matière est la somme du flux lié à la diffusion moléculaire et celui du flux lié au mouvement d'ensemble du fluide (convection).

Soit un soluté A réparti d'une manière déséquilibrée dans les deux phases 1 et 2. La phase 1 étant de forte concentration en A et la zone 2 de faible concentration en A. Le soluté A va migrer spontanément au cours du temps de la phase 1 vers la phase 2 en franchissant l'interface comme illustré sur le schéma suivant :



II.3.2. Densité de flux de transfert massique " \vec{n}_A "

La densité de flux de transfert massique s'exprime comme suit :

$$\vec{n}_A = \vec{j}_A + \bar{c}_A \vec{V}$$

\vec{V} est appelée vitesse massique moyenne ou vitesse de déplacement du barycentre massique.

Soit le système suivant composé de n constituants et \vec{V}_i étant la vitesse d'une espèce "i" de ce système.

La vitesse massique moyenne du système a pour expression : $\vec{V} = \frac{\sum \bar{c}_i \vec{V}_i}{\sum \bar{c}_i}$

\bar{c}_i étant la concentration massique en volume de l'espèce i

Ou bien : $\vec{V} = \frac{\bar{c}_A \cdot \vec{V}_A + \bar{c}_B \cdot \vec{V}_B + \bar{c}_C \cdot \vec{V}_C + \dots + \bar{c}_n \cdot \vec{V}_n}{\bar{c}_A + \bar{c}_B + \bar{c}_C + \dots + \bar{c}_n}$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{\bar{c}_A \vec{V}_A + \bar{c}_B \vec{V}_B + \bar{c}_C \vec{V}_C + \dots + \bar{c}_n \vec{V}_n}{\sum \bar{c}_i}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{\bar{c}_A}{\sum \bar{c}_i} \cdot \vec{V}_A + \frac{\bar{c}_B}{\sum \bar{c}_i} \cdot \vec{V}_B + \dots + \frac{\bar{c}_n}{\sum \bar{c}_i} \cdot \vec{V}_n$$

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot \vec{V}_i \quad \dots \dots \text{(II)}$$

$$\text{Par ailleurs : } \vec{J}_A = \bar{c}_A (\vec{V}_A - \vec{V})$$

Avec :

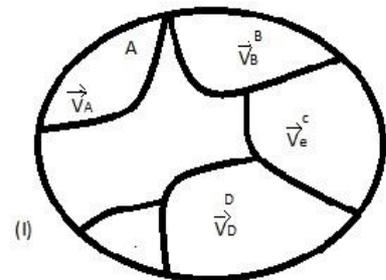
\vec{J}_A : Flux massique lié à la diffusion moléculaire

\vec{V}_A : C'est la vitesse du constituant A par rapport à la vitesse massique ou molaire moyenne, appelée vitesse de diffusion. Elle représente le mouvement propre du constituant ; c'est un mouvement relatif qui est dû au gradient de potentiel chimique du constituant.

$\vec{V}_A - \vec{V}$: vitesse de diffusion du corps A pour rapport à \vec{V}

\vec{V}_A : désigne une vitesse absolue par rapport à un repère fixe ou système de coordonnées fixes (qui peut être liée à une interface).

\vec{V} : vitesse massique moyenne.



$$\text{On a : } \vec{n}_A = \vec{J}_A + \bar{c}_A \vec{V}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_A = \bar{c}_A (\vec{V}_A - \vec{V}) + \bar{c}_A \vec{V}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_A = \bar{c}_A \vec{V}_A - \bar{c}_A \vec{V} + \bar{c}_A \vec{V}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{n}_A = \bar{c}_A \cdot \vec{V}_A}$$

$$\text{Ou encore : } \vec{n}_A = \bar{c}_A \vec{V}_A + \bar{c}_A \vec{V} - \bar{c}_A \cdot \vec{V}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_A = \bar{c}_A (\vec{V}_A - \vec{V}) + \bar{c}_A \vec{V}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_A = \bar{c}_A(\vec{V}_A - \vec{V}) + \bar{c}_A\left(\frac{\sum \bar{c}_i \vec{V}_i}{\sum \bar{c}_i}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_A = \bar{c}_A(\vec{V}_A - \vec{V}) + \frac{\bar{c}_A}{\sum \bar{c}_i} \cdot \sum \bar{c}_i \vec{V}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{n}_A = \vec{J}_A + \bar{x}_A \sum \vec{n}_i}$$

Pour le système précédent :

$$\vec{n}_A = \vec{J}_A + \bar{x}_A(\vec{n}_A + \vec{n}_B + \dots + \vec{n}_n) \quad (1)$$

$$\vec{n}_B = \vec{J}_B + \bar{x}_B(\vec{n}_A + \vec{n}_B + \dots + \vec{n}_n) \quad (2)$$

$$\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$\vec{n}_n = \vec{J}_n + \bar{x}_n(\vec{n}_A + \vec{n}_B + \dots + \vec{n}_n) \quad (n)$$

$$(1)+(2)\dots\dots\dots+(n) \Leftrightarrow$$

$$\vec{n}_A + \vec{n}_B + \dots + \vec{n}_n = (\vec{J}_A + \vec{J}_B + \dots + \vec{J}_n) + (\bar{x}_A + \bar{x}_B + \dots + \bar{x}_n)(\vec{n}_A + \vec{n}_B + \dots + \vec{n}_n)$$

$$\Rightarrow (\vec{n}_A + \vec{n}_B + \dots + \vec{n}_n) = (\vec{J}_A + \vec{J}_B + \dots + \vec{J}_n) + (\vec{n}_A + \vec{n}_B + \dots + \vec{n}_n)$$

$$\Rightarrow \vec{J}_A + \vec{J}_B + \dots + \vec{J}_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{J}_i = \vec{0}}$$

La somme de tous les flux massiques de diffusion est nulle.

II.3.3. Densité de flux de transfert molaire : \vec{N}_A

La densité de flux de transfert molaire a pour expression :

$$\vec{N}_A = \vec{J}_A^* + (C_A - \bar{V}^*)$$

Avec \bar{V}^* : Vitesse molaire moyenne.

$$\text{Or la vitesse molaire moyenne a pour expression : } \bar{V}^* = \frac{\sum c_i \vec{V}_i}{\sum c_i} \quad (\text{III})$$

$$\bar{V}^* = \frac{C_A \vec{V}_A + C_B \vec{V}_B + \dots + C_n \vec{V}_n}{\sum C_i}$$

Avec : $\sum C_i = C_A + C_B + \dots + C_n$

$$\vec{V}^* = \frac{C_A}{\sum C_i} \cdot \vec{V}_A + \frac{C_B}{\sum C_i} \vec{V}_B + \frac{C_C}{\sum C_i} \vec{V}_C + \dots + \frac{C_n}{\sum C_i} \vec{V}_n$$

$$\vec{V}^* = x_A \vec{V}_A + x_B \vec{V}_B + \dots + x_n \cdot \vec{V}_n$$

$$\vec{V}^* = \sum_{i=1}^n (x_i \vec{V}_i) \quad (\text{IV})$$

Or le flux molaire lié à la diffusion a pour expression : $\vec{J}_A^* = C_A(\vec{V}_A - \vec{V}^*)$

$$\text{On a : } \vec{N}_A = \vec{J}_A^* + C_A \cdot \vec{V}^*$$

$$\Rightarrow \vec{N}_A = C_A(\vec{V}_A - \vec{V}^*) + C_A \vec{V}^*$$

$$\Rightarrow \vec{N}_A = C_A \cdot \vec{V}_A - C_A \cdot \vec{V}^* + C_A \cdot \vec{V}^*$$

$$\Rightarrow \vec{N}_A = C_A \cdot \vec{V}_A \dots \quad (\text{V})$$

Par ailleurs :

$$\vec{N}_A = C_A \cdot \vec{V}_A - C_A \cdot \vec{V}^* + C_A \cdot \vec{V}^*$$

$$\Rightarrow \vec{N}_A = C_A(\vec{V}_A - \vec{V}^*) + C_A \left(\frac{\sum C_i \vec{V}_i}{\sum C_i} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{N}_A = C_A(\vec{V}_A - \vec{V}^*) + \frac{C_A}{\sum C_i} \times \sum C_i \vec{V}_i$$

$$\Rightarrow \vec{N}_A = \vec{J}_A^* + x_A \sum \vec{N}_i \dots \quad (\text{VI})$$

Pour le système précédent :

$$\vec{N}_A = \vec{J}_A^* + x_A(\vec{N}_A + \vec{N}_B + \dots + \vec{N}_n) \quad (1)$$

$$\vec{N}_B = \vec{J}_B^* + x_B(\vec{N}_A + \vec{N}_B + \dots + \vec{N}_n) \quad (2)$$

.

.

$$\vec{N}_n = \vec{J}_n^* + x_n(\vec{N}_A + \vec{N}_B + \dots + \vec{N}_n) \quad (\text{n})$$

(1)+(2)+...+(n)

$$\Leftrightarrow \vec{N}_A + \vec{N}_B + \dots + \vec{N}_n = (\vec{J}_A^* + \vec{J}_B^* + \dots + \vec{J}_n^*) + (x_A + x_B + \dots + x_n) \times (\vec{N}_A + \vec{N}_B + \dots + \vec{N}_n)$$

$$\Leftrightarrow \vec{J}_A^* + \vec{J}_B^* + \dots + \vec{J}_n^* = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum \vec{J}_i^* = \vec{0}$$

La somme de tous les flux molaire de diffusion est nulle.

Ainsi pour un système binaire A+B :

$$\text{On a : } \vec{J}_A^* + \vec{J}_B^* = \vec{0} \Rightarrow \vec{J}_A^* = -\vec{J}_B^*$$

$$\text{Ou encore : } \vec{J}_A + \vec{J}_B = \vec{0} \Rightarrow \vec{J}_A = -\vec{J}_B$$

Si l'un diffuse dans sens, l'autre se diffuse dans le sens inverse.

II.4. Première loi de FICK

Plaçons-nous dans un système unidirectionnel et considérons le flux de particules d'une certaine espèce. Les particules peuvent être des molécules, des atomes ou des ions, des électrons libres, etc. Soit $C(x, t)$ leur concentration spatio-temporelle exprimée en nombres de moles par unité de volume. En présence d'un gradient de concentration $\frac{\partial c}{\partial x}$, on admet qu'il s'établit un flux de particules dans le sens descendant le gradient, et que ce flux est proportionnel au gradient correspondant.

Ainsi, le flux molaire a pour expression : $\vec{J}_i^* = -D \frac{\partial c}{\partial x}$

Le flux massique va s'écrire : $\vec{J}_i = -D \cdot \frac{\partial C}{\partial x}$

NB : Le signe (-) indique la diminution de la concentration

D'une façon générale :

$$\text{Flux molaire : } \vec{J}_i^* = -D \overrightarrow{\text{grad}} C_i$$

$$\text{Flux massique : } \vec{J}_i = -D \overrightarrow{\text{grad}} \bar{C}_i$$

C'est la 1^{ère} Loi de FICK

La loi de FICK est formellement identique à loi de FOURRIER qui régit l'écoulement de la chaleur et qui a pour expression : $q = -k \frac{dT}{dx}$

Dans le cas d'un mélange binaire (A+B) :

$$\vec{j}_A^* = -D_{AB} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A \quad ; \quad \vec{j}_A = -D_{AB} \overrightarrow{\text{grad}} \bar{C}_A$$

D_{AB} étant le coefficient de diffusion de A dans B.

Le coefficient de diffusion de A dans B D_{AB} est fonction de la température, de la pression, du binaire considéré et parfois de la concentration totale.

Si la température T et la pression P sont constantes, alors la concentration totale C est constante (Cas des gaz). Ainsi, dans le cas où la concentration totale est constante, la loi de FICK va s'écrire :

On a : $C_A = y_A \cdot C$

D'où : $\vec{j}_A^* = -D_{AB} \overrightarrow{\text{grad}} C_A$

$$\Rightarrow \vec{j}_A^* = -D_{AB} \overrightarrow{\text{grad}} (y_A \cdot C)$$

$$\Rightarrow \vec{j}_A^* = -D_{AB} \cdot C \cdot \overrightarrow{\text{grad}} y_A$$

$$\vec{j}_A^* = -D_{AB} \cdot C \cdot \overrightarrow{\text{grad}} y_A$$

On a aussi : $\bar{C}_A = \bar{y}_A \cdot \rho$

D'où : $\vec{j}_A = -D_{AB} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \bar{C}_A$

$$\Rightarrow \vec{j}_A = -D_{AB} \overrightarrow{\text{grad}} (\bar{y}_A \cdot \rho)$$

$$\Rightarrow \vec{j}_A = -D_{AB} \cdot \rho \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \bar{y}_A$$

Pour le cas d'un mélange binaire (A+B) :

On a :

$$\vec{j}_A^* = -D_{AB} \overrightarrow{\text{grad}} C_A \quad (1)$$

Et : $\vec{j}_B^* = -D_{BA} \overrightarrow{\text{grad}} C_B \quad (2)$

Or : $C_B = C - C_A \Rightarrow \vec{j}_B^* = -D_{BA} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (C - C_A)$

$$\Rightarrow \vec{j}_B^* = -D_{BA} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C + D_{BA} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A$$

Comme la concentration C est constante alors : $\vec{j}_B^* = D_{BA} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A$

Par ailleurs, $\sum \vec{j}_i^* = \vec{0} \Rightarrow \vec{j}_A^* + \vec{j}_B^* = \vec{0}$

$$(1)+(2)=0 \Rightarrow -D_{AB} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A + D_{BA} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A = \vec{0}$$

$$\Rightarrow +D_{AB} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}C_A = D_{BA} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}C_A$$

$$\Rightarrow D_{AB} = D_{BA} \quad (\text{Cas des gaz})$$

II.5. Coefficient de diffusion

Les systèmes diffusionnels sont gouvernés par les coefficients de diffusion qui dépendent de plusieurs facteurs tels que la nature et la concentration des constituants, la nature et la concentration du milieu diffusionnel, la pression et enfin la température. Le coefficient de diffusion de l'espèce A dans le milieu B, noté D_{A-B} ou D_{AB} , a pour unité dans le système international m^2/s .

On distingue les coefficients de diffusion dans les gaz ainsi que les coefficients de diffusion dans les liquides.

II.5.1. Coefficient de diffusion dans les gaz

Selon la théorie cinétique des gaz, le coefficient de diffusion (pour les gaz parfaits) est proportionnel au facteur suivant :

$$D_G \sim \frac{T^{3/2}}{P \cdot \sigma M^{1/2}}$$

Où :

D_G : Coefficient de diffusion dans le gaz

T : Température du gaz (K)

P : Pression du gaz (N/m^2)

M : Masse molaire du gaz (kg/mol)

σ : Diamètre moléculaire (m)

$$\text{A température } T_1 \text{ et à pression } P_1 : D_{G_1} \sim \frac{T_1^{3/2}}{P_1 \sigma M^{1/2}}$$

$$\text{A température } T_2 \text{ et à pression } P_2 : D_{G_2} \sim \frac{T_2^{3/2}}{P_2 \sigma M^{1/2}}$$

$$\frac{D_{G_2}}{D_{G_1}} \Rightarrow D_{G_2} = D_{G_1} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

Cette relation permet de connaître le coefficient de diffusion à une température et pression connues s'il est déjà connu à une autre température et à une autre pression.

A titre indicatif, le coefficient de diffusion d'un gaz est de l'ordre de : 10^{-4} ou $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

II.5.2. Coefficient de diffusion dans les liquides

Contrairement aux gaz, il n'existe pas de théorie cinétique pour les liquides connue jusqu'à présent. Ainsi, les coefficients de diffusion des constituants dissous dans les liquides ne

peuvent pas être déterminés sur la base de considérations théoriques. Pour les solutions aqueuses, la relation suivante a été établie :

$$\frac{D \cdot T}{\mu} = \text{Constante}$$

$$\text{D'où : } \frac{D_1 \cdot T_1}{\mu_1} = \frac{D_2 \cdot T_2}{\mu_2} \Rightarrow D_2 = D_1 \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Il est donc aisé de trouver la valeur du coefficient de diffusion à une température et pression connues s'il est déjà connu à une autre température et à une autre pression.

A titre indicatif, le coefficient de diffusion d'un gaz dans l'eau est de l'ordre de $10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$.

Chapitre III

Bilan élémentaire de matière-Profil de concentration en écoulement laminaire

III.1. Introduction

L'objectif et la formulation des problèmes élémentaires de diffusion à partir des bilans élémentaires de matière effectués sur un élément de volume.

Un bilan de matière est effectué sur un élément de volume de dimension différentielle dans la direction du transfert de matière (Élément de volume perpendiculaire à la direction).

Ainsi :

1. Le bilan donnera une équation différentielle de 1^{er} ordre qui gouverne la distribution des flux. Dans cette équation, on peut remplacer le flux de matière par la relation qui le relie au gradient de concentration.
2. Le bilan donnera une équation différentielle de 2^{ème} ordre qui gouverne la distribution des concentrations.

Les constantes d'intégration qui vont apparaître seront déterminées par les conditions aux limites qui indiquent les valeurs de concentration ou de flux de surfaces frontières (interfaces).

On distingue deux cas :

1. Système non réactif : dans ce cas, le soluté traverse l'élément de volume sans subir de transformation chimique (pas de réaction chimique).
2. Système réactif : dans ce cas, le soluté traverse l'élément de volume tout en subissant une transformation chimique (système avec réaction chimique) et cette réaction chimique peut être soit homogène ou hétérogène :
 - Réaction chimique homogène : la réaction est la même dans tout le volume et le terme source apparaîtra alors dans le bilan.
 - Réaction chimique hétérogène : la réaction a lieu dans quelques sites seulement et le terme source apparaîtra alors dans les conditions aux limites.

III.2. Bilan de matière-Conditions aux limites

Un bilan de matière élémentaire effectué sur un élément de volume de dimension différentielle dV dans la direction du transfert de matière a pour expression générale :

$$\begin{aligned} & \text{[Flux molaire entrant dans le volume } dV] \\ & \quad - \\ & \quad \text{[Flux molaire sortant du volume } dV] \\ & \quad +/ - \\ & \text{[Flux molaire lié à la production/consommation par la réaction homogène dans le volume } dV] \\ & \quad = \\ & \text{[Flux molaire accumulé dans le volume } dV] \end{aligned}$$

Le signe + : indique une production.

Le signe - : indique une consommation.

Ainsi pour une espèce A, le bilan de matière élémentaire effectué sur un élément de volume de dimension différentielle dV aura pour expression :

$$\begin{aligned}
 & \text{[Nombre de moles de A entrant dans le volume } dV] \\
 & \quad - \\
 & \quad \text{[Nombre de moles de A sortant du volume } dV] \\
 & \quad +/ - \\
 & \text{[Nombre de moles de A produites ou consommées par la réaction homogène dans le volume } dV] \\
 & \quad = \\
 & \text{[Nombre de moles de A accumulées dans le volume } dV]
 \end{aligned}$$

Dans le cas d'un régime permanent (indépendant du temps), le terme lié à l'accumulation s'annule. Par ailleurs, si le système est non réactif (Rien n'est consommé et rien n'est produit), le terme lié à la production/consommation s'annule également. Ainsi, dans ce cas, le bilan de matière élémentaire aura pour expression :

$$\text{[Flux molaire entrant dans le volume } dV] - \text{[Flux molaire sortant du volume } dV] = 0$$

La résolution de l'équation obtenue pour ce bilan de matière donnera lieu à :

1. Une équation différentielle de 1^{er} ordre pour les flux.

L'espèce A peut entrer et sortir de l'élément de volume par diffusion \vec{J}_A^* et par le mouvement du milieu $C_A \vec{V}^*$.

2. Une équation différentielle de 2^{ème} ordre pour les concentrations.

La résolution de ces deux équations différentielles va générer deux constantes d'intégration C_1 et C_2 à déterminer par les conditions aux limites. Elles seront déterminées aux surfaces frontières (interfaces) :

Conditions aux limites utilisées :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_A = C_{A0} \text{ ou } y_A = y_{A0} & \text{pour les concentrations} \\ N_A = N_{A0} & \text{pour les flux} \end{array} \right.$$

III.3. Diffusion à travers un gaz stagnant ou gaz immobile

III.3.1. Définition

On dit que l'on a diffusion à travers une phase stationnaire lorsque l'interface (ou interphase) est perméable à un seul constituant. C'est le cas de la diffusion d'une substance A à travers la phase stationnaire (gaz stagnant ou immobile) B.

Exemple : Absorption de la vapeur d'eau du mélange (Air (B)-Vapeur d'eau (A)) par une solution d'alumine C.

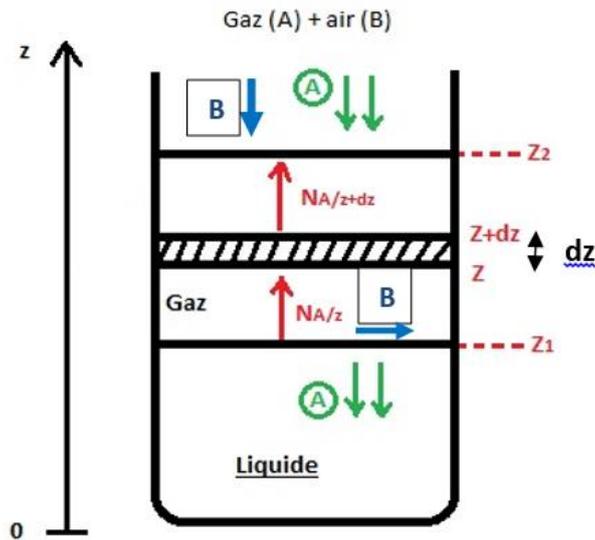


Figure III.1 : Schéma représentatif d'une diffusion à travers une phase stagnante

III.3.2. Equations régissant la diffusion à travers un gaz stagnant

Soit le cas d'un mélange binaire (A+B) tel que l'espèce B est un gaz immobile à travers duquel l'espèce A va diffuser pour être absorbée par une phase liquide.

La densité de flux pour l'espèce A a pour expression :

$$\vec{N}_A = \vec{J}_A^* + y_A \cdot (\vec{N}_A + \vec{N}_B)$$

Comme dans la phase gazeuse, l'espèce B est immobile alors : $\vec{N}_B = \vec{0}$

$$\text{D'où : } \vec{N}_A = \vec{J}_A^* + y_A \cdot \vec{N}_A \Rightarrow \vec{N}_A = \frac{\vec{J}_A^*}{1-y_A}$$

D'après la 1^{ère} loi de Fick, on a : $\vec{J}_A^* = -D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A$

Comme dans ce cas, le transfert est considéré unidirectionnel selon zz', alors la 1^{ère} loi de

Fick devient : $\vec{J}_A^* = -D \cdot \frac{\partial C_A}{\partial z} \Rightarrow J_A^* = -D \cdot \frac{dC_A}{dz}$

A pression P et température T constantes, le coefficient de diffusion D et la concentration totale C sont constants.

Or : $C_A = y_A \cdot C$ ce qui va conduire à : $J_A^* = -D \cdot C \cdot \frac{dy_A}{dz}$

L'expression de la densité de flux peut enfin s'écrire comme suit :

$$N_A = - \frac{D \cdot C}{1 - y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz}$$

Bilan de matière sur un élément différentiel

Dans ce qui suit, un bilan de matière sera établi sur un élément différentiel dz (voir schéma ci-dessus). Dans le cas de l'absorption, le système est non réactif (pas de réaction chimique) et si on considère que le régime est permanent, alors le bilan de matière peut s'écrire comme suit :

$$[\text{Flux molaire entrant de A dans le volume } dV] - [\text{Flux molaire sortant de A du volume } dV] = 0$$

Comme la section S est indépendante de la côte z , l'équation du bilan de matière devient :

$$S \cdot \vec{N}_{Az} - S \cdot \vec{N}_{Az+dz} = \vec{0}$$
$$\vec{N}_{Az} - \left(\vec{N}_{Az} + \frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} \right) = \vec{0}$$

$$\text{D'où : } - \frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} = \vec{0} \text{ d'où : } \vec{N}_{Az} = \text{constante}$$

Ainsi, la densité de flux de A est constante car elle est indépendante de la côte z .

$-\frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} = \vec{0}$ est une équation différentielle de 1^{er} ordre qui gouverne la distribution des flux.

$$\text{Par ailleurs : } N_A = - \frac{D \cdot C}{1 - y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz}$$

$$\text{D'où : } - \frac{d}{dz} \left(- \frac{D \cdot C}{1 - y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz} \right) = 0$$

A pression P et température T constantes, le coefficient de diffusion D et la concentration totale C sont constants et aussi indépendants de la côte z .

$$\text{D'où : } D \cdot C \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz} \right) = 0$$

$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz} \right) = 0$ est une équation différentielle de 2^{ème} ordre qui gouverne la distribution des concentrations.

La résolution de cette équation différentielle va générer :

- Une constante C_1 ($C_1 \in \mathbb{R}$) lors de la 1^{ère} intégration ;
- Une constante C_2 ($C_2 \in \mathbb{R}$) lors de la 2^{ème} intégration.

La solution de cette équation différentielle aura pour expression : $-\ln(1 - y_A) = C_1 z + C_2$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 peuvent être déterminées grâce aux conditions aux limites.

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} \text{En } z = z_1 \text{ (Interface gaz-liquide) : } y_A = y_{A1} \\ \text{En } z = z_2 \text{ (Extrémité supérieure de la phase gazeuse) : } y_A = y_{A2} \end{cases}$$

Ceci va générer un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \ln(1 - y_{A1}) = C_1 z_1 + C_2 \\ \ln(1 - y_{A2}) = C_1 z_2 + C_2 \end{cases}$$

Après résolution du système de deux équations à deux inconnues, on obtient les constantes d'intégrations C_1 et C_2 telles que :

$$C_1 = \frac{1}{z_2 - z_1} \cdot \ln\left(\frac{1 - y_{A1}}{1 - y_{A2}}\right)$$

$$\text{Et : } C_2 = - \frac{(z_2 - z_1) \cdot \ln(1 - y_{A1}) + z_1 \cdot \ln\left(\frac{1 - y_{A1}}{1 - y_{A2}}\right)}{z_2 - z_1}$$

Sachant que : $y_A + y_B = 0 \Rightarrow 1 - y_{A1} = y_{B1}$ et $1 - y_{A2} = y_{B2}$

Ainsi l'équation : $-\ln(1 - y_A) = C_1 z + C_2$ devient :

$$-\ln(y_B) = \frac{1}{z_2 - z_1} \cdot \ln\left(\frac{y_{B1}}{y_{B2}}\right) \cdot z - \frac{(z_2 - z_1) \cdot \ln(y_{B1}) + z_1 \cdot \ln\left(\frac{y_{B1}}{y_{B2}}\right)}{z_2 - z_1}$$

$$\Rightarrow -\ln(y_B) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \ln\left(\frac{y_{B1}}{y_{B2}}\right) - \ln(y_{B1})$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y_{B1}}{y_B}\right) = \ln\left(\frac{y_{B1}}{y_{B2}}\right)^{\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{y_{B1}}{y_B} = \left(\frac{y_{B1}}{y_{B2}}\right)^{\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \quad \text{C'est l'équation du profil de concentration } y_B = f(z)$$

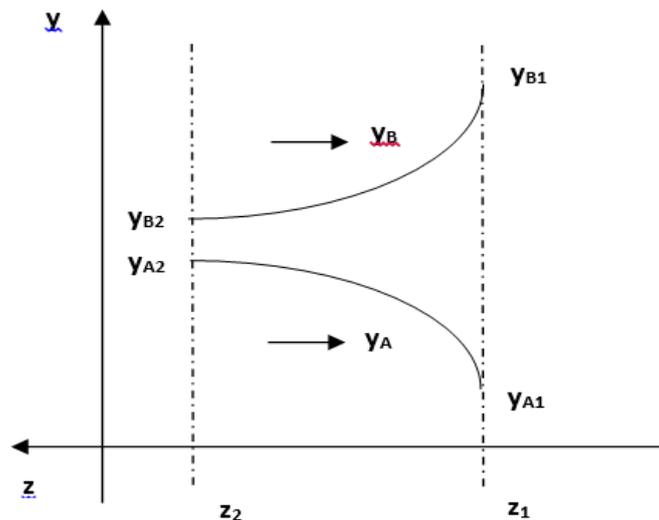


Figure III.2 : Evolution des concentrations dans le cas d'une diffusion à travers une phase stagnante

Par ailleurs, on a l'expression de la densité de flux :

$$\vec{N}_A = - \frac{D \cdot C}{1 - y_A} \cdot \frac{\partial y_A}{\partial z}$$

Sachant que le mouvement de diffusion de l'espèce A est descendant et que l'axe d'orientation zz' est ascendant alors la projection du vecteur \vec{N}_A sur zz' donnera :

$$N_A = \frac{D \cdot C}{1 - y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz}$$

$$\Rightarrow N_A \cdot dz = \frac{D \cdot C}{1 - y_A} \cdot dy_A$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow N_A \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz &= D \cdot C \cdot \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{dy_A}{1-y_A} \\ \Rightarrow N_A \cdot z \Big|_{z_1}^{z_2} &= -D \cdot C \cdot \ln(1-y_A) \Big|_{y_{A1}}^{y_{A2}} \\ \Rightarrow N_A(z_2 - z_1) &= D \cdot C \cdot \ln\left(\frac{1-y_{A1}}{1-y_{A2}}\right) \\ \Rightarrow N_A \cdot L &= D \cdot C \cdot \ln\left(\frac{y_{B1}}{y_{B2}}\right) \end{aligned}$$

Avec : $z = z_2 - z_1$, $1 - y_{A1} = y_{B1}$ et $1 - y_{A2} = y_{B2}$

Enfin : $N_A = \frac{D \cdot C}{z} \cdot \ln\left(\frac{y_{B1}}{y_{B2}}\right)$ C'est l'équation de la densité de flux.

A pression P et à température T constantes et d'après la loi des gaz parfaits, on a : $C = \frac{P_t}{R \cdot T}$

D'après la loi de Dalton : $y_{B1} = \frac{P_{B1}}{P_t}$ et $y_{B2} = \frac{P_{B2}}{P_t}$

Soit \bar{P}_B la moyenne logarithmique définie comme suit :

$$\bar{P}_B = \frac{P_{B1} - P_{B2}}{\ln \frac{P_{B1}}{P_{B2}}} \Rightarrow \ln \frac{P_{B1}}{P_{B2}} = \frac{P_{B1} - P_{B2}}{\bar{P}_B}$$

$$\text{D'où : } N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{P_{B1} - P_{B2}}{\bar{P}_B} = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{(P_t - P_{A1}) - (P_t - P_{A2})}{\bar{P}_B}$$

$$\text{Pour avoir enfin : } N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{P_{A2} - P_{A1}}{\bar{P}_B}$$

Cette dernière relation peut s'écrire d'une façon condensée comme suit :

$$N_A = k_p \cdot \Delta P_A$$

$$\text{Avec : } \Delta P_A = P_{A2} - P_{A1} \text{ et } k_p = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z \cdot \bar{P}_B}$$

Il est aussi possible d'exprimer la densité de flux N_A en fonction de la fraction molaire y_A .

$$N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{P_{A2} - P_{A1}}{\bar{P}_B} = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{y_{A2} \cdot P_t - y_{A1} \cdot P_t}{\bar{P}_B}$$

Sachant qu'en utilisant la loi de Dalton : $P_{A1} = y_{A1} \cdot P_t$ et $P_{A2} = y_{A2} \cdot P_t$

$$\text{Or : } \bar{P}_B = \frac{P_{B1} - P_{B2}}{\ln \frac{P_{B1}}{P_{B2}}} = \frac{y_{B1} \cdot P_t - y_{B2} \cdot P_t}{\ln \frac{y_{B1} \cdot P_t}{y_{B2} \cdot P_t}} = P_t \cdot \frac{y_{B1} - y_{B2}}{\ln \frac{y_{B1}}{y_{B2}}} = P_t \cdot \bar{y}_B (ML)$$

Ici $\bar{y}_B (ML)$ représente la moyenne logarithmique en fraction molaire.

$$\text{D'où : } N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{y_{A2} \cdot P_t - y_{A1} \cdot P_t}{P_t \cdot \bar{y}_B (ML)} \Rightarrow N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{y_{A2} - y_{A1}}{\bar{y}_B (ML)}$$

Cette dernière relation peut s'écrire d'une façon condensée comme suit :

$$N_A = k_y \cdot \Delta y_A$$

$$\text{Avec : } \Delta y_A = y_{A2} - y_{A1} \text{ et } k_y = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z \cdot \bar{y}_B (ML)}$$

Il est également possible d'exprimer la densité de flux N_A en fonction de la concentration molaire C_A .

$$N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{y_{A2} - y_{A1}}{\bar{y}_B (ML)} = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot Z} \cdot \frac{\frac{C_{A2}}{C_t} - \frac{C_{A1}}{C_t}}{\bar{y}_B (ML)}$$

$$\text{Or : } \bar{y}_{B(ML)} = \frac{y_{B2} - y_{B1}}{\ln \frac{y_{B2}}{y_{B1}}} = \frac{\frac{C_{B1}}{C_t} - \frac{C_{B2}}{C_t}}{\ln \frac{\frac{C_{B1}}{C_t}}{\frac{C_{B2}}{C_t}}} = \frac{1}{C_t} \bar{C}_{B(ML)}$$

Sachant que : $C_{A1} = y_{A1} \cdot C_t$ et $C_{A2} = y_{A2} \cdot C_t$

Ici $\bar{C}_{B(ML)}$ représente la moyenne logarithmique en concentration molaire.

$$N_A = \frac{D \cdot P_t}{R.T.Z} \cdot \frac{\frac{C_{A2}}{C_t} - \frac{C_{A1}}{C_t}}{\frac{1}{C_t} \bar{C}_{B(ML)}} \Rightarrow N_A = \frac{D \cdot P_t}{R.T.Z} \cdot \frac{C_{A2} - C_{A1}}{\bar{C}_{B(ML)}}$$

Cette dernière relation peut s'écrire d'une façon condensée comme suit :

$$N_A = k_C \cdot \Delta C_A$$

$$\text{Avec : } \Delta C_A = C_{A2} - C_{A1} \text{ et } k_C = \frac{D \cdot P_t}{R.T.Z \cdot \bar{C}_{B(ML)}}$$

Récapitulation :

$$\text{On a : } N_A = k_P \cdot \Delta P_A ; N_A = k_y \cdot \Delta y_A ; N_A = k_C \cdot \Delta C_A$$

Avec :

N_A : représente la densité de flux.

$\Delta P_A, \Delta y_A$ et ΔC_A : représentent une différence de potentiel ou une force motrice.

k_P, k_y et k_C : représentent le coefficient de transfert de matière lié à la diffusion.

Par analogie avec un système électrique qui est régi par la loi d'Ohm :

$$U = R \cdot I$$

Où :

U : Différence de potentiel (DDP)

R : Résistance

I : Intensité de courant

Par ailleurs, la conductance étant définie comme étant l'inverse de la résistance ($K=1/R$)

$$\text{alors : } U = I/K \cdot I \Rightarrow I = K \cdot U$$

Ainsi, le système diffusionnel considéré est parfaitement analogue à un système électrique et le coefficient de diffusion D peut être assimilé à une conductance en électricité.

III.4. Contre diffusion équimolaire

La contre diffusion équimolaire est rencontrée dans les procédés de distillation et de rectification.

Exemple : Distillation d'un mélange binaire homogène (A) Alcool - (E) Eau

Les caractéristiques du mélange liquide sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(A) Alcool, } T_{eb} = 78,37 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \text{(E) Eau, } T_{eb} = 100 \text{ } ^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

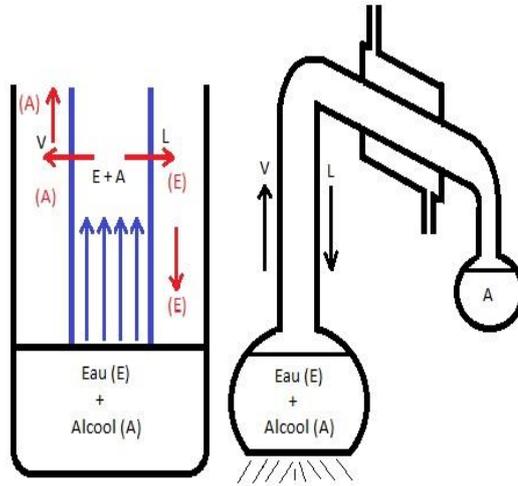


Figure III.3 : Schéma de la distillation d'un mélange binaire homogène

Dans ce cas, on est en présence d'un mélange binaire (A + B).

Pour l'espèce A, la densité de flux a pour expression :

$$\vec{N}_A = \vec{J}_A^* + y_A \cdot (\vec{N}_A + \vec{N}_B)$$

Comme dans la phase gazeuse, l'espèce A diffuse dans un sens et l'espèce B diffuse dans le sens inverse, alors : $\vec{N}_A + \vec{N}_B = \vec{0}$

$$\text{D'où : } \vec{N}_A = \vec{J}_A^*$$

$$\text{D'après la 1}^{\text{ère}} \text{ loi de Fick, on a : } \vec{J}_A^* = -D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A \Rightarrow \vec{J}_A^* = -D \cdot \frac{\partial C_A}{\partial z}$$

A pression P et température T constantes, les termes D et C sont constants et aussi indépendants de la côte z.

$$\text{Or : } C_A = y_A \cdot C_t$$

L'expression de la densité de flux peut enfin s'écrire comme suit :

$$N_A = -D \cdot C_t \cdot \frac{dy_A}{dz}$$

Bilan de matière sur un élément différentiel :

Dans le cas de la distillation, le système est non réactif (pas de réaction chimique) et si on considère un régime permanent, alors le bilan de matière peut s'écrire comme suit :

$$[\text{Flux molaire entrant de A dans le volume } dV] - [\text{Flux molaire sortant de A du volume } dV] = 0$$

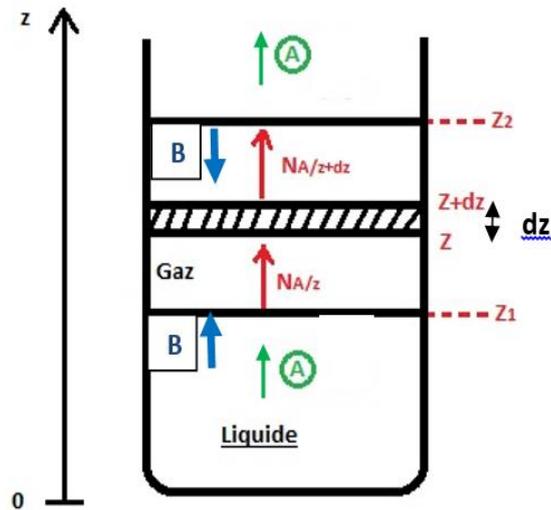


Figure III.4 : Schéma représentatif d'un bilan de matière élémentaire dans le cas de la distillation d'un mélange binaire homogène

Comme la section S est indépendante de la cote z , l'équation du bilan de matière devient :

$$S \cdot \vec{N}_{Az} - S \cdot \vec{N}_{Az+dz} = \vec{0}$$

$$\vec{N}_{Az} - \left(\vec{N}_{Az} + \frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} \right) = \vec{0}$$

D'où : $-\frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} = \vec{0}$ d'où : $\vec{N}_{Az} = \text{constante}$

Ainsi, la densité de flux de A est constante car elle est indépendante de la cote z .

$-\frac{d\vec{N}_{Az}}{dz} = \vec{0}$ est une équation différentielle de 1^{er} ordre qui gouverne la distribution des flux.

Par ailleurs, on a : $N_A = -D.C. \frac{dy_A}{dz} \Rightarrow -\frac{d}{dz} \left(-D.C. \frac{dy_A}{dz} \right) = 0 \Rightarrow -D.C. \frac{d}{dz} \left(\frac{dy_A}{dz} \right) = 0$

D'où : $\frac{d}{dz} \left(\frac{dy_A}{dz} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y_A}{dz^2} = 0$

$\frac{d^2 y_A}{dz^2} = 0$ est une équation différentielle de 2^{ème} ordre qui gouverne la distribution des concentrations.

La résolution de cette équation différentielle va générer :

- Une constante C_1 ($C_1 \in \mathbb{R}$) lors de la 1^{ère} intégration ;
- Une constante C_2 ($C_2 \in \mathbb{R}$) lors de la 2^{ème} intégration.

La solution de cette équation différentielle aura pour expression : $y_A = C_1 z + C_2$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 peuvent être déterminées grâce aux conditions aux limites.

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} \text{En } z = z_1 \text{ (Interface gaz-liquide)} : y_A = y_{A1} \\ \text{En } z = z_2 \text{ (Extrémité supérieure de la phase gazeuse)} : y_A = y_{A2} \end{cases}$$

Ceci va générer un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} y_{A1} = C_1 z_1 + C_2 \\ y_{A2} = C_1 z_2 + C_2 \end{cases}$$

Après résolution, on obtient les constantes d'intégrations C_1 et C_2 :

$$C_1 = \frac{y_{A1} - y_{A2}}{z_1 - z_2} \quad \text{et} \quad C_2 = y_{A1} - \frac{y_{A1} - y_{A2}}{z_1 - z_2} z_1$$

En remplaçant les constantes d'intégrations C_1 et C_2 obtenues, l'équation : $y_A = C_1 z + C_2$ devient :

$$y_A = y_{A1} + \frac{y_{A1} - y_{A2}}{z_1 - z_2} (z - z_1) \quad \text{C'est l'équation du profil de concentration } y_A = f(z)$$

Par ailleurs, on a l'expression de la densité de flux :

$$\begin{aligned} N_A &= -D.C. \frac{dy_A}{dz} \Rightarrow \\ \Rightarrow N_A \cdot dz &= -D.C. dy_A \\ \Rightarrow N_A \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz &= -D.C. \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} dy_A \\ \Rightarrow N_A \cdot z \Big|_{z_1}^{z_2} &= -D.C. y_A \Big|_{y_{A1}}^{y_{A2}} \\ \Rightarrow N_A (z_2 - z_1) &= -D.C. (y_{A2} - y_{A1}) \\ \Rightarrow N_A (z_2 - z_1) &= D.C. (y_{A1} - y_{A2}) \\ \Rightarrow N_A &= \frac{D.C.}{(z_2 - z_1)} \cdot (y_{A1} - y_{A2}) \\ \Rightarrow N_A &= \frac{D.C.}{z} \cdot (y_{A1} - y_{A2}) \end{aligned}$$

Avec : $z = z_2 - z_1$

A pression P et température T constantes et d'après la loi des gaz parfaits, on a : $C_t = \frac{P_t}{R.T}$

$$N_A = \frac{D.P_t}{R.T.z} (y_{A1} - y_{A2}) \quad \text{C'est l'équation de la densité de flux.}$$

Cette dernière relation peut s'écrire d'une façon condensée comme suit :

$$N_A = k_y \cdot \Delta y_A$$

$$\text{Avec : } \Delta y_A = y_{A2} - y_{A1} \quad \text{et} \quad k_y = \frac{D.P_t}{R.T.z}$$

Il est aussi possible d'exprimer la densité de flux N_A en fonction de la pression.

$$\text{En utilisant la loi de Dalton : } y_{A1} = \frac{P_{A1}}{P_t} \quad \text{et} \quad y_{A2} = \frac{P_{A2}}{P_t}$$

L'équation : $N_A = \frac{D.P_t}{R.T.z} \cdot (y_{A1} - y_{A2})$ peut s'écrire alors :

$$N_A = \frac{D.P_t}{R.T.z} \cdot \left(\frac{P_{A1}}{P_t} - \frac{P_{A2}}{P_t} \right)$$

$$\text{Pour avoir enfin : } N_A = \frac{D}{R.T.z} \cdot (P_{A1} - P_{A2})$$

Cette dernière relation peut s'écrire d'une façon condensée comme suit :

$$N_A = k_P \cdot \Delta P_A$$

$$\text{Avec : } \Delta P_A = P_{A2} - P_{A1} \quad \text{et} \quad k_P = \frac{D}{R.T.z}$$

Il est également possible d'exprimer la densité de flux N_A en fonction de la concentration molaire C_A .

Sachant que : $y_{A1} = \frac{C_{A1}}{C}$ et $y_{A2} = \frac{C_{A2}}{C}$

L'équation : $N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot (y_{A1} - y_{A2})$ peut s'écrire alors : $N_A = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot \left(\frac{C_{A1}}{C} - \frac{C_{A2}}{C} \right)$

Pour avoir enfin : $N_A = \frac{D}{R \cdot T \cdot z \cdot C} \cdot (C_{A1} - C_{A2})$

Cette dernière relation peut s'écrire d'une façon condensée comme suit :

$$N_A = k_C \cdot \Delta C_A$$

Avec : $\Delta C_A = C_{A2} - C_{A1}$ et $k_C = \frac{D}{R \cdot T \cdot z \cdot C}$

Comparaison entre la diffusion à travers une phase stagnante (DPS) et la contre diffusion équimolaire (CDE)

Pour la DPS : $N_{A \text{ DPS}} = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot \frac{P_{A2} - P_{A1}}{P_B}$ (i)

Pour la CDE : $N_{A \text{ CDE}} = \frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot \left(\frac{P_{A1} - P_{A2}}{P_t} \right)$ (ii)

$$\frac{(i)}{(ii)} : \frac{N_{A \text{ DPS}}}{N_{A \text{ CDE}}} = \frac{\frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot \frac{P_{A2} - P_{A1}}{P_B}}{\frac{D \cdot P_t}{R \cdot T \cdot z} \cdot \left(\frac{P_{A1} - P_{A2}}{P_t} \right)} = \frac{P_B}{P_t}$$

Cas des solutions diluées : $\frac{P_B}{P_t} \rightarrow 1 \Rightarrow \bar{P}_B \approx P_t$

Chapitre IV

Equation générale pour un mélange binaire-Equation de continuité

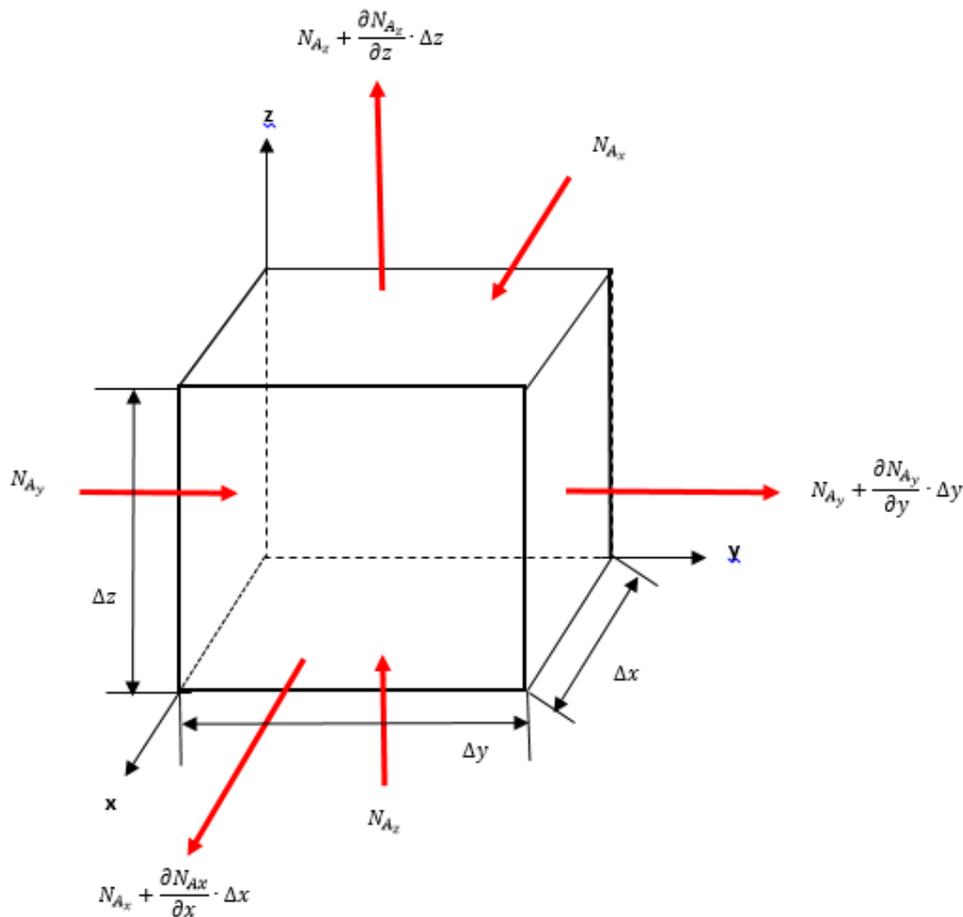
IV.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'établir l'équation générale pour un mélange binaire ainsi que l'équation de continuité et enfin trouver l'expression de la 2^{ème} loi de FICK.

L'équation générale peut être établie à partir d'un bilan sur un élément différentiel ou fini. C'est l'exemple d'un cube de volume ΔV tel que $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

On s'intéresse au passage d'une espèce A à travers un élément de volume ΔV . On considère le mouvement de l'espèce A dans un système tridirectionnel et le flux est perpendiculaire à la section de passage.

Le passage de l'espèce A à travers l'élément de volume ΔV est schématisé comme suit :



IV.2. Equation de continuité

Pour retrouver l'équation de continuité, il est nécessaire d'établir un bilan de matière sur un élément de fluide de volume ΔV . Le bilan de matière global s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{[Nombre de moles de A entrant dans le volume dV]} \\ & \quad - \\ & \quad \text{[Nombre de moles de A sortant du volume dV]} \\ & \quad +/ - \\ & \text{[Nombre de moles de A produites ou consommées par la réaction homogène dans le volume dV]} \\ & \quad = \\ & \text{[Nombre de moles de A accumulées dans le volume dV]} \end{aligned}$$

IV.2.1. Bilan de matière molaire

Un bilan de matière molaire pour un mélange binaire (A+B) sera établi. Pour faciliter le calcul, le bilan sera établi en trois étapes.

Pour l'espèce A, le bilan sera comme suit :

Etape 1 : Calcul du terme

$$\begin{aligned} & \text{[Nombre de moles de A entrant dans dV]} - \text{[Nombre de moles de A sortant de dV]} \\ & = \left[N_{Ax} - \left(N_{Ax} + \frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} \cdot \Delta x \right) \right] \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t + \left[N_{Ay} - \left(N_{Ay} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} \cdot \Delta y \right) \right] \Delta x \cdot \Delta z \cdot \Delta t \\ & \quad + \left[N_{Az} - \left(N_{Az} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \cdot \Delta z \right) \right] \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Par les unités, il est facile de vérifier que le terme $\left[N_{Ax} - \left(N_{Ax} + \frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} \cdot \Delta x \right) \right] \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$ représente le nombre de moles.

$$\text{Unités : } \overbrace{\left[N_{Ax} - \left(N_{Ax} + \frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} \cdot \Delta x \right) \right] \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t}^{\text{Nombre de moles}}_{\Delta S}$$

$N_{Ax} - \left(N_{Ax} + \frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} \cdot \Delta x \right)$: Densité de flux molaire (mol/m².s)

$\Delta y \cdot \Delta z$: Section de passage (m²)

Δt : Temps (S)

Après calcul, l'étape 1 devient :

$$\begin{aligned} & \text{Nombre de moles de A entrant dans dV} - \text{[Nombre de moles de A sortant de dV]} \\ & = - \underbrace{\left(\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \right)}_{\text{div}(\vec{N}_A)} \underbrace{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z}_{\Delta V} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Enfin :

$$[\text{Nombre de moles de A entrant dans } dV] - [\text{Nombre de moles de A sortant de } dV] \\ = -\text{div}(\vec{N}_A) \cdot \Delta V \cdot \Delta t \dots \dots \dots (1)$$

Etape 2 : Calcul du terme [Nombre de moles de A accumulées dans le volume dV]

On a la variation du nombre de mole de A dans ΔV pendant un temps Δt . Le nombre de mole qui reste dans le volume représente l'accumulation.

$$[\text{Nombre de moles de A accumulées dans le volume } dV] = \Delta C_A \cdot \Delta V \dots \dots \dots (2)$$

Par les unités, il est facile de vérifier que le terme $\Delta C_A \cdot \Delta V$ représente le nombre de moles.

Etape 3 : Calcul du terme

[Nombre de moles de A produites ou consommées par la réaction homogène]

Le nombre de mole de A produit par la réaction chimique représente la production.

$$\text{Production} = R_A \cdot \Delta V \cdot \Delta t \dots \dots \dots (3)$$

Avec : $R_A = \frac{\partial C_A}{\partial t}$ Vitesse de la réaction chimique ($\frac{\text{mol}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}}$)

Il est à noter que si dans le cas où l'espèce A est consommée, le terme consommation est le même que celui représentant le terme production mais précédé du signe (-).

$$\text{Consommation} = -R_A \cdot \Delta V \cdot \Delta t$$

Le bilan à partir des équations (1), (2) et (3) donnera :

$$(\text{Entrée}) - (\text{Sortie}) + (\text{Production}) = (\text{Accumulation})$$

$$\Rightarrow -\text{div}(\vec{N}_A) \cdot \Delta V \cdot \Delta t + R_A \cdot \Delta V \cdot \Delta t = \Delta C_A \cdot \Delta V$$

$$\Rightarrow -\text{div}(\vec{N}_A) + R_A = \frac{\Delta C_A}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\partial C_A}{\partial t} = -\text{div}(\vec{N}_A) + R_A \dots \dots \dots (I)$$

Pour l'espèce B, le bilan sera comme suit :

En procédant comme précédemment, il est aisé de retrouver l'équation finale pour l'espèce B qui est similaire à celle obtenue pour l'espèce A.

$$\text{On a : } \frac{\partial C_B}{\partial t} = -\text{div}(\vec{N}_B) + R_B \dots \dots \dots (II)$$

$$\begin{aligned}
\text{(I)+(II)} : \frac{\partial C_A}{\partial t} + \frac{\partial C_B}{\partial t} &= -\text{div}(\vec{N}_A) - \text{div}(\vec{N}_B) + R_A + R_B \\
\Rightarrow \frac{\partial(C_A + C_B)}{\partial t} &= -\text{div}(\vec{N}_A + \vec{N}_B) + R_A + R_B \\
\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} &= -\text{div}(\vec{N}_A + \vec{N}_B) + R_A + R_B
\end{aligned}$$

La vitesse molaire moyenne ou encore la vitesse du barycentre molaire du système a pour expression : $\vec{V}^* = \sum C_i \cdot \vec{V}_i$

$$\text{Et dans le cas du binaire (A+B)} : \vec{V}^* = \frac{C_A \cdot \vec{V}_A + C_B \cdot \vec{V}_B}{C} \Rightarrow C \cdot \vec{V}^* = \boxed{C_A \cdot \vec{V}_A} + \boxed{C_B \cdot \vec{V}_B}$$

Les termes $C_A \cdot \vec{V}_A$ et $C_B \cdot \vec{V}_B$ représentent respectivement les densités de flux \vec{N}_A et \vec{N}_B

$$\text{D'où} : C \cdot \vec{V}^* = \vec{N}_A + \vec{N}_B$$

$$\text{Et enfin} : \frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div}(C \cdot \vec{V}^*) + R_A + R_B \dots \dots \dots \text{(III)}$$

On peut distinguer deux types de systèmes : système réactif et système non réactif.

- Cas d'un système non réactif : $R_A + R_B = 0$

$$\text{(III)} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div}(C \cdot \vec{V}^*)$$

Et si en plus la concentration totale du système $C = \text{Constante}$ (Si la température et la pression sont constantes) :

$$\text{(III)} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \Rightarrow -\text{div}(C \vec{V}^*) = 0$$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{V}^*) = 0$$

Il est important de noter que C_A et C_B peuvent évoluer mais la somme $C_A + C_B$ reste constante.

- Cas d'un système réactif : $R_A + R_B \neq 0$

$$C = \text{Constante} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \Rightarrow -\text{div}(C \vec{V}^*) + R_A + R_B = 0$$

$$\text{(III)} \Rightarrow \text{div}(\vec{V}^*) = \frac{R_A + R_B}{C}$$

Les équations (I) et (II) sont sous une forme qui ne permet pas de connaître le profil de concentration. Pour accéder au profil de concentration, il faut faire intervenir la 1^{ère} loi de Fick. Pour rappel, elle a pour expression :

$$\vec{J}_A^* = -D \overrightarrow{\text{grad}} C_A$$

$$\text{On a : } \vec{N}_A = \vec{J}_A^* + y_A(\vec{N}_A + \vec{N}_B) \Rightarrow \vec{N}_A = -D \overrightarrow{\text{grad}} C_A + C_A \cdot \vec{V}^*$$

$$\text{Avec : } C_A = y_A \cdot C$$

$$\vec{N}_A = -D \overrightarrow{\text{grad}} C_A + C_A \cdot \vec{V}^*$$

$$\Rightarrow -\text{div}(\vec{N}_A) = \text{div}(D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A) - \text{div}(C_A \cdot \vec{V}^*)$$

$$(I) \frac{\partial C_A}{\partial t} = -\text{div}(\vec{N}_A) + R_A$$

$$\text{Or : } \vec{N}_A = -D \overrightarrow{\text{grad}} C_A + C_A \cdot \vec{V}^* \Rightarrow \frac{\partial C_A}{\partial t} = \text{div}(D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A) - \text{div}(C_A \cdot \vec{V}^*) + R_A$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_A}{\partial t} = \text{div}(C_A \cdot \vec{V}^*) = \text{div}(D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A) + R_A$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_A}{\partial t} + C_A \cdot \text{div}(\vec{V}^*) + \vec{V}^* \text{div}(C_A) = D \cdot \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} C_A) + R_A$$

$$\text{Or : } \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} C_A) = \nabla C_A = \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}$$

$$\text{D'où : } \frac{\partial C_A}{\partial t} + C_A \text{div}(\vec{V}^*) + \vec{V}^* \text{div}(C_A) = D \cdot \nabla C_A + R_A \dots \dots \dots (*)$$

Si le système est non réactif (pas de réaction chimique) $\Rightarrow R_A = 0$

$$(*) \text{ devient : } \frac{\partial C_A}{\partial t} = D \cdot \nabla C_A$$

$$\boxed{\frac{\partial C_A}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right)} \text{ 2}^{\text{ème}} \text{ loi de Fick (Equation de diffusion)}$$

$$\text{Cas d'un régime stationnaire } \frac{\partial C_A}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{D \cdot \nabla C_A = 0}$$

IV.2.2. Bilan de matière massique

La même procédure est suivie que pour le bilan de matière molaire.

Pour l'espèce A, le bilan sera comme suit :

Etape	1 :	Calcul	du	terme
$[Quantité entrante] - [Quantité sortante] = \left[n_{Ax} - \left(n_{Ax} + \frac{\partial n_{Ax}}{\partial x} \cdot \Delta x \right) \right] \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t +$ $\left[n_{Ay} - \left(n_{Ay} + \frac{\partial n_{Ay}}{\partial y} \cdot \Delta y \right) \right] \Delta x \cdot \Delta z \cdot \Delta t + \left[n_{Az} - \left(n_{Az} + \frac{\partial n_{Az}}{\partial z} \cdot \Delta z \right) \right] \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t$				

Par les unités, il est facile de vérifier que le terme $\left[n_{Ax} - \left(n_{Ax} + \frac{\partial n_{Ax}}{\partial x} \cdot \Delta x \right) \right] \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$ représente le nombre de grammes (masse).

Nombre de grammes (masse)

Unités : $\left[n_{Ax} - \left(n_{Ax} + \frac{\partial n_{Ax}}{\partial x} \cdot \Delta x \right) \right] \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$

$\left[n_{Ax} - \left(n_{Ax} + \frac{\partial n_{Ax}}{\partial x} \cdot \Delta x \right) \right]$: Densité de flux massique (kg/m².s)

$\Delta y \cdot \Delta z$: Section de passage (m²)

Δt : Temps (S)

Après calcul, l'étape 1 devient :

$$[Q^{ts} \text{ entrante}] - [Q^{ts} \text{ sortante}] = - \underbrace{\left(\frac{\partial n_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial n_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial n_{Az}}{\partial z} \right)}_{\text{div}(\vec{n}_A)} \underbrace{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z}_{\Delta V} \cdot \Delta t$$

$$[Q^{ts} \text{ entrante}] - [Q^{ts} \text{ sortante}] = -\text{div}(\vec{n}_A) \cdot \Delta V \cdot \Delta t \dots\dots\dots(1)$$

Etape 2 : Calcul du terme [accumulation]

On a la variation de la masse de A dans ΔV pendant un temps Δt . La masse qui reste dans le volume représente l'accumulation.

Accumulation = $\Delta \bar{C}_A \cdot \Delta V$

Par les unités, il est facile de vérifier que le terme $\Delta \bar{C}_A \cdot \Delta V$ représente la masse de A.

D'où : [accumulation] = $\Delta \bar{C}_A \cdot \Delta V \dots\dots\dots(2)$

Etape 3 : Calcul du terme $\pm \left[\begin{matrix} \text{production / consommation} \\ \text{réaction chimique homogène} \end{matrix} \right]$

La masse de A produite par la réaction chimique représente la production.

Production = $r_A \cdot \Delta V \cdot \Delta t \dots\dots\dots(3)$

Avec : $r_A = \frac{\partial C_A}{\partial t}$ Vitesse de la réaction chimique ($\frac{kg}{m^3 \cdot s}$)

Le bilan à partir des équations (1), (2) et (3) donnera :

$(Entrée) - (Sortie) + (Production) = (Accumulation)$

$\Rightarrow -\text{div}(\vec{n}_A) \cdot \Delta V \cdot \Delta t + r_A \cdot \Delta V \cdot \Delta t = \Delta \bar{C}_A \cdot \Delta V$

$\Rightarrow -\text{div}(\vec{n}_A) + r_A = \frac{\Delta C_A}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\partial C_A}{\partial t} = -\text{div}(\vec{n}_A) + r_A \dots\dots\dots(I)$

Il est à noter que si dans le cas où l'espèce A est consommée, le terme consommation est le même que celui représentant le terme production mais précédé du signe (-).

Consommation = $-r_A \cdot \Delta V \cdot \Delta t$

Pour l'espèce B, le bilan sera comme suit :

En procédant comme précédemment, il est aisé de retrouver l'équation finale pour l'espèce B qui est similaire à celle obtenue pour l'espèce A.

$$\text{On a : } \frac{\partial c_B}{\partial t} = -\text{div}(\vec{n}_B) + r_B \dots \dots \dots \text{(II)}$$

$$\text{(I)+(II) : } \frac{\partial c_A}{\partial t} + \frac{\partial c_B}{\partial t} = -\text{div}(\vec{n}_A) - \text{div}(\vec{n}_B) + r_A + r_B$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (\bar{c}_A + \bar{c}_B)}{\partial t} = -\text{div}(\vec{n}_A + \vec{n}_B) + r_A + r_B$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = -\text{div}(\vec{n}_A + \vec{n}_B) + r_A + r_B$$

La vitesse massique moyenne ou encore la vitesse du barycentre massique du système a pour expression : $\vec{V} = \sum \bar{c}_i \cdot \vec{V}_i$

$$\text{Et dans le cas du binaire (A+B) : } \vec{V} = \frac{c_A \cdot \vec{V}_A + c_B \cdot \vec{V}_B}{c} \Rightarrow \bar{c} \cdot \vec{V} = \boxed{\bar{c}_A \cdot \vec{V}_A} + \boxed{\bar{c}_B \cdot \vec{V}_B}$$

Les termes $\bar{c}_A \cdot \vec{V}_A$ et $\bar{c}_B \cdot \vec{V}_B$ représentent respectivement les densités de flux \vec{n}_A et \vec{n}_B

$$\text{D'où : } \bar{c} \cdot \vec{V} = \vec{n}_A + \vec{n}_B$$

$$\text{Et enfin : } \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = -\text{div}(\bar{c} \cdot \vec{V}) + r_A + r_B \dots \dots \dots \text{(III)}$$

On peut distinguer deux types de systèmes : système réactif et système non réactif.

- Cas d'un système non réactif : $r_A + r_B = 0$

$$\text{(III)} \Rightarrow \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = -\text{div}(\bar{c} \cdot \vec{V})$$

Et si en plus la concentration totale du système $\bar{c} = \text{Constante}$ (Si la température et la pression sont constantes) :

$$\text{(III)} \Rightarrow \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = 0 \Rightarrow -\text{div}(\bar{c} \cdot \vec{V}) = 0$$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{V}) = 0$$

Il est important de noter que \bar{c}_A et \bar{c}_B peuvent évoluer mais la somme $\bar{c}_A + \bar{c}_B$ reste constante.

- Cas d'un système réactif : $r_A + r_B \neq 0$

$$\bar{c} = \text{Constante} \Rightarrow \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = 0 \Rightarrow -\text{div}(\bar{c} \cdot \vec{V}) + r_A + r_B = 0$$

$$\text{(III)} \Rightarrow \text{div}(\vec{V}) = \frac{r_A + r_B}{\bar{c}}$$

Les équations (I) et (II) sont sous une forme qui ne permet pas de connaître le profil de concentration. Pour accéder au profil de concentration, il faut faire intervenir la 1^{ère} loi de Fick. Pour rappel, elle a pour expression :

$$\vec{J}_A = -D \overrightarrow{\text{grad}} \bar{C}_A$$

$$\text{On a : } \vec{n}_A = \vec{J}_A + \bar{y}_A (\vec{n}_A + \vec{n}_B) \Rightarrow \vec{n}_A = -D \overrightarrow{\text{grad}} \bar{C}_A + \bar{C}_A \cdot \vec{V}$$

$$\text{Avec : } \bar{C}_A = y_A \cdot \bar{C}$$

$$\vec{n}_A = -D \overrightarrow{\text{grad}} \bar{C}_A + \bar{C}_A \cdot \vec{V} \Rightarrow -\text{div}(\vec{N}_A) = \text{div}(D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \bar{C}_A) - \text{div}(\bar{C}_A \cdot \vec{V})$$

$$\text{(II) } \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial t} = -\text{div}(\vec{n}_A) + r_A$$

$$\text{Or : } \vec{n}_A = -D \overrightarrow{\text{grad}} \bar{C}_A + \bar{C}_A \cdot \vec{V} \Rightarrow \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial t} = \text{div}(D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \bar{C}_A) - \text{div}(\bar{C}_A \cdot \vec{V}) + r_A$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial t} = \text{div}(\bar{C}_A \cdot \vec{V}) = \text{div}(D \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \bar{C}_A) + r_A$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial t} + \bar{C}_A \cdot \text{div}(\vec{V}) + \vec{V} \text{div}(\bar{C}_A) = D \cdot \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \bar{C}_A) + r_A$$

$$\text{Or : } \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \bar{C}_A) = \nabla \bar{C}_A = \frac{\partial^2 \bar{C}_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}_A}{\partial z^2}$$

$$\text{D'où : } \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial t} + \bar{C}_A \text{div}(\vec{V}) + \vec{V} \text{div}(\bar{C}_A) = D \cdot \nabla \bar{C}_A + r_A \dots \dots \dots (*)$$

Si le système est non réactif (pas de réaction chimique) $\Rightarrow r_A = 0$

$$(*) \text{ devient : } \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial t} = D \cdot \nabla \bar{C}_A$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{C}_A}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 \bar{C}_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}_A}{\partial z^2} \right)}$$

C'est la 2^{ème} loi de FICK (Equation de diffusion)

Cas d'un régime stationnaire, la 2^{ème} loi de FICK devient :

$$\frac{\partial \bar{C}_A}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{D \cdot \nabla \bar{C}_A = 0}$$

Chapitre V

Transfert entre phases

V.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de formuler les différentes expressions des coefficients de transfert de matière rapportés à la pression k_p , à la fraction k_y , et à la concentration k_c et d'établir les relations qui les relient entre eux. L'analyse dimensionnelle sera présentée et appliquée pour la détermination des nombres adimensionnels et l'accès au coefficient de transfert de matière rapporté à la concentration k_c . Enfin, les principales théories de transfert de matière seront présentées avec une étude détaillée du modèle du double film (théorie de Lewis et Whitman).

V.2. Coefficient de transfert de matière

D'une manière générale, la densité de flux de matière a pour expression :

$$[\text{Densité de flux molaire}] = [\text{Coefficient de transfert de matière}] \times [\text{Force motrice (différence de potentiel)}]$$

Les différents coefficients de transfert de matière rapportés à la pression k_p , à la fraction k_y et à la concentration k_c auront pour expression :

1. Coefficient de transfert de matière rapporté à la pression k_p

$$N_A = k_p \cdot \Delta P_A \dots \dots \dots (1)$$

$$\left(\frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}\right) \left(\frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Pa}}\right) (\text{Pa})$$

2. Coefficient de transfert de matière rapporté à la fraction k_y

$$N_A = k_c \cdot \Delta C_A \dots \dots \dots (2)$$

$$\left(\frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}\right) \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \left(\frac{\text{mol}}{\text{m}^3}\right)$$

3. Coefficient de transfert de matière rapporté à la concentration k_c

$$N_A = k_y \cdot \Delta y_A \dots \dots \dots (3)$$

$$\left(\frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}\right) \left(\frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}\right)$$

D'après la loi des gaz parfaits appliquée à un volume V contenant plusieurs espèces et pour une espèce A présente dans ce volume V, à la pression P et à la température T, la loi s'écrit :

$$P_A \cdot V = n_A \cdot R \cdot T \Rightarrow P_A = C_A \cdot RT \Rightarrow \Delta P_A = \Delta C_A \cdot RT \Rightarrow \Delta C_A = \frac{\Delta P_A}{RT}$$

$$\text{En remplaçant dans l'équation (2)} \Rightarrow N_A = k_c \cdot \frac{\Delta P_A}{RT} \dots \dots \dots (4)$$

$$(1)=(4) \Leftrightarrow k_p \cdot \Delta P_A = k_c \cdot \frac{\Delta P_A}{RT} \Rightarrow \boxed{k_c = k_p \cdot RT}$$

D'après la loi de Dalton : $P_A = y_A \cdot P \Rightarrow \Delta P_A = P \cdot \Delta y_A$

En remplaçant dans l'équation (1) $\Rightarrow N_A = k_p \cdot P \cdot \Delta y_A \dots\dots\dots(5)$

$$(1)=(5) \Leftrightarrow k_p \cdot P \cdot \Delta y_A = k_y \cdot \Delta y_A \Rightarrow \boxed{k_y = P \cdot k_p}$$

V.3. Analyse dimensionnelle

La détermination du coefficient de transfert de matière rapporté à la concentration k_C est basée sur quatre méthodes :

- Analyse dimensionnelle et expérience ;
- Solution exacte du problème de transfert de matière (ou de transfert de quantité de mouvement ou de transfert de chaleur) ;
- Solution approché de la couche limite ;
- Par analogie.

Dans ce qui suit, le coefficient de transfert de matière rapporté à la concentration k_C est déterminé par l'analyse dimensionnelle et l'expérience. Le coefficient k_C est fonction de plusieurs paramètres, à savoir :

- D : coefficient de diffusion
- U : vitesse d'écoulement
- L : longueur parcourue
- ρ : masse volumique
- μ : viscosité dynamique

Selon la thèse de RAIYLEY, le coefficient de transfert de matière rapporté à la concentration k_C peut s'écrire sous la forme générale :

$$k_C = \alpha \cdot D^a \cdot U^b \cdot L^c \cdot \rho^d \cdot \mu^e$$

k_C dépend de 5 variables, α étant une constante et a , b , c , d et e sont des inconnues.

Par ailleurs, on considère les unités fondamentales suivantes :

- M : masse
- L : longueur
- T : temps
-

Ainsi, il est possible de donner les unités des différents paramètres dans le système international SI et en fonction des unités fondamentales comme rassemblées dans le tableau suivant :

Paramètre		Unités SI	Unités fondamentales
D	coefficient de diffusion	$m^2.s^{-1}$	$L^2.T^{-1}$
U	vitesse d'écoulement	$m.s^{-1}$	$L.T^{-1}$
L	longueur parcourue	m	L
ρ	masse volumique	$kg.m^{-3}$	$M.L^{-3}$
μ	viscosité dynamique	$kg.m^{-1}.s^{-1}$	$M.L^{-1}.T^{-1}$
k_c	Coefficient de transfert de matière	$m.s^{-1}$	$L.T^{-1}$

L'analyse dimensionnelle permet de trouver la solution de certains problèmes sans avoir à résoudre d'équations grâce au théorème de BUCKINGHAM (parfois appelé « théorème Pi »). L'objectif est de construire des nombres sans dimension (ou nombre adimensionnel) en utilisant le théorème de BUCKINGHAM.

Ainsi :

$$[\text{Nombre de nombres sans dimension}] = [\text{Nombre de variables}] - [\text{Nombre d'unités fondamentales}]$$

Dans ce cas, on a :

$$[\text{Nombre de variables}] = 6 \text{ variables } (k_c, D, U, L, \rho \text{ et } \mu)$$

$$[\text{Nombre d'unités fondamentales}] = 3 \text{ unités fondamentales (M, L et T)}$$

$$[\text{Nombre de nombres sans dimension}] = 6 - 3 = 3$$

Il est donc possible de construire 3 nombres sans dimensions π_1, π_2 et π_3 tels que :

$$\pi_1 = \frac{D}{\rho^d \cdot \mu^e \cdot U^b}$$

$$\pi_2 = \frac{L}{\rho^d \cdot \mu^e \cdot U^b}$$

$$\pi_3 = \frac{k_c}{\rho^d \cdot \mu^e \cdot U^b}$$

- Nombre adimensionnel π_1 :

$$\pi_1 = \frac{D}{\rho^d \cdot \mu^e \cdot U^b} = \frac{[L^2.T^{-1}]}{[M.L^{-3}]^d [M.L^{-1}.T^{-1}]^e [L.T^{-1}]^b}$$

$$\begin{cases} M: 0 = d + e \\ L: 2 = -3d - e + b \\ T: -1 = -e - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = -d \\ 2 = -3(b-1) - (1-b) + b \\ e = 1 - b \text{ ou } d = b - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ b = 0 \\ e = 1 \end{cases}$$

D'où :

$$\pi_1 = \frac{D}{\rho^{-1} \cdot \mu^1} \Rightarrow \pi_1 = \frac{D \cdot \rho}{\mu}$$

$$\text{Or : } v = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow \pi_1 = \frac{D}{v} = Sc^{-1}$$

$$S_c = \frac{v}{D} \quad \text{Sc représente le Nombre de Schmidt}$$

- Nombre adimensionnel π_2 :

$$\pi_2 = \frac{L}{\rho^d \cdot \mu^e \cdot U^b} = \frac{[L]}{[M \cdot L^{-3}]^d [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}]^e \cdot [L \cdot T^{-1}]^b}$$

$$\begin{cases} M: 0 = d + e \\ L: 1 = -3d - e + b \\ T: 0 = -e - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ e = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \pi_2 = \frac{L}{\rho^d \cdot \mu^e \cdot U^b} \Rightarrow \pi_2 = \frac{L \cdot \rho \cdot U}{\mu} = \frac{L \cdot U}{v}$$

$$\pi_2 = \frac{L \cdot U}{v} = Re$$

$$Re = \frac{L \cdot U}{v} \quad \text{Re représente le Nombre de Reynolds}$$

- Nombre adimensionnel π_3 :

$$\pi_3 = \frac{K_c}{\rho^d \cdot \mu^e \cdot U^b} = \frac{[L \cdot T^{-1}]}{[M \cdot L^{-3}]^d [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}]^e \cdot [L \cdot T^{-1}]^b}$$

$$\begin{cases} M: 0 = d + e \\ L: 1 = -3d - e + b \\ T: -1 = -e - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ e = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \pi_3 = \frac{K_c}{U}$$

$$St = \frac{K_c}{U} \quad \text{St représente le Nombre de Stanton}$$

On peut également déduire un autre nombre adimensionnel

$$Sh = \frac{K_c \cdot L}{D} \quad \text{Sh représente le Nombre de Sherwood}$$

Remarque :

- $S_c = \frac{v}{D}$ représente le rapport entre deux diffusivités moléculaires :

ν : pour la quantité de mouvement et D : pour le transfert de matière

- $Re = \frac{L.U}{\nu}$ représente le rapport entre les forces d'écoulement (forces d'inertie par la vitesse U) et les forces de viscosité (ν).
- $Sh = \frac{k_c.L}{D}$ caractérise le transfert de matière.

La connaissance du coefficient de transfert de matière k_c est nécessaire pour l'optimisation des paramètres géométriques du système.

Pour évaluer l'effet de l'hydrodynamique et des propriétés physiques de la solution sur le transfert de matière global, on recherche des corrélations des résultats expérimentaux sous la forme générale :

$$Sh = A.Re^a.Sc^b$$

Dans cette relation, le coefficient A englobe les caractéristiques géométriques du système considéré et l'exposant a caractérise le régime d'écoulement (laminaire, turbulent,...)

V.4. Théories de transfert

Quelles que soient les théories de transfert considérées, elles admettent toutes deux principes :

- L'existence d'un équilibre thermodynamique (pas d'accumulation à l'interface), c'est-à-dire que la quantité de matière qui passe par la phase (1) est récupérée par la phase (2) ;
- Elles supposent qu'il n'y a pas de résistance interfaciale (résistance nulle).

Il existe trois théories de transfert :

- Modèle de pénétration ;
- Modèle de couche limite ;
- Modèle de film (modèle de Nernst et modèle du double film).

V.4.1. Modèle de pénétration

Le modèle de pénétration est dû à Higbie puis a été amélioré par Dankwerts. La plupart des processus industriels de transfert de masse est un processus instationnaire. Dans de tels cas, le temps de contact entre les phases est trop court pour atteindre un état stationnaire. Ce phénomène non stationnaire n'est pas pris en compte par le modèle de film. Dans l'absorption des gaz de la surface d'une bulle, la surface de transfert de masse est formée instantanément et la diffusion transitoire de la substance a lieu. La figure V.1 montre le schéma du modèle de pénétration.

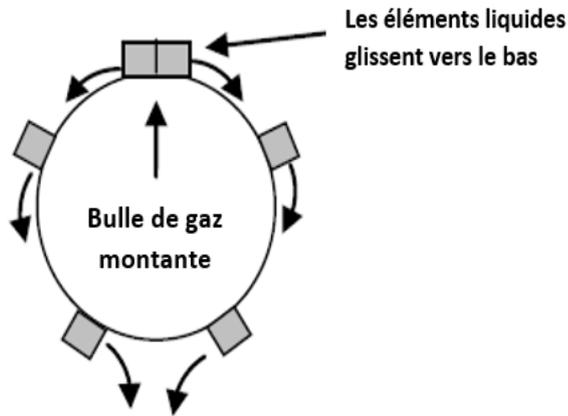


Figure V.1 : Schéma du modèle de pénétration

Les hypothèses de base de la théorie de la pénétration sont les suivantes :

- Transfert de masse instationnaire se produit dans un élément liquide tant qu'il est en contact avec les bulles ou d'autres phase ;
- L'équilibre existe à l'interface gaz-liquide ;
- Chacun des éléments liquides reste en contact avec le gaz pendant la même période de temps.

V.4.2. Modèle de Nernst (paroi-fluide)

C'est un modèle relatif à un transfert entre un liquide et un solide. La résistance au transfert est localisée dans la couche laminaire. Ce modèle introduit une discontinuité :

- Agitation moléculaire à l'intérieur du film.
- Agitation turbulente à l'extérieur

Ainsi, il est admis que loin de l'interface le coefficient de diffusion turbulent D_t est beaucoup plus grand que le coefficient de diffusion D dans la couche laminaire (Fig.V.2).

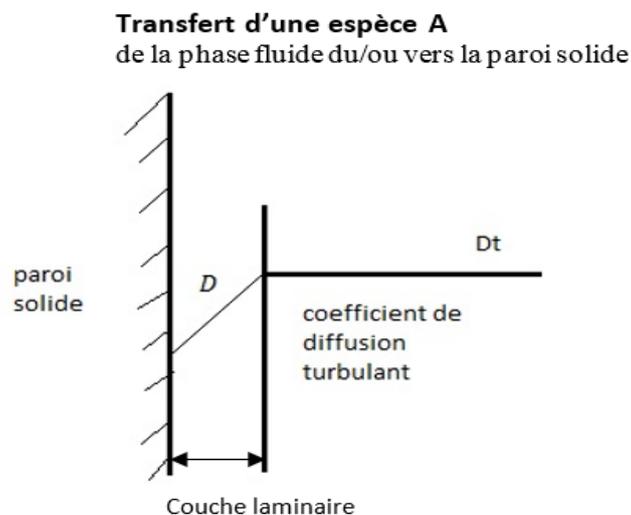


Figure V.2 : Schéma du modèle de Nernst

V.4.3. Modèle de la couche limite

Le cœur de la phase est la zone majoritaire, loin de l'interface, parfaitement homogène et agité donc de composition constante.

La couche limite est une zone proche de l'interface et de faible épaisseur δ dans laquelle il y a diffusion de FICK (Ecoulement laminaire). Dans ce cas, le gradient est constant et par conséquent le profil est linéaire (Fig.V.3).

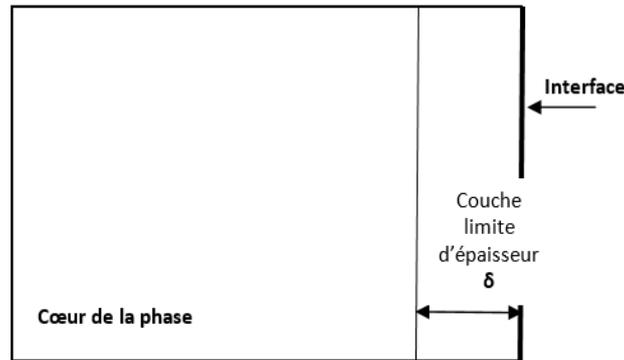


Figure V.3 : Schéma du modèle de la couche limite

Pour le modèle de film, dans ce qui suit sera présentée d'une façon exhaustive la théorie de **Lewis et Whitman** plus connue sous le nom de la théorie du double film.

V.5. Théorie du double film de transfert de matière (théorie de Lewis et Whitman) :

La Théorie du double film ou encore la théorie de Lewis et Whitman considère le transfert entre deux phases fluides. Soient deux phases fluides (gaz-liquide) séparées par une interface. Ces deux phases ne sont pas en équilibre en l'espèce A, alors il y a migration de A d'une phase vers l'autre avec franchissement de l'interface. Le transfert de l'espèce A prendra fin lorsque les deux phases seront en équilibre en A (Fig.V.4).

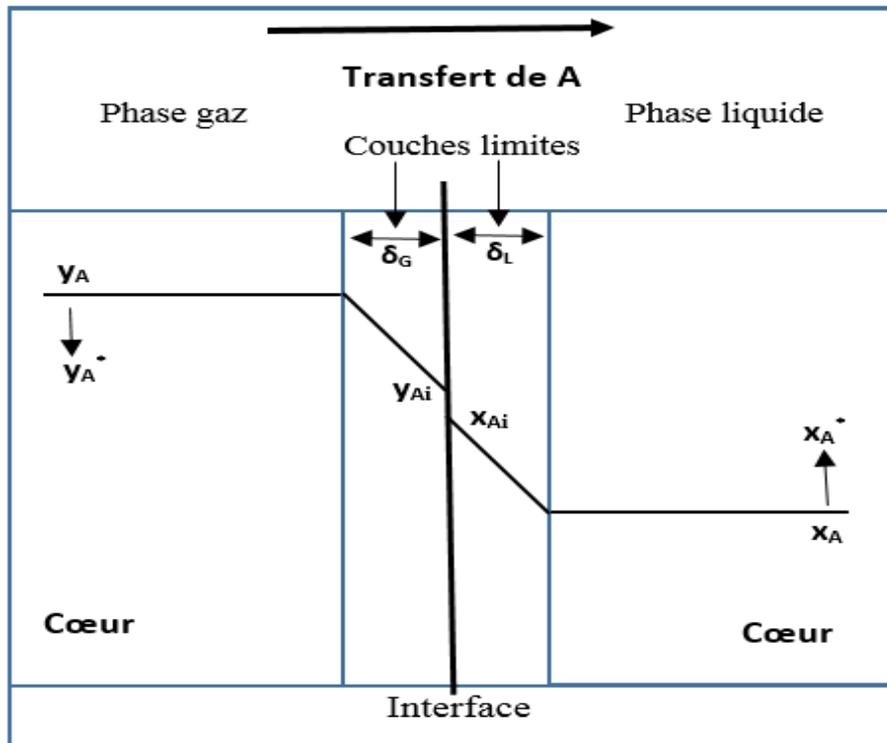


Figure V.4 : Schéma représentatif du modèle du double film

- Dans la phase gazeuse :

C'est le transfert de A du cœur de la phase vers l'interface : $y_A > y_{Ai}$

$$N_A = k_y(y_A - y_{Ai}) \dots \dots \dots (1)$$

Où :

N_A : Quantité transférée de A

k_y : Coefficient partiel de transfert de matière

$y_A - y_{Ai}$: Force motrice nécessaire pour déplacer A du cœur de la phase vers l'interface

- Dans la phase liquide :

C'est le transfert de A de l'interface vers le cœur de la phase : $x_{Ai} > x_A$

$$N_A = k_x(x_{Ai} - x_A) \dots \dots \dots (2)$$

Où :

N_A : Quantité transférée de A

k_x : Coefficient partiel de transfert de matière

$x_{Ai} - x_A$: Force motrice nécessaire pour déplacer A de l'interface vers le cœur de la phase

$$(1)=(2) \Rightarrow k_y(y_A - y_{Ai}) = k_x(x_{Ai} - x_A)$$

$$\Rightarrow k_y(y_A - y_{A_i}) = -k_x(x_A - x_{A_i})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y_A - y_{A_i}}{x_A - x_{A_i}} = -\frac{k_x}{k_y}} \text{ C'est l'équation d'une droite de pente : } -\frac{k_x}{k_y}$$

A l'équilibre, le système est régi par la loi d'Henry : $P_A^* = H \cdot x_A$

Par ailleurs, dans la phase gazeuse et d'après la loi de Dalton : $P_A = y_A \cdot P_t$

Et à l'équilibre la loi de Dalton va s'écrire : $P_A^* = y_A^* \cdot P_t$

$$\text{D'où : } H \cdot x_A = y_A^* \cdot P_t \Rightarrow y_A^* = \frac{H}{P_t} \cdot x_A$$

Soit m la constante d'équilibre du système tel que : $m = \frac{H}{P_t} \dots \dots \dots (3)$

$$\text{D'où : } \boxed{y_A^* = m \cdot x_A} \dots \dots \dots (4)$$

Cette dernière équation peut aussi s'écrire sous la forme : $\boxed{x_A^* = \frac{1}{m} \cdot y_A} \dots \dots \dots (5)$

C'est l'équation de la courbe d'équilibre

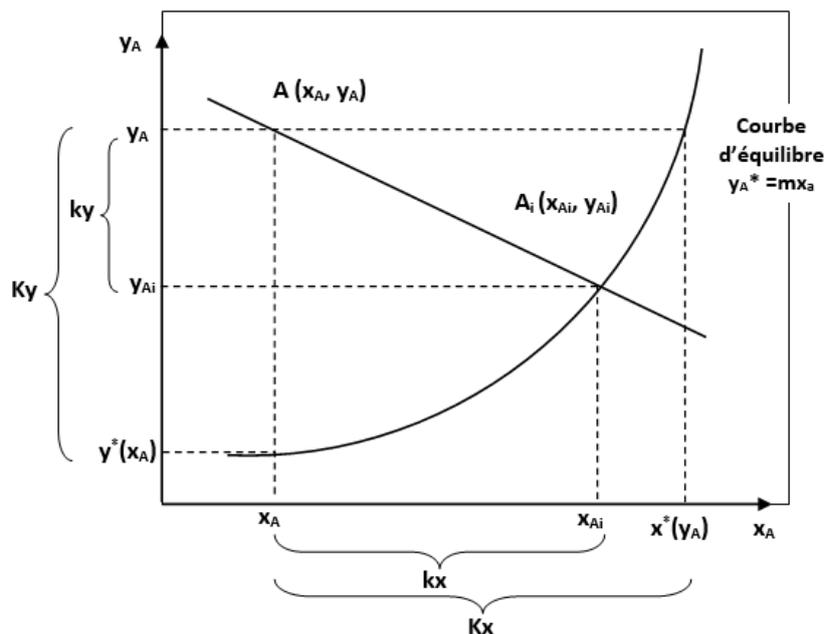


Figure V.5 : Représentation graphique des concentrations dans le modèle du double film

V.5.1. Relation entre le coefficient de transfert de matière global et les coefficients de transfert de matière partiels

On introduit les coefficients globaux de transfert de matière K_x et K_y et dans ce cas les équations (1) et (2) vont s'écrire autrement.

- Dans la phase gazeuse :

C'est le transfert de A du cœur de la phase gazeuse jusqu'à atteindre l'état d'équilibre :

$$y_A > y_A^*$$

$$N_A = K_y (y_A - y_A^*) \dots \dots \dots (6)$$

Où :

N_A : Quantité transférée de A

K_y : Coefficient global de transfert de matière

$y_A - y_A^*$: Force motrice nécessaire pour déplacer A du cœur de la phase gazeuse jusqu'à atteindre l'état d'équilibre

- L'équivalent dans la phase liquide aura pour équation :

$$N_A = K_x (x_A^* - x_A) \dots \dots \dots (7)$$

Il est à noter ici que : $x_A^* > x_A$

$$\text{De (6) : } N_A = K_y (y_A - y_A^*) \Rightarrow y_A - y_A^* = \frac{N_A}{K_y}$$

$$\text{Et de (7) : } N_A = K_x (x_A^* - x_A) \Rightarrow x_A^* - x_A = \frac{N_A}{K_x}$$

$$\text{Par ailleurs, on peut écrire : } y_A - y_A^* = (y_A - y_{A_i}) + (y_{A_i} - y_A^*)$$

$$\text{D'où : } y_A - y_A^* = (y_A - y_{A_i}) + (m x_{A_i} - m x_A)$$

$$\Rightarrow y_A - y_A^* = (y_A - y_{A_i}) + m(x_{A_i} - x_A)$$

$$\frac{N_A}{K_y} = \frac{N_A}{k_y} + m \left(\frac{N_A}{K_x} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{K_y} = \frac{1}{k_y} + \frac{m}{K_x}} \dots \dots \dots (8)$$

V.5.2. Relation entre le coefficient de transfert de matière global en phase gazeuse avec coefficient de transfert de matière global en phase liquide

A l'équilibre on a : $y_A^* = m \cdot x_A$ ou encore : $x_A^* = \frac{1}{m} \cdot y_A$

Et à l'interface on a : $y_{A_i} = m \cdot x_{A_i}$

On a aussi :

$$x_A^* - x_A = (x_A^* - x_{A_i}) + (x_{A_i} - x_A)$$

$$x_A^* - x_A = \left(\frac{y_A}{m} - \frac{y_{A_i}}{m} \right) + (x_{A_i} - x_A)$$

$$x_A^* - x_A = \frac{1}{m} (y_A - y_{A_i}) + (x_{A_i} - x_A)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{K_x} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{k_y} + \frac{1}{k_x}} \dots\dots\dots (9)$$

$$(I) \Rightarrow \frac{1}{K_y} = \frac{1}{k_y} + \frac{m}{k_x} \Rightarrow \frac{1}{K_y} = m \left(\frac{1}{mk_y} + \frac{1}{k_x} \right) = m \cdot \frac{1}{K_x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{K_y} = m \cdot \frac{1}{K_x}$$

Pour avoir enfin : $K_x = m \cdot K_y \dots\dots\dots (10)$

V.5.3. Analogie avec l'électricité

Analogie avec l'électricité (loi d'Ohm) : $U=R.I$

Tels que :

U : différence de potentiel (DDP)

R : résistance avec $R = \frac{1}{K}$ où K est la conductance

I : intensité du courant

D'où : $I = K \cdot U$

Par analogie électrique, le flux qui représente le courant traverse deux résistances en série. On peut donc introduire une résistance globale qui est l'inverse du coefficient global de transfert de matière.

Par analogie : $N_A = k_y \cdot \Delta y_A$ ou bien $N_A = k_x \cdot \Delta x_A$

Pour la relation : $\frac{1}{K_y} = \frac{1}{k_y} + \boxed{\frac{m}{k_x}}$ elle peut être représentée comme suit en termes de résistances :

$$R_y^G = r_y^G + r_x^G \dots\dots\dots (11)$$

Où :

R_y^G : Résistance globale

r_y^G : Résistance partielle côté gaz

r_x^G : Résistance partielle côté liquide

Pour la relation : $\frac{1}{K_x} = \frac{1}{k_x} + \boxed{\frac{1}{m \cdot k_y}}$ elle peut être représentée comme suit en termes de résistances :

$$R_x^L = r_x^L + r_y^L \dots\dots\dots (12)$$

Où :

R_x^L : Résistance globale

r_y^L : Résistance partielle côté gaz

r_x^L : Résistance partielle côté liquide

Il est possible d'envisager le cas de mélanges extrêmes où la résistance au transfert de matière est localisée essentiellement dans l'une des deux phases.

- Résistance localisée dans la phase liquide $\Rightarrow m \gg 1 \Rightarrow K_x \simeq k_x$

C'est le cas du système (eau, CO_2 , air) où le CO_2 est faiblement dissous dans l'eau.

- Résistance localisée dans la phase gazeuse $\Rightarrow m \ll 1 \Rightarrow K_y \simeq k_y$

C'est le cas du système (air, NH_3 , eau) où NH_3 présente une excellente affinité avec l'eau.

On peut également introduire la notion de pourcentage de résistance au transfert de matière dans une phase en reliant la résistance partielle au transfert de matière avec la résistance globale au sein d'une même phase.

$\frac{r_y^G}{R_y}$: % de résistance en phase gazeuse

$\frac{r_x^G}{R_x}$: % de résistance en phase gazeuse

$\frac{r_y^L}{R_y}$: % de résistance en phase liquide

$\frac{r_x^L}{R_x}$: % de résistance en phase liquide

BIBLIOGRAPHIE

Liste des ouvrages principaux consultés pour la rédaction du polycopié :

- **Mass-transfer operations.** Robert E. Treybal.
3rd Ed. Mc Graw-Hill Chemical Engineering series (1980)
 - **Transport phenomena.** R. Byron Bird, Warren E. Stewart and Edwin N. Lightfoot.
2nd Ed. John Wiley & Sons (2002).
 - **Mass Transport Phenomena.** C. Geankopolis Holt.
Rinehart & Winston of Canada Ltd (1972).
 - **Transport phenomena for chemical reactor design.** Laurence A. Belfiore
John Wiley & Sons (2003).
 - **Transfert de matière - Efficacité des opérations de séparation de génie chimique.**
Alexandre Rojey. TECHNIP EDITIONS (1976).
 - **Diffusion et transport de matière dans les solides.** Jean Philibert. Ed. de Physique
(1985).
 - **Transfert de matière en génie des procédés.** Techniques de l'ingénieur
- J 1070. Transfert de matière - Méthodologie.** Jean-Paul MOULIN, Dominique PAREAU, Mohamed RAKIB, Moncef STAMBOULI (2000)
- J1075. Transfert de matière - Cinétique du transfert de matière entre deux phases.** Arnaud BUCH, Mohammed RAKIB, Moncef STAMBOULI (2008)
- **Cémentation du cuivre par le fer dans un réacteur électrochimique à plaques parallèles à recyclage. Corrélations du transfert de masse.** R. KETRANE. Thèse de magister. Université de Bejaia (2000).