الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة سطيف كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

# محاضرات في تقنيات حساب المخاطرة (الاكتوارية)

مطبوعة مقدمة لطلبة السنة الاولى ماستر تخصص مالية و تأمينات

من اعداد الدكتور اوغليسي محنداكلي

السنة الجامعية 2020-2021

# فهرس المحتويات

**تمهيد**

علم الإكتوارية مجال من العلوم الذي يقوم بتقييم المخاطر الماليّة في مجاليْ التأمين والتمويل باستخدام الأساليب الرياضية والإحصائية، وقد أصبحت العلوم الإكتوارية نظامًا رياضيًا رسميًا في أواخر القرن السابع عشر مع زيادة الطلب على التغطية التأمينية طويلة الأجل مثل التأمين على الحياة والمعاشات السنوية، وعلى مر التاريخ استخدمت العلوم الإكتوارية نماذج لبناء الجداول والأقساط، كما تركز العلوم الإكتوارية أيضًا على تحليل معدلات العجز والاعتلال والوفيات والخصوبة وحالات الطوارئ الأخرى.

كما تُقارن العلوم الإكتوارية بين تكاليف الاستراتيجيات البديلة فيما يتعلق بالتصميم والتمويل والمحاسبة والإدارة والصيانة وإعادة تصميم خطط المعاشات التقاعدية، وتؤثر معدلات السندات قصيرة الأجل وطويلة الأجل بشكل كبير على هذه الاستراتيجيات كما تؤثّر عليها تمويلات ترتيبات التقاعد والمزايا والمنافسين لصاحب العمل وتغيير التركيبة السكّانية للقوى العاملة والتغييرات في قوانين الإيرادات الداخلية فيما يتعلق بحساب الفوائض المالية على المدى القصير والطويل والاتجاهات الاقتصادية.

وبالإضافة إلى إجابة "ما هي العلوم الإكتوارية؟" فهنالك عدة مهارات يحتاجها العاملون في مجال العلوم الإكتوارية ومنها ما يأتي:

مهارات حل المشكلات التحليلية: فمهامهم تشمل فحص البيانات المعقدة وتحديد الأنماط والاتجاهات لتحديد العوامل المسؤولة عن نتائج محددة، والبحث عن طُرق لتقليل احتمال النتائج غير المرغوب فيها أو تكلفتها إن تحققت .

مهارات الرياضيات والحساب: فالقدرة على إجراء العمليات الحسابية الأساسية بسرعة وبشكل صحيح مطلب أساسي، ومع ذلك فإن الرياضيات المرتبطة بالعلوم الإكتوارية يمكن أن تكون أكثر تعقيدًا .

مهارات الحاسوب: إذ تُعد أجهزة الحاسوب وبرامج النمذجة الإحصائية أدوات مهمة في العلوم الإكتوارية، وفي كثير من الأحيان يتم استخدام النماذج والجداول لتقييم كميات كبيرة من البيانات كما أن القدرة على البرمجة في لغة البرمجة الإحصائية هي أيضا ضرورة .

معرفة الأعمال التجارية والمالية: فهم مسؤولون عن تقييم خطط التأمين والمعاشات التقاعدية، وتقديم المشورة للشركات حول كيفية الحد من التعرض للمخاطر المالية، وتزويد البنوك بآراء الخبراء حول

تعظيم العوائد لمجموعة متنوعة من الاستثمارات والمنتجات و هذا يتطلب فهمًا سليمًا للأعمال التجارية والمفاهيم المالية .

مهارات الاتصال والعلاقات الشخصية: حيث تُمكّن مهارات التواصل الشفوية القوية من شرح التفاصيل التقنية والإحصائية المعقدة لجمهور متنوع، بينما تضمن مهارات الكتابة سهولة فهم النتائج والحلول في المذكرات والتقارير المكتوبة.

التطبيقات التي يُستخدم فيها هذا العلم، فالعلوم الإكتوارية هي المجال الذي يتم فيه استخدام جميع مجالات الرياضيات، وبكلمات أخرى هي المجال الذي يتم فيه استخدام المبادئ الرياضية الأولية و المعقدة للإجابة على الأسئلة التي يطرحها المالي.

حسب هدفنا في هذه الحاضرات يندرج تحت العلوم الإكتوارية اثنين من التخصّصات كما يأتي:

التسعير: إنشاء نموذج لكيفية مطابقة الحوادث لمطالبات التأمين وما الذي يجب على العملاء دفعه لشراء التأمين الخاص بهم .ويتم تطبيق هاتين الوظيفتين في العديد من المناطق؛ حيث يسعى مجتمع الإكتواريين بنشاط إلى تطبيق المبادئ الإكتوارية عبر العديد من المجالات من خلال مسار زمالة إدارة مخاطر المؤسسة.

التقييم: تحليل المخاطر المُتوقّع حدوثها للعميل.

بما ان بهذه المحاضرات استهدفنا طلبة تخصص تامينات فسنكتفي في عرضنا فيما يلي بجانب الاكتوارية المطبقة في التامينات.

و من هذا المنطلق يجد الطالب فيما يلي الفصل الاول بمثابة مراجعة لبعض الوسائل الاحصائية المستخدمة في الاكتوارية. و هذه الوسائل متمثلة في المعاينة الاحصائية حيث انها الركيزة الاساسية للاحصاء لكونها وسيلة جمع البيانات. ثم يلي عرض لبعض الدوال الاحصائية الشائعة الاستعمال في الحسابات الاكتوارية. هذين العنصرين يكونان الفصل الاول. الفصل الثاني تم تسخيره للنمذجة الاكتوارية. وفي هذا الفصل يكتشف الطالب نوعين من النماذج: النموذج الفردي و النموذج الجماعي. في الفصل الثالث يكتشف الطالب استخدام الاكتوارية في التامين على الحياة و الوفاة و كذا كيفية الحسابات على المعاشاة. في الرابع و الاخير تم شرح طريقة تسيير محافظ اخطار تامينات بغرض

التقليل من احتمال الافلاس. في نفس الفصل تم التطرق الى اعادة التامين كوسيلة لتقليل من خطر الافلاس.

# الفصل الاول
# مراجعة في الاحصاء

## الفصل الاول : مراجعة في الاحصاء

### 1-1. المعاينة الاحصائية كوسيلة للحصول على المعلومة الاكتوارية: أساليب جمع البيانات الإحصائية

جمع البيانات الإحصائية إنّ أهمّ مرحلة في العملية الإحصائية هي مرحلة جمع البيانات، إنّ أيّ خطأ في عملية جمع البيانات سينتج عنه إحصاء خاطئ ، يجب تتبع النقاط الآتية لجمع البيانات:

مصادر البيانات يجب أن يكون المصدر صحيح ودقيق، وهناك نوعان من مصادر البيانات :**المصادر الأولية،** وهي البيانات التي يجمعها الباحث بنفسه من عينات البحث، كإجراء بحث عن الأسرة وجمع المعلومات من رب الأسرة، وهو أكثر دقة من المصدر الآخر ولكنها تستهلك الكثير من الوقت والجهد والمال .

**المصادر الثانوية،** وفي هذه العملية يتم الحصول على البيانات بشكل غير مباشر من جهات معينة أو أجهزة كاستخدام النشرات والدراسات، وهو مصدر غير دقيق تماماً ولكنه يوفر الوقت والجهد والمال على عكس المصدر الأخر.

تعتمد هذه العملية على الهدف من البحث وحجم عدد الأشخاص المشمولين بالبحث، ومن أساليب جمع البيانات :أسلوب الحصر الشامل، في هذا الأسلوب يتم دراسة كل فرد أو عينة خاضعة للبحث من دون استثناءات ممّا يجعله دقيقاً جداً وواقعي غير متحيّز ولكنه يحتاج للكثير من الوقت والجهد والمال .

- **أسلوب المعاينة**

يتم دراسة مجموعة صغيرة مختارة بأسس علمية تم تعميم النتائج على المجتمع ككل ممّا يجعلها طريقة غير دقيقة ولكنه يوفّر الوقت والجهد والمال ويكون أكثر تفصيلاً وهو أفضل للحالات التي يصعب حصرها .

- **نوع العينات**

يتمّ تحديد الفرق بين العينة والمجتمع ككل المأخوذة منه، أسلوب المعاينة يتوقف على عدة عوامل منها :تحديد حجم العينة ، نوع العينة ، اختيار مفردات العينة .أقسام العينات ألاحتمالية وهي عينات تختار عشوائية من المجتمع لضمان عدم التحيز، ومن أنواعها؛ العينة العشوائية البسيطة، والعشوائية الطبقية، والعشوائية المنتظمة، والعشوائية متعددة المراحل .

- **العينات غير الاحتمالية،** يتم اختيار العينات بطرق مدروسة غير عشوائية بما يحقق الهدف من الإحصاء، ومن أنواعها؛ العينة العمدية، والعينة الحصصية .يجدر بالباحث تقيم الأسئلة واختبارها واختيار الطريقة الأنسب للبحث، كما يجدر به تدريب المشرفين على البحث والتأكد من قدرتهم على جمع البيانات ممن يترددون بالإجابة وتدقيق البيانات جيداً، فكل هذا يضمن له الحصول على إحصاء سليم وصحيح بأقل الأخطاء الممكنة .

تتضمن نظرية العينات عدة طرق وأساليب للمعاينة الإحصائية، وجميع هذه الأساليب تركز على الحصول على عينة إحصائية تفرز مؤشرات وتقديرات بأقل خطأ معاينة ممكن، مع الأخذ بالاعتبار أيضا حجم العينة المقدر فيما يلي نتطرق طرق وأساليب المعاينة الإحصائية. من اهم الراجع المستعملة: (عبد ربه، 2001) ، (محمد العلي، 1980) ، (Ardilly, 2006)
(Deming, 1964).

### 1-1-1. أسلوب المعاينة العشوائية البسيطة

يعتبر أسلوب المعاينة العشوائية البسيطة من أبسط الطرق وأكثرها انتشارا في أساليب المعاينة، يمتاز هذا الأسلوب بأنه يعطي كل وحدة من وحدات المعاينة الموجودة في المجتمع فرص أو احتمالات متساوية للاختيار أو الظهور بالعينة.

ويندرج ضمن المعاينة العشوائية البسيطة أسلوبين لسحب العينة ، الأول في حالة سحب العينة وإرجاعها إلى المجتمع بعد عملية السحب لإعطائها فرصة الظهور مرة أخرى ويسمى أسلوب سحب العينة مع الإرجاع، أما الأسلوب الثاني فهو في حال سحب العينة واستثناء كل عينة
أخرى مسحوبة من المجتمع يسمى سحب عينة دون إرجاع حيث أن هذا الأسلوب لا يعطي فرصة لتكرار ظهور العينة الواحدة أكثر من مره.

أ. **شروط استخدام العينة العشوائية البسيطة:**

نظرا لسهولة وبساطة تطبيق هذا الأسلوب من العينات فهو منتشر بشكل كبير، ولكن قبل استخدام هذا الأسلوب يجب ملاحظة أن هناك شروط يجب أن تتوفر في وحدات المعاينة للمجتمع المستهدف في الدراسة، إذ يجب أن تكون وحدات المعاينة في المجتمع متجانسة بالنسبة للصفة المدروسة، أي أن التباين بين وحدات المعاينة في المجتمع للصفة المدروسة قليل نسبيا، هذا بالإضافة إلى المحددات الأخرى من قبل مستخدمي البيانات.

ب. **طريقة سحب العينة العشوائية البسيطة.**

عند اختيار أسلوب العينة العشوائية البسيطة، لابد من اختيار طريقة تضمن العشوائية في اختيار وحدات المعاينة، وتعطي كل وحدة من وحدات المجتمع فرصة متساوية للظهور .في الجانب التطبيقي هناك عدة طرق مستخدمة لسحب عينات عشوائية بسيطة، أحد هذه الطرق

إعطاء رقم متسلسل لكافة وحدات المجتمع الخاضعة للمعاينة ، ومن ثم اختيار رقم عشوائي من جدول الأرقام العشوائية أو اليا .ومن ثم يتم سحب وحدة المعاينة التي تتطابق مع الرقم العشوائي، أما إذا كانت قيمة الرقم العشوائي خارج إطار تسلسل وحدات المعاينة فيتم اعادة سحب رقم آخر ...وهكذا.

**مثال:**

إذا كان لدينا مجتمع (محفظة تامين) مكون من 60 عقد تامين واردنا سحب عينة عشوائية بسيطة مقدارها 4 عقود .في هذه الحالة نعطي العقود في المجتمع ارقام متسلسلة بدءا من 01 ، 02 ، 03 ،.....، . 60 ومن ثم يتم اختيار رقم عشوائي ذو منزلتين عشريتين من جدول الأرقام العشوائية أو باستخدام الحاسوب، وليكن الرقم 45 مثلا ، في هذه الحالة تختار العقد ذات التسلسل 45 ضمن العينة، وفي السحبة الثانية إذا كان الرقم العشوائي 73 في هذه الحالة يتم تجاهل هذا الرقم ويعاد سحب رقم آخر ...وهكذا، حتى نحصل على 4 عقود كعينة عشوائية مطلوبة.

### 1-1-2. أسلوب المعاينة العشوائية المنتظمة

أسلوب العينة العشوائية المنتظمة هو أحد أساليب المعاينة العشوائية التي تمتاز بالسهولة والبساطة في التطبيق، إضافة إلى أنه يضمن انتشار العينة على أكبر مساحة من المجتمع بسبب أن أسلوب السحب يتم وفق انتظام متسلسل .تعتبر المعاينة المنتظمة الخطية هي الأسلوب الأكثر شيوعا في العينات المنتظمة، ويتلخص أسلوب تطبيقها بما يلي:

افرض أن المجتمع يتكون من$N$ من وحدات المجتمع وأن حجم العينة المطلوب سحبها هو $n$ فإذا ما قسمنا حجم المجتمع $N$ على حجم العينة المطلوب $n$ نحصل على المقدار $k$ حيث $nk = N$ ويعرف إحصائيا مقدار $k$ بفترة الانتظام، بعد ذلك يجري اختيار رقم عشوائي يقع بين $1$ و$k$

يسمى هذا الرقم برقم البداية العشوائية ويرمز له بالرمز$l$ ، يكون الرقم المتسلسل للعينة الأولى هو $l$ و العينة الثانية هي $k + l$ والثالثة .. $2k + l$الخ.

**مثال:**

لتقدير عدد عقود تامين في منتوج معين ضمن محفظة معينة تحتوي على 400 محافظ جزئية حسب نوع التامين و وكالة التامين مثلا. سحبت عينة منتظمة من تلك المحافظ الجزئية حجمها. 16

يكون أسلوب سحب العينة كما يلي:

$$N = 400 \qquad n = 16$$

$$k = N / n = 400 / 16 = 25$$

يتم سحب رقم عشوائي يقع بين 1 و 25 وليكن الر قم 14 ، بذلك تكون الأرقام المتسلسلة لوحدات المعاينة المسحوبة في العينة هي:

$$14,\ 14 + 25,\ 14 + 2 \times (25),\ 14 + 3 \times (25)\ ...$$

وتساوي 14 :، 39 ، 64 ، 89 ،...

### 1-1-3. أسلوب المعاينة المتناسبة مع الحجم

كما ذكر سابقا فإن أهم ما يميز العينة العشوائية البسيطة هو أن احتمالية ظهور كل وحدة من وحدات المعاينة للصفة المدروسة تكون متساوية لجميع وحدات المجتمع، فعلى سبيل المثال عند سحب عينة من عقود التامين بأسلوب المعاينة العشوائية البسيطة، تكون جميع العقود وبخصائصها المختلفة لها نفس الفرصة في الظهور بالعينة .

عند دراسة كثير من الصفات بمختلف الظواهر قد تتطلب طبيعة الصفة المدروسة إعطاء احتمال أكبر لظهور وحدات معينة من المجتمع في العينة المسحوبة .

مثلا قد تكون طبيعة الصفة المدروسة في عقود التامين تتطلب إعطاء فرصة أكبر لاختيار العقود ذات اقدمية او منحدرة من وكالة ذات عمليات تامينية اكثر ، في هذه الحالة يتم اتباع أسلوب المعاينة المتناسبة مع الحجم. كذلك يعرف أسلوب سحب العينة المتناسبة مع الحجم بأسلوب التجميع التراكمي، ويتلخص هذا الأسلوب بإعطاء كل وحدة معاينة رقم يوازي الصفة التي تحملها.

**مثال:**

ضمن إطار دراسة عقود التامين في عدد وكالات التامين ، مثلا المحفظة التي تتضمن 1000 عقد تامين يعتبر وزنها 1000 أي أنها تحتوي على 1000 وحدة معاينة فرضية والمحفظة التي تتضمن 100عقد يكون وزنها 100 وهكذا.

وللتوضيح يمكن ان نضع الجدول الموالي:

| الوكالة | عدد العقود | عدد العقود التجميعي | ألأرقام التي ترافقها |
|---|---|---|---|
| 1 | 1000 | 1000 | 1-1000 |
| 2 | 700 | 1700 | 1700 - 1001 |
| 3 | 1200 | 2900 | 2900-1701 |
| 4 | 500 | 3400 | 3400 - 2901 |
| 5 | 300 | 3700 | 3700 - 3401 |
| 6 | 800 | 4500 | 4500 - 3701 |

لاختيار ثلاث وكالات يتم سحب ثلاثة أرقام عشوائية تقع بين 1 و 4500 باستخدام الجدول العشوائي أو الحاسوب، ومن ثم يتم حصر الرقم العشوائي على عمود عدد العقود التجميعي في الجدول أعاه ويتم اختيار الوكالة التي يكون فيها عدد العقود التجميعي أكبر من أو يساوي من الرقم العشوائي .ففي هذا المثال إذا اختيرت الأرقام العشوائية 4000 ، 2000 ، 75 فإن وكالات العينة تكون الوكالات ذات الأرقام1 ،3 ، 6على التوالي.

عندما يكون المجتمع كبير نسبيا فإن عملية سحب العينة بالطريقة أعاه تستغرق وقتا طويا، لذا هناك أسلوب أو طريقة أخرى لسحب العينة المتناسبة مع الحجم، وتعرف بطريقة لاهير (Lahiri) حيث يتضمن هذا الأسلوب سحب أزواج من الأرقام العشوائية، يمثل الرقم الأول من كل زوج رقم وحده المعاينة بحيث يسحب الرقم العشوائي بين *1* و *N* حيث *N* تمثل عدد وحدات المعاينة الإجمالية في المجتمع ويمثل الرقم الثاني في الزوج حجم وحدة المعاينة بحيث يسحب الرقم العشوائي الثاني بين 1 و *M* حيث *M* تمثل حجم أكبر وحدة معاينة موجودة في المجتمع للصفة التي يتم الوزن على أساسها.

### .1-1-4 أسلوب المعاينة العشوائية الطبقية

كما بينا سابقا، يعتمد تطبيق أسلوب المعاينة العشوائية البسيطة على شرط التجانس بين جميع وحدات المجتمع وغير ذلك فإن العينة ستؤدي إلى نتائج متحيزة وغير دقيقة، أضف إلى ذلك فإن العينة ستنتشر بطريقة عشوائية على منطقة واسعة من المجتمع مما يؤدي إلى زيادة حجم العبئ والكلفة في

عملية جمع البيانات .ونظرا لصعوبة تحقق التجانس في كثير من المجتمعات ، يلجأ الباحث إلى تطبيق أسلوب المعاينة العشوائية الطبقية ، حيث يقسم المجتمع إلى عدد من المجموعات غير متداخلة ، كل مجموعة تكون متجانسة للصفة المدروسة وتسمى طبقة، وذلك بهدف الحصول على نتائج أكثر دقة .

فمثلا عند دراسة سلوك حاملي وثائق التامين يمكن تقسيم المجتمع إلى ريف وحضر، وللحصول على نتائج جيده واستخدام أسلوب المعاينة الطبقية بفاعلية عالية يجب أن يراعى الدقة وخاصة عند إجراء الأمور التالية:

- تكوين الطبقات.
- عدد الطبقات المراد عملها.
- حجم العينة في كل طبقة.
- تحليل البيانات لتصميم العينة الطبقية.

مثال :إذا كان لدينا ثماني محافظ و عدد العقود في هذه المحافظ كما يلي:

| رقم المحفظة | عدد العقود في المحفظة الواحدة | رقم المحفظة | عدد العقود في المحفظة الواحدة |
|---|---|---|---|
| 1 | 3000 | 5 | 6000 |
| 2 | 1500 | 6 | 1200 |
| 3 | 7000 | 7 | 4500 |
| 4 | 2500 | 8 | 5000 |

للحصول على تقدير معدل عدد العقود في المحفظة الواحدة .يمكن من خال أسلوب المعاينة البسيطة سحب ثلاث عينات، فإذا كانت العينة المسحوبة هي المحافظ التي أرقامها6 ،2 ، 1 فإن معدل عدد العقود هو 1900 عقد بينما المعدل الحقيقي للمجتمع هو 3838 أي ما يزيد على ضعف المعدل المقدر بالعينة ، من الواضح وجود خلل نتيجة استخدام العينة العشوائية البسيطة لمجتمع غير متجانس. إذا لجانا الى تطبيق أسلوب المعاينة الطبقية ، من خلال تقسيم هذا المجتمع إلى طبقات حسب فئات عدد العقود كما يلي:

| الطبقة ألولى | اقل من **3000** |
|---|---|
| رقم المحفظة | عدد العقود |
| 2 | 1500 |
| 4 | 2500 |
| 6 | 1200 |
| الطبقة الثانية | **3000 – 5000** |
| رقم المحفظة | عدد العقود |
| 1 | 3000 |
| 7 | 4500 |
| الطبقة الثالثة | فأكثر **5000** |
| رقم المحفظة | عدد العقود |
| 3 | 7000 |
| 5 | 6000 |
| 8 | 5000 |

فإذا ما تم سحب عينة واحدة من كل طبقة من الطبقات أعلاه وكما هو موضح ادناه:

| رقم الطبقة | رقم المحفظة | عدد العقود |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1500 |
| 2 | 7 | 4500 |
| 3 | 5 | 6000 |

إن المعدل المقدر لعدد العقود = معدل العينة=

$$3938 = 1500 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 4500 \times \left(\frac{2}{8}\right) + 6000 \times \left(\frac{3}{8}\right).$$

يلاحظ أن هذه النتيجة قريبة جدا من المعدل الحقيقي للمجتمع لذا فإن استخدام العينة الطبقية في مثل هذه الحالات يعتبر ضرورة لابد منها.

**أ. مبادئ تقسيم المجتمع إلى طبقات:**

عند تقسيم المجتمع إلى طبقات يجب مراعاة النقاط التالية:

•أن يكون مجموع وحدات المعاينة لجميع الطبقات مساوي لمجموع وحدات المعاينة للمجتمع ويجب ألا يكون تداخل بين الطبقات.

•أن تكون وحدات المعاينة في داخل كل طبقة متجانسة بالنسبة للصفة المدروسة.

•الحصول على نتائج حسب تقسيمات جغرافية أو إداريه ( إقليم ، منطقة )يترتب عليه تقسيم المجتمع إلى طبقات جغرافية بحسب مستويات التمثيل المطلوبة.

•مراعاة الطرق العلمية عند تقسيم المجتمع إلى فئات حيث تعتبر كل فئة طبقة.

ب. **أسلوب تقسيم المجتمع إلى طبقات:**

تعتبر عملية تقسيم المجتمع إلى فئات كنوع من التقسيم الطبقي للمجتمع، حيث يمكن اعتبار كل فئة من الفئات طبقة، ويهدف هذا الأسلوب إلى تقليل التباين بين مفردات المجتمع للصفة المدروسة، فمثلا إذا كانت الدراسة عن معدل دخل الأسرة فيمكن تقسيم الأسر إلى فئات حسب مستويات الدخل، وإذا كانت الدراسة عن عدد العاملين في المصانع يمكن تقسيم المصانع إلى فئات حسب عدد العاملين وهكذا.

### 1-1-5. أسلوب المعاينة العنقودية

يقوم أسلوب المعاينة العنقودية على مبدأ تقسيم المجتمع إلى مجموعات بشكل مناسب بحيث تكون هذه المجموعات متقاربة بالحجم ومتجانسة بالنسبة للصفة المدروسة، حيث كل مجموعة من هذه المجموعات تسمى عنقود، وتشكل العناقيد المجتمع كما دون حذف أو تكرار.

من ميزات العينة العنقودية إنها فعالة بالنسبة لوحدة التكاليف حيث تعطي دقة أكثر لوحدة الكلفة، كذلك يلجأ إلى هذا الأسلوب في كثير من الأحيان خاصة في المجتمعات التي لا يتوفر لديها اطر معاينة أو يصعب توفير إطار حديث بكل مفردة من مفردات المجتمع، ولكن من الممكن توفير إطار بالعناقيد مما يوفر بالجهد والوقت .كذلك يوجد هناك ميزة أخرى لتطبيق هذا الأسلوب وهو التوفير في تكاليف التنقل اثناء العمل الميداني بين وحدات المعاينة .لكن يجب أن لا ننسى أن من عيوب العينة العنقودية أنها اقل فاعلية من العينة العشوائية البسيطة ، كونها اقل انتشارا.

وعند استخدام العينة العنقودية يجب مراعاة ما يلي:

- أن يكون حجم العنقود صغير وعدد العناقيد كبير.
- عند تكوين العناقيد تؤخذ مفردات المجتمع المتجاورة أو ضمن منطقة معينة حيث تكون غالبا متشابهة للصفة المدروسة.
- أن تكون أحجام العناقيد متقارب قدر الإمكان.
- يجب أن يكون كل عنقود موضّح ومعّرف لجامع البيانات.

### 1-1-6. أسلوب المعاينة متعددة المراحل

التحدي الرئيسي في كثير من خطوات المعاينة الاحصائية هو عدم توفر إطار حديث لوحدات المعاينة الرئيسية مثل المحافظ التامينية أو العقود التامينية وغيرها، ويكون من الصعب الحصول على معلومات حديثة عنها بسبب ضيق الوقت مثلا و اهمية انهاء الدراسة في وقت ضيق، وفي نفس الوقت يتوفر قائمة أو إطار بمتغير الدراسة على مستوى تجميعي وليس تفصيلي مثل مبالغ التعويضات الاجمالية مبالغ التصريحات بالحوادث الاجمالية و هذه التجمعات بطيئة التغير .في هذه الحالة يمكن استخدام أسلوب المعاينة متعددة المراحل.

***ميزات العينة متعددة المراحل***

•توفر في الوقت والمال حيث يكفي بأعداد الإطار بوحدات المعاينة الثانوية لوحدات المعاينة الرئيسية المسحوبة بالعينة.

•هذا التصميم مرن حيث أنه من الممكن استخدام أسلوب سحب العينات في كل مرحلة مختلف عن المراحل الأخرى.

ويفضل ضمن أسلوب المعاينة المتعددة المراحل تقسيم المجتمع إلى وحدات معاينة رئيسية متساوية وذلك:

•عندما يكون حجم وحدات المعاينة الرئيسية كبير نسبيا يحتاج وقت كبير في إعداد إطار بوحدات المعاينة الثانوية.

•عندما يكون حجم وحدات المعاينة الرئيسية صغير يحتاج إلى وقت في عملية التنقل بين العينات.

### 1-1-7. أسلوب اختيار وحدات المعاينة الرئيسية

- إذا كانت وحدات المعاينة الرئيسية متجانسة يمكن استخدام العينة العشوائية البسيطة.
- إذا وجد تفاوت يمكن تقسيم وحدات المعاينة الرئيسية إلى طبقات وسحب عينة من كل طبقة.
- إذا كان التفاوت كبير يمكن استخدام العينة المتناسبة مع الحجم.

- يمكن استخدام العينة المنتظمة ولكن قد يكون من الصعوبة الحصول على تقدير غير متحيز لخطأ المعاينة.

### *تقدير حجم العينة*

نتناول فيما يلي موضوع تقدير حجم العينة الازم عند تنفيذ معاينة إحصائية او ما يسمى بالمسح الإحصائي وما هي المتطلبات الأساسية التي يجب توفرها للوصول إلى تقدير أمثل لحجم العينة .

**تحديد المؤشرات اللازمة لحساب حجم العينة**

إن عملية تقدير حجم العينة تقوم على أساس صيغ ومعادلات رياضية تعتمد على عدد من المتغيرات التي يجب توافرها عند إجراء عملية حساب حجم العينة المناسب .إن هذه المتغيرات هي كما يلي:

- معرفة مستوى الثقة بالتقديرات التي ستبنى بالاعتماد على هذا الحجم من العينة، كأن يكون % 99 (،% 95 ،% 90 ، )..وهي تمثل إحصائيا مساحات التوزيع الطبيعي تحت المنحنى الطبيعي القياسي عندما تكون قيم (1.64، 1.96 ، ...) Z ، 2.58على التوالي .وترتبط درجة الثقة بقيمة التقدير ارتباطا موجبا مع حجم العينة، أي كلما زاد حجم العينة يزاد مستوى الثقة بالتقدير.
- مستوى دقة التقدير، وهو عبارة عن قيمة الخطأ المسموح به أي الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية للمعلمة المطلوب إيجاد تقدير لها باستخدام بيانات العينة، ويتناسب حجم العينة طرديا مع مستوى دقة التقدير أي يزداد التقدير دقة ( أي يقل الخطأ ) كلما زاد حجم العينة.
- مقدار التباين في وحدات المجتمع الخاص بالمعلمة المنوي تقديرها، فإذا كانت قيمة تباين المجتمع غير معروفة للمؤشر المطلوب تقديره فيجب ايجاد تقدير مناسب لها .أحيانا قد يكون الهدف من المعاينة تقدير أكثر من مؤشر واحد .فإذا كان الهدف من المعاينة تقدير مؤشرات عديدة .لابد من اختيار مؤشر مناسب لتقدير حجم عينة يعتمد عليها في تقدير كافة المؤشرات المطلوبة بمستوى كاف من الدقة.
- لابد للباحث هنا من دراسة لاختيار كل من مستوى الثقة ومستوى دقة التقدير في حساب حجم العينة، فكلما كانت قيمة مستوى دقة التقدير أي حد الخطأ المطلوب عند التقدير d صغيرا، وكلما كان مستوى الثقة بتجاوز الخطأ المسموح به القيمة d عالي ، كلما احتاج حجم عينة أكبر .إن دراسة هذا الموضوع تكون من خال دراسة عدة قيم لكل من مستوى الثقة

z وحد الخطأ d وعلى أساس ذلك يتم وضع عدة سيناريوهات مختلفة لحجم العينة، لتقوم إدارة المسح بالموازنة بينها وفقا للتكاليف و الوسائل المادية والبشرية المتاحة.

## 1-2. دوال التوزيعات العشوائية الشائعة الاستعمال في الاكتوارية

فيما يلي نعرض بعض القوانين الشائعة الاستعمال في النمذجة الاكتوارية و التي تم تلخيصها من عدة مراجع في الاحصاء و اهمها: (عبد الجبار، 2017)، (Khaldi, 2006)، (Denuit & Charpentier, 2004)

### 1-2-1. قانون برنولي

يعتبر هذا القانون الركيزة الاساسية للقوانين الاحصائية و نفسه الحال في الدراسات الاكتوارية للتامينات. من اجل تعريف هذا القانون لیكن الحادثA و $A \in \mathcal{A}$ حيث $\mathcal{A}$مجموعة جزئية من المجموعة الاساسية Ω. نسمي المتغيرة الاساسية المميزة للحادث A.

$$X(w) = \begin{cases} 1 & w \in \mathcal{A} \\ 0 & w \in \bar{\mathcal{A}} \end{cases}$$

حيث $X(\Omega) = (0, 1)$ يعتبر كحادث بنتيجتين فقط مثال (حياة و وفاة) في حالة التامين على الحياة.

نعرف احتمالي تحقق و عدم تحقق الحادث A

$$p(X = 1) = p(w \in \Omega / X(w) = 1) = p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}$$

$$p(X = 0) = p(w \in \Omega / X(w) = 0) = p(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{p}$$

و نقول ان $X$ موزع وفق توزيع برنولي ذات الاحتمال $p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}$ و نضع :

$$X \rightsquigarrow B(p)$$

التوقع الرياضي ل $X$ يكون

$$E(X) = \sum_{i=1}^{2} p(X = x_i) = 1 - p + 0(1 - p) = p$$

حيث $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$.

التباين

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{2} (x_i - p)^2 = p - p^2 = pq$$

**2-2-1.قانون بينوميال (قانون ثنائي الحدين)**

نفرض انه يتم تكرار nمرة و في نفس الظروف لظاهرة برنولي حيث ان النتيجة تظهر ل A كاحدى نتيجتي بيرنولي و بالاحتمال $p$. نتيجة التجربة تكون مستقلة عن التجربة السابقة. ليكن عدد ظهور A بعد n تجربة حيث :

$$X(\Omega) = (0,1,2,3 \ldots\ldots n)$$

بالتالي نقول ان $X$ موزعة وفق توزيع بينوميال ذات الاحتمال $p$ و نضع :

$$X \rightsquigarrow B(n, p)$$

من اجل $K \in X(\Omega)$ شكل قانون بينوميال

$$p(X = K) = C_n^K p^K (1 - p)^{n-K} = \frac{n!}{K!\,(n - K)!}\, p^K (1 - p)^{n-K}$$

من هذه العلاقة يمكن استخراج التوقع الرياضي و التباين اللذان يكونان كما يلي:

التوقع الرياضي

$$E(X) = np$$

التباين

$$V(X) = np(1 - p) = npq$$

ملاحظات:

1. مجموع متغيرتين موزعتين وفق بينوميال يكون توزيع بينوميال

$$X_1 \sim B(n_1, p)$$

$$X_2 \sim B(n_2, p)$$

$$X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$$

2. لو نضع المتغيرة العشوائية $\frac{X}{n}$ التي تعبر عن التكرار و التي نرمز لها ب $f_n$ يمكن ان نلاحظ ان قيمة $f_n$ تكون مساوية الى $\frac{K}{n}$ و التي نرمز لها ب $f$

$$p(f_n = f) = C_n^K p^K (1-p)^{n-K} = \frac{n!}{K!\,(n-K)!}\, p^K (1-p)^{n-K}$$

بالتالي التوقع الرياضي للتكرار النسبي

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X) = p$$

التباين على التكرار النسبي

$$V(f_n) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X) = \frac{1}{n^2} p(1-p) = \frac{pq}{n}$$

يمكن استخدام هذه النتيجة لاستعمال الجداول الاحتمالية اذا كان $X \sim B(n,p)$ فان المتغيرة العشوائية (n-X) تكون موزعة وفق قانون بينوميال $B(n,p)$ذات القيم n و p .

### 3-2-1. قانون بواسون

لما نهتم بدراسة ظاهرة شاذة الحدوث و نعرف فقط متوسطة الظهور في وحدة الزمن و التكرار نستخدم تويع بواسون. حيث يمكن اعتبار قانون بواسون على انه مقاربة لقانون بينوميال. توزيع بواسون هو قانون لمتغيرة عشوائية موجبة التي تكون موزعة وفق الدالة :

$$p(X = K) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}$$

حيث $K \in N$.

الخصائص المهمة لقانون بواسون :

- التوقع الرياضي و التباين للمتغيرة العشوائية X متساويان يحققان $E(X) = V(X) = \lambda$ .
- نسبة احتمال الحصول على $K$ حادث الى $K-1$ يكون مساو الى نسبة المعامل$\lambda$ الى العدد K :

$$\frac{p(X = K)}{p(X = K-1)} = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^{K-1}}{(K-1)!}} = \frac{\lambda}{K}$$

- مجموع متغيرتين عشوائيتين مستقلتين و موزعتين وفق توزيع بواسون $X_1$و $X_2$ ذات المعالم $\lambda_1$ و $\lambda_2$ يكون موزع وفق توزيع بواسون ذات المعلمة $\lambda_1$ + $\lambda_2$ :

$$X_1 + X_2 \backsim p(\lambda_1 + \lambda_2)$$

### .1-2-4 التوزيع الاسي ذات المعلمة θ

في عموم الحالات يتم استخدام القانون الاسي من اجل نمذجة مدة حياة ظاهرة معينة و التي نرمز لها كما يلي:

$$X \backsim \varepsilon(\theta)$$

حيث $\theta > 0$ و دالة الكثافة لهذا التوزيع العشوائي:

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

التوقع الرياضي لمتغيرة عشوائية X:$E(X) = \frac{1}{\theta}$

التباين لهذه المتغيرة العشوائية :$V(X) = \frac{1}{\theta^2}$ .

### 1-2-5. قانون غاما ذات المعلمة r

القانون الاسي هو حالة خاصة من قانون غاما Γ.

لتكن المتغيرة العشوائية الموجبة X الموزعة وفق توزيع غاما ذات المعلمة r و التي يرمز لها:

$$X \sim \Gamma(r,1)$$

دالة الكثافة المميزة لهذه المتغيرة العشوائية تكون كما يلي:

$$r\epsilon N, r > 1 f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\exp(-x)\, x^{r-1}$$

حيث ان الدالة $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}dx$

التوقع الرياضي ل $X$ يكون: $E(X) = r$

يمكن حساب التوقع الرياضي كما يلي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty} x^r e^{-x}dx = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)} = r$$

التباين على X يكون كما يلي: $V(X) = r$

بما ان :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_x^{+\infty} x^{r+1}\, e^{-x}dx - r^2$$

$$V(X) = \frac{\Gamma(r+2)}{\Gamma(r)} - r^2 = (r+1)\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)} - r^2 = r(r+1) - r^2 = r$$

### 1-2-6. القانون الطبيعي

عدد كبير من المتغيرات العشوائية تكون موزعة وفق القانون الطبيعي ( هذا القانون ايضا يسمى بقانون غوس و لابلاس).

المعلمات الكافية لتعريف هذا القانون هما المتوسطة او التوقع و التباين. و نضع x موزع وفق القانون الطبيعي :

$$X \sim N(E(X), \sigma)$$

حيث $\sigma = \sqrt{V(X)}$ اي $\sigma$ تمثل الانحراف المعياري.

دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي معرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x - E(x)\right)^2\right)$$

القانون الطبيعي يلعب دور مهم في الاحتمالات خاصة و الاحصاء بصفة عامة حيث انه شائع الاستعمال لدراسة مختلف الظواهر.

الخصائص المهمة لهذا التوزيع العشوائي:

- التوقع الرياضي للمتغيرة العشوائية X يكون مساو ل: $E(X) = m$ حيث $m$ تمثل متوسطة المتغيرة $X$.
- التباين يكون مساو: $\sigma = \sqrt{V(X)}$.
- مجموع (او فرق) لمتغيرتين عشوائيتين مستقلتين $X_1$ و $X_2$ يتبعان القوانين الطبيعية على الترتيب: $N(E(X_1), \sigma_1)$ و $N(E(X_2), \sigma_2)$ يتبع ايضا التوزيع الطبيعي ذات المتوسطة $E(X_1) + E(X_2)$ و الانحراف المعياري $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

بتغيير المتغيرة $X$ بالمتغيرة $z = \frac{X-m}{\sigma}$ تصبح دالة التوزيع العشوائي للمتغيرة $z$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} z^2)$$

و نضع $z \sim N(0,1)$ و الذي يسمى بتوزيع القانون الطبيعي المعياري.

القوانين المشتقة من القانون الطبيعي

قانون كاي 2 ($\chi^2$) او قانون بيرسون)

يمكن اشتقاق هذا القانون من القانون الطبيعي.

ليكن $X_1, X_2, X_3 \ldots \ldots \ldots . X_n$ $n$ متغيرة عشوائية مستقلة فيما بينها و ذات نفس التوزيع العشوائي (التوزيع الطبيعي).

$$X \sim N(m, \sigma)$$

نعرف المتغيرة العشوائية $z = \frac{X-m}{\sigma}$ وكما عرفنا سابقا:

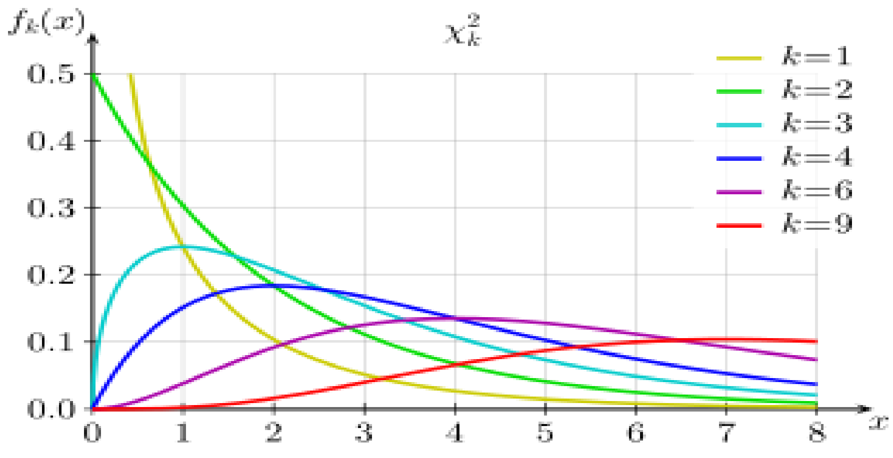
$z_i \sim N(0,1)$ و $i = \overline{1,n}$

نعرف $z_i{}^2 \sim \chi^2$ ذات درجة الحرية 1

و $z_1{}^2 + z_2{}^2 \sim \chi^2$ ذات درجة الحرية 2

و $\sum_{i=1}^{n} z_i{}^2 \sim \chi^2$ ذات درجة الحرية n.

قانون كاي مربع ليس بقانون متناظر




الشكل : تطور منحنى $\chi^2$ *وفق درجة الحرية* k.

تمارين محلولة حول استخدام هذه القوانين

**قانون برنولي**

شخص لديه ثروة تقدر بمبلغ 1000000دج. خلال مدة زمنية تقدر بسنة يمكن ان يتحقق حادث يؤدي بالشخص الى خسارة كل ثروته باحتمال 5%.

يمكن كتابة هذا الاشكال على شكل توزيع عشوائي كما يلي:

$$X = \begin{cases} 1000000\text{DA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (1) \\ \ 0\text{DA} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (2) \end{cases}$$

في الحالة (1) الحادث لم يتحقق

في الحالة (2) الحادث تحقق

من هذه المعلومات يمكن ان نحسب التوقع الرياضي و التباين على الخسارة المحتملة للشخص.

التوقع الرياضي ل $X$ يكون

$$E(X) = \sum_{i=1}^{2} p(X = x_i) = 1 - p + 0(1 - p) = p$$

حيث $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$.

$$E(X) = 1000000\text{دج} \times 0.05 + 0\text{دج} \times (1 - 0.05) = 50000\text{دج}$$

التباين

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{2} (x_i - p)^2 = p - p^2 = pq$$

$$V(X) = 0.05 \times (1000000 - 50000)^2 + (1 - 0.05) \times (0 - 50000)^2$$
$$= 47500\ 10^6$$

الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{v(x)} = 217945\text{دج}$$

بهذه النتائج يمكن القول ان الخسارة المتوقعة هي 50000دج بانحراف معياري 217945دج.

في حالة قانون بينوميال (ثنائي الحدين)

لو نفرض ان الحادث يمكن ان يتحقق مرتين في السنة و في كل مرة يفقد الشخص كل ثروته. اي يتم اعادة تكوينها بعد الحادث الاول و يتم فقدانها في الحادث الثاني.

يمكن كتابة الصيغة العشوائية لثروة الشخص في هذه المرة كما يلي:

$$X \rightsquigarrow B(2,0,5)$$

بالتالي يمكن ان نحسب التوزيع العشوائي للحالات الممكنة لتحقق الحادث كما يلي:

| عدد الحوادث الممكنة | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| احتمالات تحقق الحادث | | | |

لحساب الاحتمال يجب استخدام علاقة بيرنولي

# الفصل الثاني:
# النمذجة الاكتوارية

## الفصل الثاني: النمذجة الاكتوارية

النمذجة الاكتوارية ركيزة اساسية لتوضيح العلاقات و التركيبات الموجودة في العمليات المالية بصفة عامة و في العمليات المالية في التامينات بصفة خاصة. فيما يلي الطالب يكتشف اسس هذه النمذجة بنموذجيها الفردي و الجماعي ، لكن قبل ذلك نتطرق لبعض المفاهيم الاساسية في التامينات و التي نكون بحاجة اليها طيلة ما تبقى من المحاظرات. من اجل اعداد هذا الفصل اعتمدنا على المراجع التالية: (Partrat, Lecoeur, Nessi, Nisipasu, & Reiz, 2007) ،

(Cassabalian, 2000) ،

### 2-1. بعض المفاهيم الاولية في التأمين

نقدم فيما يلي ، بعض التعاريف الاساسية في التأمينات بالمنظور الاكتواري.

بالنسبة لشركة التأمين، فأن الهدف الأساسي الذي يجب أن تحققه هو أن تظل ذات ملاءة. على وجه الخصوص ، يجب عليه اخذ بعين الاعتبار كل الاحتمالات الممكنة حتى يتمكن في كل حالة تعويض حاملي وثائق التأمين.

لذلك من المهم إجراء جرد للعقود التي تربطه بالمؤمنين لهم. وبالتالي فإن شركة التأمين تأخذ بعين الاعتبار عدد من المخاطر $K$ التي تخضع لها والتي سيتم تمثيلها بواسطة المتغيرات العشوائية الموجبة $X_K$ ،... ، $X_1$. وبشكل أكثر تحديدًا، يمثل كل $X_k$ المبلغ الذي يجب على شركة التأمين تعويضه للمؤمن له $k$ عند تقديم مطالبة.

#### 2-1-1. أمثلة على التأمين والأسعار

يتم تقسيم التأمين إلى فئتين رئيسيتين ، والتي تحتوي في حد ذاتها على عدة فروع.

**الفئة الأولى هي التأمين على الأشخاص:** في هذه العقود التامين يشمل بشكل أساسي التأمين على الحياة والموت ، والصحة ، والحوادث الشخصية ، والرعاية الصحية الطويلة الأجل .

**الفئة الثانية بالتأمين على الممتلكات والمسؤولية:** في هذه العقود ، يكون التعويض في حالة المطالبة تعويضيًا بشكل أساسي. تشمل هذه الفئة بشكل أساسي التأمين على السيارات و المساكن والممتلكات المهنية والكوارث الطبيعية والبناء والمسؤولية المدنية العامة والحماية القانونية والمساعدة والخسارة المالية.

هذا التقسيم إلى فروع التأمين المختلفة يجعل من الممكن بناء محافظ التأمين تتكون من نفس المخاطر وبالتالي الاقتراب من فرضية التأمين المركزية التي هي تجانس المخاطر.

هذا التقسيم لعقود التأمين مهم أيضًا لأسباب ليست تقنية فحسب ، بل تتعلق بالأداء السليم لسوق التأمين.

من الناحية الاقتصادية ، يتيح تجزئة التعريفة أيضًا لشركات التأمين أن تتمتع بميزة تنافسية عندما تعتمد التعريفة على المخاطر. هذا يجعل من الممكن أيضًا تجنب الظاهرة المعروفة في الأدبيات الاقتصادية تحت مصطلح مكافحة الاختيار.

بمجرد وضع هذه المنظمة لعقود المخاطر المتجانسة ، يتم حساب أقساط التأمين بشكل عام من خلال العمل بالضمان وباستخدام إحصائيات المطالبة للضمان المعني.

### 2-1-2. معطيات دراسة التامين

جودة البيانات التي تعتبر قضية ذات أهمية متزايدة بالنسبة إلى الخبراء الاكتواريين، .لا تزال مشكلات البيانات تمثل نقطة حظر بشكل منهجي في العديد من الدراسات الاكتوارية سواء كانت غير صحيحة أو غائبة ، فهذه الدراسات المشاكل تكلف الشركات ، من حيث الوقت المستغرق في تنظيف هذه البيانات و من حيث المال ، ومع ذلك ، فإن ظهور خوارزميات التعلم الجديدة و

يمكن أن تؤدي أحجام البيانات المتزايدة إلى إعادة التفكير في العديد من الخبراء الاكتواريين

### 3-1-2. قيود التأمين

فيما يلي، نقدم القيود التي تحكم تصميم وتنفيذ النماذج الرياضية المستخدمة لحساب أقساط التأمين و المتمثل في **تجميع المخاطر وتقسيمها.**

في مجال التأمين ، يبدو أن مبدأين أساسيين يتعارضان.

المبدا الاول هو تجميع المخاطر لمواجهة التباين الكبير في إدراك المخاطر ، هناك حاجة إلى تجميعها في محافظ جزئية من أجل تقليل متوسط المخاطر.

المبدأ الثاني هو أن تجزئة المخاطر الى مجموعات مخاطر متجانسة. تأتي هذه الحاجة للتجزئة من حقيقة أن المخاطر ليست متجانسة بشكل عام وأن هناك حاجة إلى تجميعها معًا حتى تتمكن من تطبيق علاوة مميزة على كل مجموعة من المجموعات التي لديها مخاطر متجانسة. يعتبر البحث عن نماذج احتمالية تسمح بتقسيم مناسب للمخاطر نشاطًا رئيسيًا في رياضيات التأمين المعاصرة. ومع ذلك ،

تجدر الإشارة إلى أن الكثير من عمليات التجزئة تؤدي إلى وضع إشكالي نظرًا لأن أقساط بعض حاملي وثائق التأمين قد تصبح مرتفعة للغاية (هذا هو مثال التأمين على السيارات).

في هذه الحالة ، لا يبدو أن دور التأمين هو تحديد التوازن بين هذين الهدفين المتعارضين. وبالتالي فإن دور الخبير الاكتواري هو ببساطة ، بالنسبة لمخاطر معينة ، تقييم قانون الاحتمالات الخاص به بأكبر قدر ممكن من الدقة.

### 4-1-2. النمذجة في وقت مستمر ووقت متقطع

هنا المسالة يمكن تلخيصها انها مسألة الاختيار بين النمذجة في زمن منفصل والنمذجة في زمن مستمر.

تتعلق النمذجة الاولى في حالة التأخيرات التي تظهر غالبًا بين المطالبات وتعويض حاملي الوثائق. يتم قياس هذه التأخيرات عمومًا بوحدات زمنية يمكن ان تكون منفصلة. و هي ذات طابع تنظيمي. في الواقع ، اذ يجب تأطير ممارسة التأمين من خلال النشاط المحاسبي الذي يهدف إلى جرد موجودات ومطلوبات شركة التأمين. هذا المخزون أساسي لأنه يسمح بمعرفة الحالة المالية للشركة. في هذا النشاط المحاسبي ، يقاس التطور بمرور الزمن بوحدة زمنية تساوي سنة واحدة.

النمذجة الثانية اي في زمن متصل في هذه الحالة الفترات الزمنية التي تفصل بين لحظتي القياس تتقارب الى 0. اي انه يصبح تدفق عمليات التامين و بالتالي التدفقات المالية التعويضات و التسديدات للأقساط بصفة مستمرة.

### 5-1-2. التأمين على الحياة وغير الحياة

التأمين على الحياة والتأمين على غير الحياة قد تطورا تاريخيا في أوقات مختلفة وبطرق حسابية مختلفة. يأتي هذا الاختلاف في الأساليب الحسابية بشكل رئيسي من حقيقة أن المخاطر المرتبطة بكل نوع من التامين.

التأمين على الحياة لفترات أطول يخضع لمخاطر أسعار الفائدة. في الواقع ، نظرًا لأن شركة التأمين تدفع أقساط التأمين لحاملي وثائق التأمين الخاصة بها على مدار عدة سنوات ، فإن المبلغ الإجمالي المدفوع و المكون للتعويض يعتمد بشكل كبير على تطور أسعار الفائدة.

في التأمين على غير الحياة و بخلاف التأمين على الحياة ، والذي يغطي المخاطر قصيرة الأجل ، فإن الخطر الرئيسي على شركة التأمين هو التباين الكبير في المطالبات ، وهو ما يسمى مخاطر التباين.

### 2-1-6. أقساط التأمين

سنتطرق فيما يلي الى نوعين اساسا الى نوعين من أقساط التأمين. الأول هو القسط الخالص ويتوافق مع توقع (اي متوسط) $E[X]$ للمخاطر $X$. إذا هذا القسط يسمح في المتوسط ان لا يكون المؤمّن في حالة عجز. ثم تضيف شركة التأمين كمية متناسبة للحصول على القسط المشحون

$(1+\eta)E[X]$ حيث $\eta$ هي رسوم السلامة. هذا التحميل يجعل من الممكن تقليل احتمال العجز او الافلاس لشركة التأمين.

من الضروري إضافة القسط التجاري عن طريق تطبيق على القسط المشحون تحميلًا ثانيًا. يشمل هذا الحمل الثاني التكاليف والرسوم المختلفة لشركات التأمين: المكافآت الرأسمالية والضرائب تكاليف إعادة التأمين ورسوم الإدارة. بشكل عام ، تطبق كل شركة قواعدها الخاصة لحساب التحميل التجاري.

## 2-2. النموذج الجماعي و النموذج الفردي

### 2-2-1. النموذج الفردي

**تعريف 1:** نموذج الخطر الفردي هو سلسلة محدودة $X_1$ ،... ، $X_n$ من المتغيرات العشوائية المستقلة و ذات نفس التوزيع العشوائي. يتم تحديد المبلغ الكلي للأخطار (للمطالبات) $S$ كما يلي:

$$S = X_1 + \ldots + X_n.$$

في هذا النموذج ، تمثل المتغيرة العشوائية $X_k$ التعويض المتركم ( مجموع التعويضات ) الممنوح لمطالبات المؤمن $k$ خلال فترة معينة.

**تعريف 2:** القسط الصافي هو التوقع الرياضي $E[S]$ للمبلغ التراكمي للمطالبات $S$.

*والنتيجة الأولى لتعريف النموذج الفردي يمكن ان تكون كالآتي:*

**اقتراح 1:** في النموذج الفردي للمخاطر $X1$ ،... ، $Xn$ مع المبلغ التراكمي للمطالبات

$S = X1 + \ldots + Xn$ يمكن حساب: $E[S] = nE[X1]$

اذا كانت: $E\,[X1]\ < +\infty$ و

$$V\,ar\,[S] =\ nV\,ar\,[X1]$$

اذا كانت $E\,[|X_1|^2]\ < +\ \infty$

نسعى الآن إلى حساب دالة التوزيع العشوائي للمبلغ التراكمي S. لهذا ، تذكر أنه إذا كان Y و Z متغيرتين عشوائيتين حقيقتين مستقلتين و ذوات دوال توزيع عشوائية على الترتيب $F_Y$ و $F_Z$ ، المتغيرة العشوائية $Y + Z$ تقبل كدالة توزيع عشوائي دالة الالتواء $FY \star FZ$ و التي يتم حسابها كما يلي:

$$FY\ \star\ FZ\,(x)\ =\ \int_R\ F_Y\,(x\ -\ z)\,dP_Z\,(z)\ \ =\ \int_R\ F_Z\,(x\ -\ y)\,dP_Y\,(y)$$

نضع $F_S$ دالة التوزيع العشوائي ل S و $F_X$ دالة التوزيع العشوائي ل $X_k$ الاستدلال (البرهان) بالاستقراء يسمح بالحصول على الخواص التي سيتم التطرق اليها فيما يلي.

**الاقتراح 2**: في النموذج الفردي للمخاطر $X1$ ،...، $Xn$ مع الخسائر المتراكمة و المعبر عنه ا كما يلي: $S\ =\ X_1\ + \cdots \ldots +\ Xn$ ، يمكن كتابة ما يلي:

$$F_S\ =\ F_X^{*n} =\ F_X * \ldots\ldots\ldots *\ F_X \qquad (n \text{ مرة}).$$

## 2-2-2. النموذج الجماعي

امتداد لنموذج المخاطر الفردية هو نموذج المخاطر الجماعية الذي نعرفه في الاسطر الموالية.

**تعريف 3**: نموذج الخطر الجماعي هو تسلسل لانهائي $(Y_k)_{k\geq 1}$ للمتغيرات العشوائية المستقلة والموزعة بشكل متطابق ومتغيرة عشوائية مستقلة N ذات قيم صحيحة. ثم يتم تحديد المبلغ التراكمي للمطالبات S بواسطة

$$S\ =\ Y_1 + \ldots + Y_N\ = \sum_{k=1}^{N} Y_k$$

يمكننا بعد ذلك إنشاء نتيجة مماثلة لنموذج المخاطر الفردي لحساب العزمين الاول و الثاني.

**الاقتراح 3**. في نموذج المخاطر الجماعية بعدد N من المخاطر، $(Y_k)_k \geq 1$ مع مبلغ تراكمي للمخاطر (للمطالبات) $S = Y_1 + \ldots + Y_N$ لدينا

$$E\,[S] = E\,[N]\,E\,[Y_1]$$

$$\mathrm{E[Y1]} < +\infty \; et \; E[N\,] < +\infty$$

$$\mathrm{Var[S]} = \mathrm{E[N\,]Var[Y_1]} + \mathrm{Var[N\,]E[Y_1]^2}$$

اذا

$$\mathrm{E[|Y1|^2]} < +\infty \; et \; E[|\mathrm{N}|^2] < +\infty$$

ندرس الآن فكرة الافلاس (او العجز اذا كان مؤقت و الخراب اذا كان دائم) وبصورة أكثر دقة احتمال الافلاس. نفرض شركة تأمين ذات مخاطر خسارة تراكمية معبر عنها بواسطة متغيرة عشوائية S و ذات عزوم الاول و الثاني محدودين( اي موجودين). من اجل معدل تحميل $\eta > 0$ ، نسمي المبلغ التراكمي للأقساط المحملة بالتحميل التقني $\eta$ :

$$\Pi = (1 + \eta)\,E\,[S].$$

لتقليل مخاطر الافلاس او العجز او بصفة اوسع الخراب ، لدى شركة التأمين احتياطي ملاءة$R$ . يمكن أيضًا لشركة التأمين أن تنقل جزءًا من المخاطر إلى معيد تأمين عن طريق الاحتفاظ بنسبة $\theta$ من مبلغ الأقساط المحصلة المتراكمة والمطالبات والتنازل عن الباقي إلى معيد التأمين. ثم يتم تعريف احتمال الافلاس او العجز او بصفة اوسع الخراب على النحو التالي.

**التعريف 4** نأخذ بعين الاعتبار مجموعة من المخاطر التراكمية S ذات دالة توزيع عشوائي $\mathrm{F_S}$ و و قسط صافي $\mathrm{E\,[S]} = 0$. لتحميل تقني من اجل امان شركة التامين $\eta > 0$ ، احتياطي الملاءة $\mathrm{R} > 0$ وإعادة التأمين على السعر الاحتفاظ $\theta \in ]0 ، 1]$ ، يتم إعطاء احتمال الافلاس او العجز او الخراب $\mathrm{P}_{\text{الافلاس}}$ كما يلي:

$$\mathrm{P}_{\text{الافلاس}} = \mathrm{P\big(\theta S > \theta\,(1 + \eta)\big)E\,[S] + R}$$

$$= 1 - F_S\,(1 + \eta)\,E\,[S] + \frac{\mathrm{R}}{\theta}$$

لاحظ أن هذا التعريف بديهي و مقبول لأنه يتوافق مع احتمال أن تتجاوز الخسائر التراكمية التي تتحملها شركة التأمين θS الأموال المتاحة لها اي الاقساط و الاحتياط. يتم تقسيم هذه الأموال إلى مجموع الأقساط التي تحتفظ بها $\theta\ (1\ +\ \eta)\ E\ [S]$ واحتياطي الملاءة لها R.

نفترض أن معيد التأمين لا يتخلف عند التسديد في حالة افلاس شركة التأمين. شركة التأمين لديها سوى نسبة θ من الأقساط والمطالباتS ، نسبة التكلفة المتبقية التي يتحملها المؤمنون عليهم هي:

$$\frac{E[\theta S|\theta S > \ \theta\ (1\ +\ \eta)E\ [S] +\ R] - (\ \theta(1\ +\ \eta)E\ [S] +\ R)}{(1\ +\ \eta)E\ [S] + \frac{R}{\theta}}$$

وهو ما يقودنا إلى التعريف التالي.

**التعريف 5.** لنقم بتعيين مجموعة مخاطر تراكمية S لدالة توزيع $F_S$ و قسط $E\ [S] \neq 0$. من اجل تحميل تقني لامان شركة التامين $\eta\ >\ 0$ ، و احتياطي $R\ >\ 0$ وإعادة التأمين بمعدل احتفاظ $\theta\ \in$ [1 ، 0 ] ، نسبة التكلفة

$$= \theta\left(\frac{(E[S|\theta S > \theta(1\ +\ \eta)E\ [S] +\ R])}{(1\ +\ \eta)E\ [S] + \frac{R}{\theta}} - 1\right)$$

**التعريف 6.** يحدد معدل الشحن الإجمالي للقسط الصافي بالكمية $\eta\ + \frac{R}{\theta E[S]}$.

ندرس الآن تأثير التغطية بين المخاطر. على وجه التحديد ، نحاول إيجاد الحد الأدنى لمستوى تحميل الأمان المطلوب للتعامل بشكل صحيح مع احتمال الافلاس او الخراب. بمعنى آخر ، نريد أن نعرف ما إذا كانت التغطية بين المخاطر كافية لضمان وجود لتقليل احتمال الافلاس عندما يكون القسط المطلوب هو القسط الصافي.

**الاقتراح 4** النظر في نموذج فردي $X_n$ ، ... ، $X_1$ من السلسلة التراكمية S مع

$$0\ < E\ [X_1] < +\infty \text{ و } \eta >\ 0$$

$$\frac{S}{E(S)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad \text{(بتقارب موثوق)}$$

$$P(S > (1+\eta)E(S) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

حيث العزم الثاني موجود $0 < \sigma^2\,[X_1] < +\infty$

باستخدام متباينة بينيامي تشيبيشاف اين نضع $\varepsilon \in [01]$ نجد ان

$$P_{\text{الافلاس}}(S > E(S)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P(S > E(S) + \sqrt{n\sigma^2(X_1)}\Phi^{-1}(1-\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varepsilon$$

$$\frac{E[S|S > E[S]]}{E[S]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

حيث $\Phi(.)$ يمثل توزيع قانون طبيعي المعياري.

عندما يكون القسط المطلوب هو القسط الصافي ، على الرغم من أن نسبة المطالبات (الخسائر) الى قسط التأمين يقارب إلى 1 عندما يكون عدد حاملي الوثائق يقارب إلى ما لا نهاية ، فإن احتمال الافلاس لا يقارب عمومًا إلى 0. في نفس الوقت راينا ان التحميل التقني للقسط يسمح بتقارب احتمال الافلاس الى 0. وأخيراً من أجل السيطرة الجيدة على احتمال الافلاس ، يكفي أن يكون معدل التحميل مبني نسبة الى عدد المؤمن عليهم بما يتناسب مع $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

### 3-2-2. النماذج الجماعية في وقت مستمر

فيما يلي نقوم بعرض مختصر للنموذج الجماعي في وقت مستمر.

- سلسلة من المتغيرات العشوائية $(Y_i)_{i\geq 1}$ مستقلة وموزعة بشكل بنفس التوزيع العشوائي ، و هي متغيرات ايجابية تمثل تكلفة المطالبات ،

- و ذات سلسلة $(N_t)_{t\geq 0}$ ذات قيم في N و تكون متزايدة (يمكن ان تمثل عدد حاملي الوثائق او العدد العقود مثلا) ، مستمرة على اليمين ومحدودة على اليسار ومستقلة عن السلسلة $(Y_i)_{i\geq 1}$.

من اجل احتياطي R ومعدل الحصول على العقود π عند كل وحدة زمنية ، يمكن الحصول على نتيجة شركة التأمين في الوقت $t \geq 0$ كما يلي:

$$R\ (t) = \ R\ + \pi t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

في هذا النموذج ، يتغير تعريف احتمال الافلاس . في الواقع ، من الضروري أولاً تعيين أفق زمني T. في مجال زمني [T ، 0]، يعتبر الحدث الذي يجب مراعاته لمعرفة ما إذا كان المؤمّن يكون في حالة افلاس او عجز عن السداد هو الحدث الذي تصبح نتيجته سلبية مرة واحدة على الأقل. احتمال احتمال الافلاس اذا يكون:

$$P = P(\min_{t\in\ [0، T]} R(t) < 0)$$

# الفصل الثالث: التامين على الحياة

**الفصل الثالث: التامين على الحياة**

يعتبر التامين على الحياة من اهم استخدامات علم الاكتوارية. لما نسمع عن التامين على الحياة يجب ان تخيل مجال اوسع عن من حصره في عقود التامين على الحياة او الوفاة بل يشمل ايضا مجال المعاشات و المعاشات التكميلية و رؤوس الاموال المؤجلة. فيما يلي نتطرق الى طرق كتابة هذه العقود بالشكل الاكتواري و كيفية حساب الاقساط في حالة التامين على الحياة و الوفات، لكن قبل ذلك نتطرق الى مراجعة لاسس الرياضيات المالية لان هذه العقود تاخذ شكل تدفقات مالية مستقبلية يتم حسمها. من اجل تحضير ما يلي اعتمدنا على المراجع التالية: (Masiéri, 2001)، Borowiak (& Shapiro, 2014)، (Hess, 2000)، (Hurlimann, 2009)، (Fromenteau & Petauton, 2017).

**3-1. مراجعة للرياضيات اللمالية**

يمكن تعريف الرياضيات المالية على انها تطبيق للأسس الرياضية و الاحصائية في العمليات المالية الاخطية (اي العمليات التي تأخذ الزمن بعين الاعتبار).الرياضيات المالية تستخدم اساسا الوسائل المشتق من عمليات ألحسم نظرية الاحتمالات و الحسابات العشوائية و الاحصاء و عمليات التفاضل.

الفائدة هي مجموعة من الاموال المستحقة من طرف الدائن للمدين مقابل راس المال الذي تم قرضه.

**مثال**

سيد x اقترض مبلغ 1200دج من بنك من اجل ان يشتري سيارة . يسدد هذا المبلغ على شكل 36 تسديدة شهرية مبلغ كل تسديدة 365دج.

بحساب سريع يمكن تحديد مبلغ الفائدة السددة من طرف المدين:

$$365\text{دج} \times 36 - 1200\text{دج} = 1140\text{دج}$$

المبلغ 1140 دج يمثل مبلغ الفائدة المقدمة من طرف المقترض الى البنك.

**مثال 2**

شخص اودع في رصيد بنكي مبلغ 4500 دج بعد 3 سنوات وجد في رصيده مبلغ 4900دج.

مبلغ الفائدة المتحصل عليه يكون $4900\text{دج} - 4900\text{دج} = 400\text{دج}$.

1-1-3. معدل الفائدة

معدل الفائدة يسمح بحساب الفائدة التي تعطى لصاحب راس المال و التي تكون دائما على شكل نسبة مؤية مستقلة عن وحدة القياس( الوحدة النقدية) و هي متعلقة بالفترة الزمنية كان يكون المعدل سنوي.

**مثال**

معدل فائدة سنوي مقدر ب 6% معناه ايداع مبلغ 1 دج في هذا المعدل يمنح صاحب الرصيد 1,06 دج بعد سنة من الايداع.

يمكن تصنيف معدلات الفائدة الى عدة اصناف مختلفة:

معدلات فائدة ثابتة و معدلات فائدة متغيرة.

معدل الفائدة الثابت هو معدل يتم تحديده عند امضاء العقد و لا يتغير خلال مدة العقد. يمكن ان نتكلم عن المعدل الاسمي.

معدل الفائدة المتغير هو معدل لا يتم تحديد مستواه عند امضاء العقد و انما يتغير وفق عدة معطيات اما متعلقة بالعقد و كما يمكن ان تكون المعطيات خارج العقد مثل السوق المالي او السوق النقدي...الخ. في هذه الحالة يمكن الكلام عن المعدل الحقيقي.

من التعاريف السابقة يمكن اعطاء تعاريف اكثر تفصيلا كما يلي:

**معدل الفائدة البسيط:**

نقول عن الفائدة I انها فائدة بسيطة لما يتم تسديد الفائدة مرة واحدة و بصفة نسبية الى مدة الايداع. هذه الفائذة يمكن حسابها بدلالة:

$$\begin{cases} t & \text{معدل الفائدة} \\ n & \text{مدةالايداع} \\ C & \text{راس المال} \end{cases}$$

ملاحظة هامة: يجب دائما دائما ان يكون n و t من نفس المرحلة. مثلا اذا كان مدة الايداع سنوية يجب ان يكون معدل الفائدة ايضا سنوي.

**معدل الفائدة المركب:**

نقول عن راس مال مودع في فائدة مركبة اذا كان في نهاية المدة الزمنية ( مدة التوظيف) يتم اضافة الفوائد الى راس المال حتى تكون هي ايضا فوائد بذاتها.

اذا كان $c_0$ راس مال مودع في معدل فائدة t (معدل فائدة لمرحلة واحدة) و خلال nمرحلة يكون راس المال المحصل $c_n$ يمكن حسابه كما يلي:

$$c_n = c_0(1+t)^n$$

**مثال**

يودع شخص مبلغ 100000دج في معدل فائدة مركب و خلال سنتين. قيمة معدل الفائدة 4%.

السؤال ما هو المبلغ المتحصل عليه في نهاية مدة الايداع؟

$$c_2 = 100000(1+0,04)^2$$

$$c_2 = 108160 \text{ دج}$$

### 2-1-3. المعدل الاكتواري

هذا المعدل ياخذ بعين الاعتبار التكلفة الحقيقية و الايراد الحقيقي لعملية مالية. بصيغة اخرى هو معدل فائدة يسمح بمساواة بين النفقات الحقيقية و الايرادات الحقيقية. يستخدم على نطاق واسع في عالم المال. يشير المعدل الاكتواري إلى المعدل الفعلي للعائد على الاستثمار. و هو سعر الفائدة الذي يتقاضاه المستثمر بالفعل.

ينطبق المعدل الاكتواري بشكل أساسي على العوائد المرتبطة بمنتجات الاستثمار أو القروض أو حتى إصدارات القروض.

يعتمد حساب المعدل الاكتواري في عموم الحالات باستخدام اساس الفائدة المركبة ، مع مراعاة جميع شروط الإصدار (علاوة الإصدار ، ومعدل السداد ، ومقدار الفائدة ، ومدة القرض). لمعرفة ذلك ، يجب تنفيذ العملية التالية:

سعر الإصدار $=$ السند $(1 + r)^{-n}$ العوائد السنوية $+$ $(1 + r)^{-n}$ مبلغ الاسمية بالقيمة

حيث $n$ يمثل عدد المراحل بين لحظة التدفق المالي و لحظة التقييم. و $r$ يمثل المعدل الاكتواري.

3-1-3. مراجعة لأساس الحسم

الحسم هي العملية العكسية للتوظيف. الحسم يسمح بحساب مبلغ مكافئ حالي لتدفق مالي في المستقبل. ذلك يكون باستخدام معدل الحسم الذي ليس شرط ان يكون معدل الفائدة. رغم انه في معظم الحالات يستخدم معدل الفائدة. حتى نقوم بحسم مبلغ C يكفي فقط ان نطرح السؤال التالي:

ما هو المبلغ الذي يجب ايداعه في الوقت الحالي حتى نحصل على المبلغ C بعد n علما ان معدل الفائدة t.

$$c_o = c_n(1+t)^{-n}$$

**مثال**

ليكن مبلغ 100000دج محصل بعد 5 مراحل من الايداع في معدل فائدة 10%.

ما هي القيمة المودعة؟

$$c_o = 100000\ (1,1)^{-5} = 62092,13$$

**حسم متتالية من تدفقات مالية نهاية المدة**

ليكن aقيمة التدفق المالي لمرحلة واحدة (سنة مثلا) حيث ان التدفق المالي يكون في نهاية السنة.
القيمة الحالية ما هي الا القيمة المكافئة لمجموعة من التدفقات المالية الفردية المحسومة.

$$V = a\left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right)$$

**مثال**

يقوم سيد بإيداع في نهاية كل سنة مبلغ 10000دج في معدل فائدة 5% قصد تكوين ادخار. ما هو المبلغ الحلي المكفئ لمجموع التدفقات المالية؟

$$V = 10000\left(\frac{1-(1+0,05)^{-n}}{0,05}\right)$$

ملاحظة لما تكون التدفقات في بداية المدة يكفي فقط ان نقوم بجداء العلاقة السابقة في معامل التوظيف (1+t).

**حسم عدد من تدفقات مالية متغيرة**

نفس اساس الحسم الموضح سابقا لكن في هذه الحالة التدفقات المالية ليست متساوية بالتالي لا يمكن ان نكون متتالية من شكل نظامي. في هذه الحالة يتم حسم كل تدفق مالي على حدى و يتم جمع القيم الحالية لمختلف التدفقات المالية.

**مثال**

لتكن 5 تدفقات مالية كما يلي:

50000دج في تاريخ 01/01/سنة ن+1

10000دج في تاريخ 01/01/سنة ن+2

5000دج في تاريخ 01/01/سنة ن+3 و ن+4

15000دج في تاريخ 01/01/سنة ن+5.

نجد ان القيمة الحالية:

$$V = 50000(1+0.03)^{-1} + 10000(1+0.03)^{-2} + 5000(1+0.03)^{-4} + 15000(1+0.03)^{-5}$$

## 3-2. التامين على الحياة

### 1-2-3. مدة حياة الشخص كمتغيرة عشوائية

نفرض شخص ما (رجل او امرأة) عند الولادة اللحظة التي تؤخذ كأساس للسلم الزمني. نضع $T_0$ المدة المتبقية من حياة الشخص. بما ان ليس هناك تاكيد على هذه المدة يمكن ان تقبل ان $T_0$ متغيرة عشوائية. هذه المتغيرة العشوائية معرفة في فضاء عشوائي $(\theta, F, P)$. يمكن ارفاق هذه المتغيرة العشوائية بدالة التوزيع العشوائي كما يلي :

$$F_0(t) = P(T_0 \leq t)$$

لدينا $T_0$ موجبة او معدومة و نعلم ان مدة الحياة محدودة من الاعلى بالسن الاعضمي الذي نرمز له ب $w$. هذا ما يسمح لنا بكتابة $F_0(w) = 1$ من اجل $w \leq t$ .

عمليا و في حالة التامين على الحياة نفرض ان شخص ما في يبلغ سن X عند امضاء عقد التامين و شركة التامين تهتم بالمدة المتبقية من حياة الشخص. نرمز لهذه المدة المتبقية ب $T_x$.

من هذا التعريف يمكن كتابة العلاقة التالية:

$$T_0 = X + T_x$$

لو نضع $(.)_x$ دالة التوزيع العشوائي ل$T_x$ يمكن ان نجد من اجل كل عدد حقيقي $t$ العلاقة التالية:

$$F_x(t) = P(T_0 - x \leq t / T_0 > X)$$

$$F_x(t) = P(T_x \leq t / T_0 > X)$$

منه نجد:

$$F_x(t) = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}$$

بالتالي:

$$F_x(t) = \frac{P(X \leq T_0 \leq X + t)}{P(T > X)}$$

لو نضع $Q_x$ دالة الاحتمال الشرطي بالنسبة الى الحالة $(T_0 > X)$ يمكن ان نضع مباشرة:

$$Q_x = P(./T > X)$$

و يمكن ان نكتب ايضا:

$$F_x(t) = Q_x(T_x \leq t)$$

بما ان الشخص بلغ سن X فهذا يمثل بمثابة معلومة لشركة التامين و بما ان لدينا

$$T_x > 0 = T_0 > X$$

للحصول على احتمال $T_x$ يمكن استخدام الاحتمال الشرطي $Q_x(.)$. من اجل ذلك يكفي ان نفرض ان الشخص على قيد الحياة و ذات سن $X$ و التي تمثل لحظة اكتتاب عقد التامين. المؤمن يهتم بقيم $F_x(.)$ لما $t \in [0, w - X]$.

### 3-2-2. احتمال البقاء على قيد الحياة

مطابقة الى التعريف الاكتواري المتعارف عليه احتمال البقاء على قيد الحياة من السنX الى السن X+t يكون كما يلي:

$$_nP_x = Q(T_x > t) = P(T_x > t/T_x > 0) = 1 - F_x(t)$$

بما ان حياة الشخص محدودة من الاعلى بسن w فان $T_x + X \leq w$ و من اجل كل $t > w - X$ و $_nP_x = 0$ .

و بالتالي لدينا لكل شخص ذات السن X .

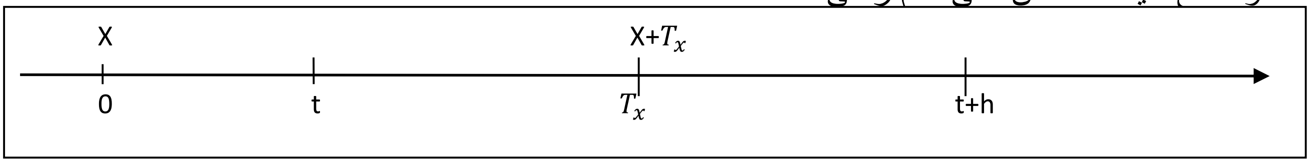
$$_0P_x = Q(T_x > 0) = 1$$

حيث $Q(.)$ يمثل احتمال شرطي.

### 3-2-3. احتمال الوفاة

نفرض شخص ذات سن X و t و h عددين اكبر من 0. احتمال الوفاة لشخص في سن Xبين سنين t و t+h يرمز له ب ${}_{t/h}q_x$ .

لو نضع حياة الشخص على سلم زمني




$$T_x > t = (t < T_x < t + h) \cup (T_x > t + h)$$

الحالتين الموضحتين في هذه العلاقة نلاحظ انهما مستقلتين. هذا ما يسمح لنا باستعمال الخاصية التجميعية للاحتمالات و تتحصل على ما يلي:

$$Q_x(T_x > 0) = Q_x(t < T_x < t + h) + Q_x(T_x > t + h)$$

هذا ما يعني

$${}_{t/h}q_x \ = \ {}_{t}p_x \ - \ {}_{t+h}p_x$$

يمكن الحصول على قيم $p_x$ و $q_x$ من جداول الوفيات.

### 4-2-3. متوسط عدد الاحياء

لحد الان اخذنا بعين الاعتبار حالة شخص واحد لبناء جدول الوفيات و استخدام هذا الجدول نهتنم الان بعدة اشخاص اكثر من شخص واحد.

اولا يجب الاشارة الى عنصر جد مهم يتعلق بتكوين محافظ الاخطار. عند تكوين محافظ الاخطار يجب مراعاة عدة شروط :

التجانس نقول عن محفظة انها متجانسة اذا كان كل افراد المحفظة ذات نفس الدرجة امام الخطر.

الاستقلالية اي ان تحقق الخطر عند عقد معين لا يستلزم تحقق الخطر عند عقد اخر مثل التامين على الحريق حيث ان المؤمن يجب ان يتأكد من عدم جوار المؤمنين لهم لان اندلاع الحريق عند فرد يمكن ان يتسبب في اندلاع الحريق عند جاره.

حساب الاقساط في حالة التامين على الحياة يكون على اساس دراسات احصائية اما حقيقية او متوقعة. اذا اخذنا بعين الاعتبار مجموعة من اشخاص في عوض شخص واحد يجب ان يؤخذ بعين الاعتبار معيار التجانس.

اخذا بعين الاعتبار الاسس السابقة يمكن ارفاق عدد ارفاق عدد الاشخاص الذين هم على قيد الحياة عند اللحظة t بقانون توزيع عشوائي. من اجل ذلك ناخذ بعين الاعتبار فئة متجانسة من الاشخاص و نلاحظ تطور الوفاة خلال عدد من السنوات و نفرض انه داخل هذه الفئة و عند لحظة معينة ما و الموافقة لسن X يكون $L_x$ عدد الاشخاص الذين هم على قيد الحياة. بما ان هذه الفئة متجانسة فان كل افراد هذه الفئة ذات نفس احتمال الوفاة خلال مرحلة ما.

ميزة حياة الشخص ذات سن X :

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{الشخص على قيد الحياة} \\ 0 & \text{الشخص متوفي} \end{cases}$$

حيث $i \in [1, n]$

$$X_i(t) \sim B(\ {}_tP_x\ )$$

بالتالي يمكن كتابة قانون التوزيع العشوائي لعدد الاحياء كما يلي:

$$L_{x+t} \sim B(L_x,\ {}_tP_x\ )$$

لان

$$L_{x+t} = \sum_{i=1}^{L_x} X_i(t)$$

بما ان التوزيع العشوائي للفئة هو توزيع برنولي يمكن تعريف بخصائص هذا التوزيع التي هي التوقع و التباين كما يلي:

$$E(L_{x+t}) = L_x \ {}_tP_x$$

$$V(L_{x+t}) = L_x \ {}_tP_x \quad {}_tq_x$$

من اجل t>0 نضع $L_x \ {}_tP_x \ = L_{x+t}E(L_{x+t})$ هو العدد النضري للاحياء ذوات السن $X + t$.
بالتالي يمكن الحصول على ما يلي:

احتمال البقاء على قيد الحياة $\quad {}_tP_x \ = \frac{l_{x+t}}{l_x}$

$$1 - \ {}_tP_x \ = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$$

نضع $d_x = l_x - l_{x+t}$ حيث $d_x$ يمثل عدد الوفيات عند السن $X$.

بالتالي يصبح احتمال الوفاة:

$${}_tq_x \ = \frac{d_x}{l_x}$$

هذه الاسس يتم استخدامها من اجل كتابة عقود التامين.

4-2-3. القيمة الحالية العشوائية و القيمة الحالية الاحتمالية

القيمة الحالية العشوائية و التي نرمز لها *vaa (variable actuelle aléatoire)* لقيمة مستقبلية عند اللحظة $t$ و المرافقة لتحقق حادث $_t$ يكتب كما يلي:

$$vaa = \frac{1}{(1+i)^n}\begin{cases} 1 & \text{في حالة ظاهرةمعينة وفاة او حياة} \\ 0 & \text{في الحالة المنافية} \end{cases}$$

لو ان الحادث الذي نهتم به هو البقاء على قيد الحياة او الوفاة يمكن ارفاق هذه الظاهرة باحتمال تحققها. بالتالي في الحالة يمكن حساب التوقع و التباين على هذه القيمة العشوائية $vaa$.

$$E(vaa) = \ {}_tP_x \ \frac{1}{(1+i)^n} + 0\left(1 - \ {}_tP_x \ \right)$$

$$E(vaa) = \frac{{}_tP_x}{(1+i)^n} = {}_tP_x \ V^n$$

$$Var(vaa) = {}_tP_x \ (\frac{1}{(1+i)^n} - \frac{{}_tP_x}{(1+i)^n})^2 + \left(1 - {}_tP_x \right)(0 - \frac{{}_tP_x}{(1+i)^n})^2$$

منه تكون النتيجة:

$$Var(vaa) = \frac{1}{(1+i)^{2n}}(1 - {}_tP_x \ ) \ {}_tP_x$$

و هذا هو اساس راس مال مؤجل و الذي يرمز له اكتواريا ب: ${}_nE_x$ او ${}_tE_x$ . و في عموم الحالات يستخدم التسمية:

$$\mathrm{A}^{1}_{\overline{x,n}}$$

5-2-3. عقود التامين على الحياة

هذا النوع من العقود يسمى ايضا دفعات على الحياة. هي عبارة عن قيم مالية ذات دورة زمنية معينة تدفع من احد الطرفين المؤمن او المؤمن له. حيث ان هذه الدفعات تظهر لما يدفع المؤمن له اقساط و لما يدفع المؤمن تعويضات.

من الرياضيات المالية يمكن تعريف مجموع دفعات مالية مدفوعة في نهاية المدة  قيمة كل دفعة 1 دج كما يلي:

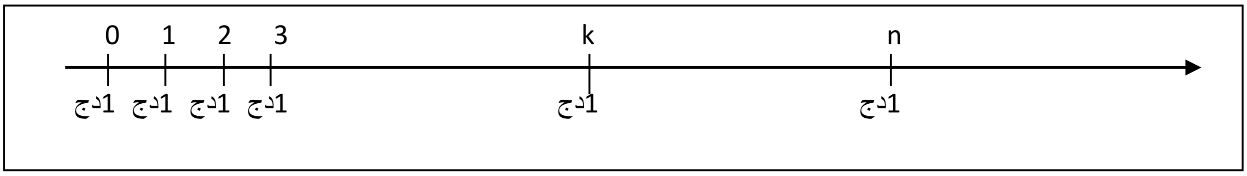
$$a_{\overline{n}} = \frac{1-V^n}{i} = 1 + V^1 + V^2 + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + V^n$$

فيما يلي نتطرق الى الصيغ الرياضية لمختلف عقود التأمينات على الحياة حسب نوع الدفعات.

***ا) دفعات مدفوعة مسبقا***

**1.1)** ***دفعات مدى الحياة مدفوعة مسبقا***

يبدأ تسديد الوحدة النقدية في هذه الحالة عند *t=0* و يتواصل الدفع ما دام الشخص على قيد الحياة. يمكن ان نمثل هذه العملية على سلم زمني بالشكل التالي:




يمكن ان نلاحظ ان نلاحظ ان تدفق المبلغ 1دج عند اي لحظة t يكون مقرون بالحادث الشخص على قيد الحياة اي $X_i(t) = 1$.

بالتالي القيمة الحالية العشوائية عند $t = 0$ و التي يرمز لها ب $\ddot{\ }_x$ .

$$\ddot{w}_x = \sum_{t=0}^{\infty} X_i(t)V^t$$

بالتالي عند ارفاق $X_i(t)$ باحتمالات ظهورها اي احتمالات البقاء على قيد الحياة نجد القيمة الحالية الاحتمالية:

$$\ddot{a}_x = E(\ddot{w}_x) = \sum_{t=0}^{\infty} X_i(t)V^t = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tP_x V^t$$

لان $X_i(t) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ حيث ان المتغيرة تأخذ القيمة 1 في حالة الحياة و يكون ذلك بالاحتمال ${}_nP_x$ .

بالتالي نجد

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x$$

في هذه العلاقة المجموع يكون محدود عند $w - x$ حيث $w$ هو السن الاقصى لحياة الشخص حسب جدول الوفيات اعظم سن يمكن بلوغه هو 110 سنوات.

### ***2.1) دفعات مؤقتة ذات المدة n و المدفوعة مسبقا***

تسديد هذه الدفعات يتوقف بعد n دفعة و عند اللحظة n في معظم الحالات

vaa $\quad {}_n\ddot{w}_x = \sum_{k=0}^{n-1} x(k)V^k$

بالتالي تكون القيمة الحالية الاحتمالية

$$_{n}\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k}E_x$$

### 3.1) دفعات مدى الحياة مؤجلة ب m مرحلة و مدفوعة مسبقا

هذا النوع من الدفعات يبدا دفعها بعد m مرحلة من اللحظة 0 التي تمثل لحظة امظاء العقد.

vaa $\quad {}_{m/}\ddot{w}_x = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)V^k$

$$_{m/}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} {}_{k}E_x$$

### 4.1) دفعات مؤجلة ب m مرحلة و مؤقتة ب n مرحلة و مسددة مسبقا

الدفع الاول يكون عند اللحظة m و هذه الدفعات يتوقف تسديدها بعد m+n مرحلة بالتالي

vaa $\quad {}_{m/n}\ddot{w}_x = \sum_{k=0}^{m+n-1} x(k)V^k$

$$_{m/n}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{k}E_x$$

### 2) دفعات مدفوعة في نهاية المدة

هذه الدفعات يتم تسديدها في نهاية المدة

### 1.2) دفعات مدى الحياة و مدفوعة في نهاية المدة

في هذه الحالة الدفعات تكون مدفوعة في ما دام الشخص على قيد الحياة. لكن في هذه الحالة الدفع يكون في نهاية المدة (السنة مثلا):

vaa $\quad w_x = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)V^k$

vap $$a_x = E(w_x) = \sum_{k=1}^{\infty} E(x(k))V^k$$

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kP_x V^k$$

### 2.2) دفعات مؤقتة و مدفوعة في نهاية المدة

التسديد يكون خلال n مرحلة يمكن ايجاد القيمة الحالية العشوائية و القيمة الحالية الاحتمالية.

vaa $${}_nw_x = \sum_{k=1}^{n} x(k)V^{k_2}$$

vap $${}_na_x = E\left({}_nw_x\right) = \sum_{k=1}^{n} E(x(k))V^k$$

$${}_na_x = \sum_{k=1}^{n} {}_kP_x V^k$$

### 3.2) دفعات مدى الحياة و مؤجلة ب m مرحلة و مدفوعة في نهاية المدة

في هذه الحالة التسديد الاول يكون عند $m+1$ (اي في نهاية المرحلة m ) شرط ان يكون المؤمن له على قيد الحياة و يتواصل التسديد ما دام الشخص على قيد الحياة.

vaa $${}_{m/}w_x = \sum_{k=m+1}^{\infty} x(k)V^k$$

vap $${}_{m/}a_x = E\left({}_{m/}w_x\right) = \sum_{k=m+1}^{\infty} E(x(k))V^k$$

$${}_{m/}a_x = \sum_{k=m+1}^{\infty} {}_kP_x V^k$$

### 4.2) دفعات مؤجلة ب m مرحلة و مؤقتة ب n مرحلة و مدفوعة في نهاية المدة

في هذه الحالة التسديد الاول يكون عند $m+1$ (اي في نهاية المرحلة m ) شرط ان يكون المؤمن له على قيد الحياة و يتواصل التسديد خلال n مرحلة ما دام الشخص على قيد الحياة.

vaa $${}_{m/n}w_x = \sum_{k=m+1}^{n} x(k)V^k$$

vap $$ {}_{m/n}a_x = E\left({}_{m/n}w_x\right) = \sum_{k=m+1}^{n} E(x(k))V^k $$

$$ {}_{m/n}a_x = \sum_{k=m+1}^{n} {}_kP_x V^k $$

### 3-3. التامين على الوفاة

هو عقد يُبرم بين صاحب بوليصة التأمين وشركة التأمين أو المؤمِّن، تتعهد فيه شركة التأمين بدفع مبلغ من المال (استحقاق) عند وفاة الشخص المؤمّن عليه مقابل أقساط تأمين يدفعها المؤمن عليه لشركة التأمين بشكل منتظم أو كدفعة إجمالية واحدة. وحسب نوع عقد التأمين يمكن أن يغطي التأمين الحالات الأخرى مثل المرض العضال أو المرض الحرج إذ تدفع شركة التأمين استحقاقًا معينًا للشخص المؤمّن عليه. ويضمن التأمين على الحياة النفقات الأخرى مثل مصاريف الجنازة .تُعتبر بوليصة التأمين وثيقة رسمية وتحدد بنودها قيود الحوادث التي يشملها التأمين. وتُدوَّن غالبًا استثناءات محددة في العقد لتُخلي شركة التأمين المسؤولية عنها ومن الأمثلة على هذه الاستثناءات، الادعاءات المتعلقة بالانتحار والاحتيال والحرب وأعمال الشغب والفوضى الشعبية .تتشابه وسائل التأمين على الحياة الحديثة مع صناعة إدارة الأصول، إذ تقوم الشركات بتنويع عروضها مضيفةً التأمين على التقاعد مثل المعاشات.

#### 1-3-3. التامين على الوفاة مدى الحياة

شركة التامين تلتزم بتسديد تعويض الى ذوي الحقوق في حالة وفاة المؤمن له. نفرض فيما يلي ان مبلغ التسديد هو 1دج.

ناخذ مؤمن له عند $t=0$ لحظة امضاء عقد تامين يكون سنه $x$ و نضع الحادث $B$ (وفاة الشخص).
يمكن ان نعبر عن الحادث $B$ انه عبارة عن تركيب عدد من الحوادث المستقلة فيما بينها:

$$ B = \bigcup_{j=1}^{w-x} B_j $$

يحث $B_j$ هو حادث ان الشخص يتوفى خلال السنة $j$. بالتالي يمكن كتابة :

$$ B_j = (j - 1 < T_x < j) $$

منه القيمة الحالية العشوائية *vaa*

$$w_x = \sum_{j=1}^{w-x} 1\mathrm{I}_{\mathrm{B_j}} V^{j-\frac{1}{2}}$$

نطرح من الاس $\frac{1}{2}$ لان نفرض ان الحادث يكون في المستقبل وفي منتصف السنة. حيث $1\mathrm{I}_{\mathrm{B_j}}$ *يمثل* مميزة الحادث $\mathrm{B_j}$ و $V = (1+i)^{-1}$ (معامل الحسم).

لما *j* ياخذ قيم اكبر من *w-x* فان الحادث $\mathrm{B_j}$ *يصبح مستحيل و المميزة* $1\mathrm{I}_{\mathrm{B_j}}$تصبح مباشرة مساوية الى 0.

نضع الاحتمال الشرطي $Q_x$ علما ان *x* على قيد الحياة عند *t=0* (اي السن *x*) و بالتالي نجد القيمة الحالية الاحتمالية كما يلي:

$$E(w_x) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_x\left(B_j\right) V^{j-\frac{1}{2}}$$

و نعلم ان $\sum_{j=1}^{\infty} Q_x\left(B_j\right) = 1$

حيث $Q_x(B_1) =$ (المؤمن له يتوفى في السنة الاولى)

والذي يكتب كما يلي ${}_1q_x$ او بكل بساطة $q_x$.

و بالتالي يمكن ان نضع :

$$Q_x(B_2) = \text{(المؤمن له يتوفى في السنة الثانية)}$$

شرط تحقق هذا الحادث هو يجب ان يكون الشخص على قيد الحياة في السنة الاولى و يتوفى في السنة الثانية. اذا اردنا تحويل هذا الشرط الى كتابة احتمالية يكون كالاتي:

$${}_1P_x q_{x+1}$$

بصفة عامة :

$$A_x = \sum_{j=1}^{\infty} {}_{g-1}P_x q_{x+j-1} V^{j-\frac{1}{2}}$$

علما ان $A_x$ تمثل القسط الصافي الوحيد الذي يجب ان يطلب من المؤمن له عند لحظة امضاء العقد $t = 0$() من تعويضات لمبلغ 1دج و مدى الحياة.

***حساب التباين***

يتم حساب التباين من اجل تقدير التشتت حول مبلغ التعويض.

$$Var(w_x) = E({w_x}^2) - E(w_x)^2$$

**2-3-3. التامين على الوفاة المؤقت**

نعتبر شخص ما في سن x عند اللحظة 0 لحظة امظاء العقد. في هذه الحالة الضمان يغطي مرحلة مكونة من n سنة و شركة التامين تتعهد بدفع مبلغ مالي و شركة التامين تتعهد بدفع مبلغ مالي الى ذوي الحقوق عند وفاة الشخص.

من هذا النص الذي يعبر عن نوع العقد:

$B_j =$ ( المؤمن له يتوفى خلال السنة $j$ اي بين السن $j-1$ و $j$ )

يمكن كتابة القيمة الحالية العشوائية و القيمة الحالية الاحتمالية

$$_n w_x = \sum_{j=1}^{n} 1 \mathrm{I}_{\mathrm{B_j}} \mathrm{V}^{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}$$

$$_n A_x = \sum_{j=1}^{n} {}_{j-1}P_x \, q_{x+j-1} V^{j-\frac{1}{2}}$$

في هذه الحالة $_nA_x$ يعتبر القسط الصافي الاحادي الذي يطلب من المؤمن له في سن x مقابل عقد تامين على الوفاة مؤقت ب n سنة و بمبلغ تعويض 1 دج.

### 3-3-3. عقد تامين على الحياة مؤجل و مدى الحياة

في هذا النوع من العقود الدفع ( التعويض) يكون بعد مدة معينة d (مرحلة تاجيل). هذا النوع من العقود قلما نجدها على انفراد و انما في عموم الحالات تكون مقرونة بعقود اخرى ما يسمى بالعقود المركبة.

يمكن كتابة هذا النوع من العقود في صيغتيه العشوائية و الاحتمالية بالشكل التالي:

$$_{d/}w_x = \sum_{j=d+1}^{\infty} 1\mathrm{I}_{\mathrm{B_j}}\mathrm{V}^{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}$$

$$_{d/}A_x = \sum_{j=d+1}^{\infty} {}_{j-1}P_x\, q_{x+j-1}V^{j-\frac{1}{2}}$$

4-3-3. عقود تامين على الحياة بضمان على الوفاة

**1) عقود التامين المختلطة**

في هذا النوع من العقود المؤمن يتعهد بدفع مبلغ c الى ذوي الحقوق في حالة وفاة المؤمن له بين اللحظة 0 و n. من جهة اخرى اذا بقي المؤمن له على قيد الحياة الى نهاية اجال العقد فسوف يتحصل على مبلغ مماثل. يمكن القول ان دفع المبلغ c يكون بصفة اكيدة.

في حالة ما اذا قرر المؤمن له ان يدفع دينه الى شركة التامين على شكل اقساط سنوية يكون كلا من التسديد و التعويض لهما شكل عشوائي. هذا التركيب يصبح يتوافق مع جمع تامين على الوفاة و تامين على الحياة.

$$vaa = c_1\,{}_nw_x + c_1X_nV^n$$

حيث ان $X_n$ تمثل مميزة البقاء على قيد الحياة عند n بالتالي القيمة الاحتمالية تكون كما يلي:

$$A_{\overline{x,n}} = c_1\,{}_nA_x + c_1\,{}_nE_x$$

**2) عقود مركبة**

هذا النوع من العقود نفسه النوع السابق لكن في هذه الحالة قيم التعويضين مختلفة.

نضع: $c_1$ المبلغ المعوض في حالة الوفاة قبل اللحظة n

و $c_2$ المبلغ المعوض في حالة البقاء على قيد الحياة عند اللحظة n.

يمكن كتابة القيمة الحالية العشوائية و القيمة الحالية الاحتمالية

$$vaa = c_1\, {}_nw_x + c_2X_nV^n$$

حيث ان $X_n$ تمثل مميزة البقاء على قيد الحياة عند n بالتالي القيمة الاحتمالية تكون كما يلي:

$$A_{\overline{x,n}} = c_1\, {}_nA_x + c_2\, {}_nE_x$$

### 3-4. الدوال البديلة على التامين على الحياة و الوفاة

هذه الدوال تم ادخالها في القرن الثامن عشر قصد التسهيل في العمليات الحسابية في التامين على الحياة. حيث تسمح ايضا بكتابة العبارات للقيم الحالية الاحتمالية الاكثر استعمالا. منذ ظهور و تطور الاعلام الالي فقدت هطه الدوال من اهميتها فيما يخص التسهيلات الحسابية و بقيت استعمالها في كتابة صيغ العقود. توجد نوعان من الدوال البديلة حسب مجال استعمالها: دوال بديلة على الحياة و دوال بديلة على الوفاة.

#### 1) الدوال البديلة على الحياة

نفرض شخص في سن x عند اللحظة 0. عرفنا سابقا ان Vap (القيمة الحالية الاحتمالية) لراس مال مؤجل لوحدة نقدية عند اللحظة n مرهونة ببقاء الشخص على قيد الحياة.

**عرفنا سابقا** ${}_nE_x = {}_nP_xV^n$

و لدينا $V = \frac{1}{1+i}$

و $l_x$ يمثل عدد الاحياء عند سن x.

يمكن كتابة العبارة السابقة من الشكل

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}\frac{V^{x+n}}{V^x}$$

نضع اول دالة بديلة على الحياة $D_x = l_x \, V^x$

بالتالي يمكن كتابة الراس المال الؤجل من الشكل

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

ناخذ Vap لدفعات ابدية و تكون مدفوعة في بداية المدة

$$ \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{m-x} {}_kE_x $$

$$ \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{w-x} \frac{D_{x+k}}{D_x} $$

نضع الدالة البديلة $N_x$حيث

$$ N_x = \sum_{k=0}^{w-x} D_{x+k} $$

بالتالي يمكن ان نكتب

$$ \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} $$

كما يمكن ان نستنتج المساواة

$$ D_x = N_x - N_{x+1} $$

نعرف دفعات متزايدة هندسيا الين يكون الحد الاول 1 و الاساس ايضا 1. القيمة الحالية الاحتمالية لهذه الدفعات:

$$ (I\ddot{a})_x = 1 + 2 \; {}_1E_x + 3 \; {}_2E_x + \cdots \ldots \ldots $$

يمكن كتابة العبارة السابقة من الشكل التالي:

$$(I\ddot{a})_x = 1 + \ {}_1E_x + \ {}_2E_x + \cdots \ldots \ldots +$$

$$ {}_1E_x + \ {}_2E_x + \cdots \ldots \ldots$$

$$ {}_2E_x + \cdots \ldots \ldots$$

$$(I\ddot{a})_x = \left(\frac{N_x}{D_x}\right) + \left(\frac{N_{x+1}}{D_x}\right) + \left(\frac{N_{x+2}}{D_x}\right) + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . + \left(\frac{N_{x+k}}{D_x}\right)$$

و نضع الدالة البديلة :

$$S_x = \sum_{k=0}^{w-x} N_{x+k}$$

*و بالتالي ينتج*

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$$

### 2) الدوال البديلة على الوفاة

ناخذ بعين الاعتبار *Vap* لتكاليف شركة التامين دفعات على عقد تامين على الوفاة الؤقت لسنة واحدة لشخص في سن *x* حيث قيمة الدفع 1دج.

$${}_1A_x = q_x V^{\frac{1}{2}} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} V^{\frac{1}{2}}$$

بجداء البسط و المقام في $V^x$ نضع اول دالة بديلة على الوفاة :

$$C_x = (l_x - l_{x+1}) V^{x+\left(\frac{1}{2}\right)}$$

بالتالي يمكن ان ينتج

$$A_x = \left(\frac{1}{D_x}\right) \sum_{k=0}^{w-k} C_{x+k}$$

نضع الدالة البديلة الثانية على الوفاة

$$M_x = \sum_{k=0}^{w-k} C_{x+k}$$

يمكن ان نستنتج

$$A_x = \left(\frac{M_x}{D_x}\right)$$

ايضا

$$C_x = M_x - M_{x+1}$$

# الفصل الرابع :تسيير محافظ اخطار عقود التامين

**الفصل الرابع :تسيير محافظ اخطار عقود التامين**

يعتبر تسيير محافظ الاخطار من الاستعمالات النهائية لعلم الاكتوارية. الاكتواري باستخدام الوسائل الرياضية و الاحصائية المتطرق اليها سابقا يتمكن من تقدير الاخطار و بالتالي اعطار طرق للتقليل او التحكم من هذه الاخطار. فيما يلي قمنا بعرض اولا مراجعة للتقاربات لأهمية هذا المبدأ الرياضي و الاحتمالي في نفس الوقت لتسيير اخطار محافظ شركات التامين ثم قمنا بعرض اسس تقييم المخاطر التأمينية و المعبر عنها بالإفلاس بوسائل داخلية لشركة التامين و وسائل خارجية. من اجل اعداد هذا الفصل استخدمنا المراجع التالية: (Hess، 2000) ، (Borowiak و Shapiro، 2014) ، (Ivanova, Vladimirovna, & Turgaeva, 2018)، (Khaldi, 2006) ، (Friedland, 2020).

## 1-4. التقاربات

### 1) التقارب باحتمال

نقول ان السلسلة $X_n$ متقاربة باحتمال الى الثابتة $a$ اذا كان:

$$\forall\ \varepsilon\ et\ n \ll, \exists\ n_0\ pour\ n > n_0 : p(|X_n - a| > \varepsilon) < n$$

و نقول ان $X_n$ يقارب باحتمال الى $a$.

و كما يمان نعرف تقارب سلسلة الى سلسلة اخرى كما يلي:

$$X_n - X \to 0$$

و نقول ان السلسة $X_n$ تقارب باحتمال الى السلسلة $X$.

من اجل البرهان او دراسة تقارب سلسلة الى ثابتة او سلسلة اخرى عدة طرق يمكن استخدامها:

- يمكن البرهان على ان السلسلة متقاربة الى ثابتة بالبرهان بان التوقع الرياضي للسلسة يقارب الى ثابتة ( في هذه الحالة يمكن ان تكون الثابتة المتوسطة) و التباين حول الثابتة يؤول الى 0.

- و يمكن استخدام متباينة Bienaymé Tchebychev و التي تكون كالاتي:

$$p(|X_n - a| > \varepsilon) < \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}.$$

### 2) التقارب الموثوق (التقارب بقوة)

نعرف العلاقة القوية بين متغيرتين x وy كما يلي :

$$p(\{w/X(w) \neq y(w)\}) = 0$$

و نلاحظ في هذه الحالة ان احتمال اختلاف السلسلتين يكون مساو الى 0.

و منه نقول ان السلسلة $X(w)$ تقارب الى السلسلة $y(w)$ اذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} p(\{w/X_n(w) \neq y(w)\}) = 0$$

### 3) التقارب بالمتوسطة

نقول ان $X_n$ تقارب الى $X$ بالمتوسطة اذا كان :

$$E((X_n - X)^r) \longrightarrow 0$$

و $r$ يمثل درجة الاس و التقارب الاكثر استعمالا ه التقارب التربيعي اي:

$$E((X_n - X)^2) \longrightarrow 0$$

### 4) التقارب بقانون توزيع عشوائي:

بالرغم من ان هذا التقارب هو الاضعف الا انه الاكثر استعمالا. حيث ان هدفه هو مقاربة دالة توزيع عشوائي ل$X_n$ الى دالة توزيع عشوائي ل $X$. و يمكن القول ان $X_n$ يقارب الى $X$ بقانون التوزيع العشوائي و للبرهان على ذلك نضع $F(.)$ دالة توزيع عشوائي و بالتالي اذا تحقق:

$$F_n(X_n) \longrightarrow F(X)$$

و نقول ان

$$X_n \longrightarrow X \text{ (بقانون التوزيع العشوائي)}$$

من التقاربات بقوانين التوزيعات العشوائية الشائعة نجد تقارب قانون بواسون الى القانون الطبيعي.

## 4-2. قوانين الاعداد الكبرى

من نتائج استخدامات التقاربات نجد قوانين الاعداد الكبرى.

### 1) القانون الضعيف للإعداد الكبرى

لتكن $X_1X_2 \ldots \ldots \ldots X_n$ سلسلة لمتغيرات مستقلة فيما بينها و مرفوقة بالتوقعات التالية $\mu_1\mu_2 \ldots \ldots \ldots \mu_n$ و الانحرافات المعيارية التالية $\sigma_1\sigma_2 \ldots \ldots \ldots \sigma_n$ و هذه الانحرافات المعيارية موجودة.

$$\forall \varepsilon > 0 \; P\left[\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X]\right| > \varepsilon\right] \longrightarrow 0 \qquad n \longrightarrow \infty \, .$$

للبرهان لدينا:

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X] \, ,$$

و

$$Var\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var[X_i] = \frac{1}{n}Var[X] \, .$$

و باستخدام متباينة Bienaymé-Tchebychev نجد:

$$P\left[\left|\frac{X_1 \cdots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X]\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{Var[X]}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

لما $n \longrightarrow \infty$ .

اي ان هذا التقارب يكون باستخدام التقارب باحتمال.

## 2) القانون القوي للأعداد الكبرى

في هذه الحالة نأخذ المعطيات السابقة اي سلسلة $X_n$ تكون مرفقة بمتوسطات و انحرافات معيارية تكون معروفة. نقول ان السلسلة $S_n$ و العروفة كما يلي :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

انها متقاربة الى متوسطة المجتمع الاحصائي و التي نرمز لها ب $m$ و نكتب :

$$S_n \to m$$

بالتقارب الموثوق الذي يجب ان يحقق:

$$\lim_{n\to\infty} p(\, S_n = m) = 1$$

و هو اساس التقارب القوي.

**مثال**

نأخذ فيمل يلي المقاربة بين قانونين شائعين: قانون ثنائي الحدين الى القانون الطبيعي.

كما توضحه القاعدة النظرية لما يكون [1] $np > 5$ يمكن ان نقبل مقاربة قانون ثنائي الحدين (بينوميال) الى القانون الطبيعي.

كتذكير عرفنا دالة قانون بينوميال كما يلي:

$$p(X = K) = C_n^K p^K (1-p)^{n-K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}\, p^K (1-p)^{n-K}$$

و عرفنا دالة القانون الطبيعي كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x - E(x)\right)^2\right)$$

[1] حيث n و p يمثلان على الترتيب حجم العينة و احتمال تحقق الحادث.

يمكن ان نأخذ مثال عددي ومن اجل ذلك ناخذ متغيرة موزعة حسب قانون بينوميال كما يلي:

$X \backsim B(n,p)$ حيث $X \backsim B(40{,}0.3)$

نلاحظ ان $np = 12$ و $npq = 8{,}4$

باستخدام دالة بينوميال نجد:

$$p(X = 11) = C_{40}^{11} p^{11}(1-p)^{40-11} = \frac{40!}{11!\,(40-11)!}\, 0.3^{11}(1-0.3)^{40-11}$$
$$= 0.1319$$

كما يمكن الحصول على القيمة المقربة ل$p(X = 11)$ بالمساحة الموجودة تحت منحى دالة كثافة القانون الطبيعي حيث يمكن حسابه و ذلك باستخدام دالة الكثافة للقانون الطبيعي و اعتبار التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$X \backsim N(np, npq)$$

و بالتالي يمكن التعويض في دالة القانون الطبيعي المعياري كما يلي:

$$p(X = x) = p(x \le X \le x) = p(\frac{x-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{x-np}{\sqrt{npq}})$$

بما ان

$$\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \backsim N(0,1)$$

يمكن ان نضع

$$p\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right) = p(\frac{x-np-(\frac{1}{2})}{\sqrt{npq}} \le \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$$
$$\le \frac{x-np+(\frac{1}{2})}{\sqrt{npq}})$$

بالتعويض العددي لما $x = 11$ نجد:

$$p\left(\frac{x-np-\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{npq}} \leq \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{x-np+\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$= p\left(\frac{11-12-\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{8{,}4}} \leq \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{11-12+\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{8{,}4}}\right) = 0.131$$

### 3-4. نظرية النهايات المركزية

لتكن سلسلة من متغيرات عشوائية ذات نفس القانون العشوائي و ذات التوقع μ و الانحراف المعياري $\sigma$ ( حيث هذه العزوم تكون موجودة).

حسب نظرية النهايات المركزي يمكن ان نكتب:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{X_1+X_2 \ldots\ldots\ldots . X_n-n\mu}{\sigma}\right) \backsim N(0{,}1)$$

او بكتابة اخرى

$$\sum_{i}^{n} \frac{(X_i-\mu)}{\sigma\sqrt{n}} \backsim N(0{,}1)$$

### 4-4. احتمال افلاس شركة تامين

نضع $X$ متغيرة تعبر عن نفقات شركة التامين لمرحلة ما (سنة في عموم الحالات). قيمة هذه النفقات ذات خاصية عدم الاستقرار بينما الاقساط المحصلة تكون مستقرة. اي ان التكاليف تكون غير معروفة بينما راس المال يكون معروف و اكيد في بداية المرحلة.

الكتابة الرياضية لحالة الافلاس :

$$X > \sum \Pi(x)$$

حيث $\Pi(x)$ يمثل التعويض الفردي على عقد او محفظة جزئية. حيث انه نتكلم عن عجز على مستوى محفظة بينما في حالة استمرار الظاهرة يصبح الامر حالة افلاس.

من اجل التبسيط نأخذ مرحلة واحدة:

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots \ldots \ldots + Y_n$$

حيث ان $Y_i$ يمثل النفقة السنوية على الخطر $i$. بالتالي فان $Y_i$ متغيرة عشوائية مستقلة و ذات نفس التوزيع العشوائي و العزمين الاول و الثاني ( اي التوقع الرياضي و التباين موجودان).

**اولا :نفرض ان شركة التامين تطلب فقط القسط الصافي** $E(X_n)$

نضع $D_n$ متوسطة النفقات على $n$ خطر (اي متوسطة النفقات).

يمكن ان نبرهن ان $D_n$ متقارب و بصفة قوية الى التوقع على النفقة $E(Y)$ .

حيث لدينا $Y_i$ $n = \sum_{i=1}^{n}$

يمكن ان نلاحظ ان :

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left(\frac{X_n}{n}\right) - E(Y)\right) = 1$$

او بصيغة اخرى:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{p}\left(\left(\frac{X_n}{n}\right) - E(Y)\right) \geq \propto$$

كما يمكن ان نوثق البرهان السابق باستخدام متباينة Bienaymé Tchebychev كما يلي:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{p}\left(\left(\frac{X_n}{n}\right) - E(Y)\right) \leq \frac{V\left(\frac{X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

يمكن ان نجد التباين على الاخطار كما يلي:

$$V\left(\frac{X_n}{n}\right) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right) = \frac{V(Y)}{n}$$

بالتعويض في المتباينة نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{p}\left(\left(\frac{X_n}{n}\right) - E(Y)\right) \le \frac{V(Y)}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V(Y)}{n\varepsilon^2} = 0$$

بالتالي يمكن ان نقول ان المقدارين$\left(E(Y)\right.$و $\left.\left(\frac{X_n}{n}\right)\right)$ متقاربين.

بالتالي مما سبق يمكن ان نعرف احتمال الافلاس كما يلي:

$$\mathrm{p}\left(\mathrm{X_n} > E(X)\right)$$

معنى هذه الكتابة ان احتمال ان تكون النفقات اكبر من المحصلات. يمكن ان نطرح بين طرفي المتباينة نفس العدد الموجب و نقسم طرفي المتباينة على نفس العدد الموجب و تبقى المتباينة كما هي.

بالتالي يمكن ان نكتب:

$$\mathrm{p}\left((\mathrm{X_n} > E(X)\right) \Leftrightarrow \mathrm{p}\left(\frac{\mathrm{X_n} - E(X)}{\sqrt{V(X)}} > \frac{E(X) - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)$$

من اساس الاحتمالات يمكن ان نكتب:

$$\mathrm{p}\left((\mathrm{X_n} > E(X)\right) \Leftrightarrow \mathrm{p}\left(\frac{\mathrm{X_n} - E(X)}{\sqrt{V(X)}} > 0\right) = 1 - \mathrm{p}\left(\frac{\mathrm{X_n} - E(X)}{\sqrt{V(X)}} < 0\right)$$

من اساس التقاربات و نظرية النهايات المركزية نقبل ان $\frac{\mathrm{X_n} - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ موزع وفق القانون الطبيعي المعياري لان $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ اي:

$$\frac{\mathrm{X_n} - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \backsim N(0,1)$$

بالتالي يصبح في هذه الحالة الاحتمال السابق دالة توزيع لقانون طبيعي معياري. كنتيجة لهذه المقاربة يمكن استخدام جدول الاحتمالات للقانون الطبيعي المعياري حيث نجد:

$$\mathrm{p}\big((\mathrm{X_n} > E(X)\big) \Leftrightarrow \mathrm{p}\left( \frac{\mathrm{X_n} - E(X)}{\sqrt{V(X)}} > 0 \right) = 1 - 0.5 = 50\%$$

يمكن القول في الاخير ان احتمال الافلاس في حالة ما تطلب شركة التامين القسط الصافي هو 50% و هو احتمال كبير لا يمكن تحمله.

**مثال:**

ناخذ محفظة لعقود تامين على الوفاة حيث:

$n$: يمثل حجم المحفظة و

$C$: مبلغ التعويض الكلي المقدم لكل عناصر المحفظة عند نهاية مرحلة معينة (سنة في عموم الحالات) و

$q$: يمثل احتمال الوفاة و يمكن ان نضع ايضا $q = 1 - p$ (حيث $p$ يمثل احتمال البقاء على قيد الحياة).

نضع $Y$ المتغيرة العشوائية التي تمثل قيمة النفقات السنوية و التي هي ذات صيغة عشوائية كما يلي:

$$Y \begin{cases} C & \text{في حالة تحقق الحادث} \\ 0 & \text{في الحالة الاخرى} \end{cases}$$

يمكن استنتاج التوزيع العشوائي لهذه المتغيرة العشوائية بعد ارفاقها بتحويل بسيط كما يلي: نضع

$$Z = \frac{Y}{C}$$

نلاحظ ان $Z = \begin{cases} 1 & q \\ 0 & 1-q \end{cases}$ بالتالي يمكن الجزم ان $Z$ موزعة وفق قانون بيرنولي ذات الاحتمال $q$ اي $Z \sim B(1,q)$ نضع 1 اذا اعتبرنا خطر واحد او محفظة واحدة ذات خطر متجانس اما في حالة ما اذا كانت محفظة اخطار $(X = \sum Z)$معنى ذالك ان هناك تكرار للظاهرة بالتالي نقارب قانون بيرنولي بقانون بينوميال و يصبح $X \sim B(n,q)$

يمكن حساب العزمين التوقع و التباين كما يلي

$$E(X) = Cnq \quad V(X) = C^2npq$$

كما راينا سابقا لو ان حجم المحفظة يزداد اي $n \longrightarrow \infty$ فانه يمكن مقاربة قانون بينوميال الى القانون الطبيعي كما يلي:

$$X \sim N(Cnq, \sqrt{C^2npq})$$

من خواص نظرية النهايات المركزية يمكن كتابة:

$$U = \frac{X - Cnq}{\sqrt{C^2npq}} \quad \text{و} \quad U \sim N(0,1)$$

منه احتمال الافلاس $p(\text{الافلاس})$ يكون كالأتي :

$$p(\text{الافلاس}) = p\big(X > E(X)\big) \Longrightarrow p\big(X > E(X)\big) = 1 - p\left(U < \frac{E(X) - Cnq}{\sqrt{C^2npq}}\right)$$

نجد احتمال الافلاس مساو الى [2]50%.

### 5-4. تخفيض احتمال الافلاس باستخدام تحميل تقني

فيما يلي شركة التامين لا تطلب فقط القسط الصافي و انما تقوم بتحميله ( اي اضافة اليه) تحميل تقني $\lambda$. هناك عدة طرق لحساب قيمة هذا التحميل التقني. ناخذ ابسط طريقة و التي ان يكون التحميل التقني نسبة الى القسط الصافي. ويسبح القسط الذي تطلبه شركة التامين قسط تقني يتم حسابه كما يلي:

[2] باستخدام جدول الاحتمال الطبيعي المعياري.

$$\pi(X) = (1+\lambda)E(x)$$[3]

و نضع القسط الكلي المساو الى مجموع الاقساط الصافية المحصلة :

$$\Pi(X) = \sum \pi(x)$$

يمكن كتابة احتمال الافلاس في هذه الحالة كما يلي:

$$p(X_n > \Pi(X)) = p\big((X_n > (1+\lambda)E(X)\big)$$

بطرح نفس العدد الموجب$E(X)$ بين طرفي المتراجحة و القسمة على نفس العدد الموجب و الغير معدوم $\sigma_X$ نجد:

$$p\big(X_n > \Pi(X)\big) = 1 - p\left(\frac{X_n - E(X)}{\sigma_X} < \frac{\lambda E(X)}{\sigma_X}\right)$$

$$p\big(\text{الافلاس}\big) = p\big(X_n > \Pi(X)\big) = 1 - F(\frac{\lambda E(X)}{\sigma_X})$$

حيث $F(.)$ دالة التوزيع الطبيعي المعياري بما ان المقدار $\frac{\lambda E(X)}{\sigma_X} > 0$ (موجب) فان المقدار

*$F(\frac{\lambda E(X)}{\sigma_X})$ يكون اكبر من 0.5 اي (50%) و بالتالي احتمال الافلاس المساوي الى*

*$1 - F(\frac{\lambda E(X)}{\sigma_X})$ يكون حتما اقل من 50% و بالتالي شركة التامين حققت تخفيض في احتمال الافلاس.*

اذا يمكن الاستنتاج ان التحميل التقني ساهم في تخفيض احتمال الافلاس.

**مثال عددي:**

نأخذ نفس معطيات المثال السابق و المتعلق بمحفظة حول تامين على الوفاة.

[3] حيث $x$ يمثل التعويض العشوائي لعقد واحد.

من تلك المعطيات لدينا :

$$E(X) = Cnp \quad \text{و} \quad \sigma_X = C\sqrt{npq}$$

يمكن ان نجد ان القسط التقني يساوي الى: $\Pi(X) = (1+\lambda)Cnp$.

بالتعويض نجد ان احتمال الافلاس

$$p(\text{الافلاس}) = \mathrm{p}\left(\mathrm{U} > \frac{\lambda E(X)}{\sigma_X}\right) = 1 - p(U < \lambda\sqrt{n}\sqrt{\frac{p}{q}})$$

*نعوض عدديا و نضع* $C = 100$ و $p = 0.1$ نجد $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{1}{3}$.

*منه*

$$p(\text{الافلاس}) = 1 - F(\frac{\lambda\sqrt{n}}{3})$$

يمكن ان نلاحظ ان احتمال الافلاس دالة متناقصة نسبة الى التحميل التقني $\lambda$ و حجم المحفظة $n$. لو ان شركة التامين تطبق تحميل تقني مساو الى 0.1 و يكون حجم المحفظة مساو الى 1000 نجد احتمال الافلاس:

$$p(\text{الافلاس}) = 1 - F\left(\frac{0.1\sqrt{1000}}{3}\right) = 1 - 0.85 = 0.15$$

مما سبق يمكن ان نستنتج ما يلي:

- التحميل التقني سمح بتخفيض احتمال الافلاس
- اصبح لحجم المحفظة اثر على احتمال الافلاس بينما كان دون اثر في طلب القسط الصافي.

رفع التحميل التقني يسمح بتخفيض احتمال الافلاس لكن هذا الرفع في نسبة التحميل التقني تكون محدودة بالمنافسة. رفع التحميل التقني يؤدي الى رفع القسط المطلوب و هذا ما يؤدي بشركة

اللتامين الى استخدام وسائل اخرى تسمح بتخفيض احتمال الافلاس. فيما يلي سنحاول التطرق الى وسائل اخرى تسمح بتخفيض احتمال الافلاس.

### 4-6. حجم المحفظة و اثره على احتمال الافلاس

لاحظنا سابقا ان احتمال الافلاس دالة عكسية الى حجم المحفظة الى جانب نسبة التحميل التقني $\lambda$. من اجل التحقق من ذلك نأخذ نفس المثال العددي السابق و النتائج المتوصل اليها. من اجل ذلك نحتفظ بنفس المعطيات السابقة و نعتبر ان نسبة التحميل التقني ثابت و نغير فقط حجم المحفظة من 1000 الى 2000. من اجل ذلك نحصل على:

$$p(\text{الافلاس}) = 1 - F\left(\frac{0.1\sqrt{2000}}{3}\right) = 1 - 0.9319 = 0.0681 \approx 0.07$$

منه نلاحظ ان احتمال الافلاس اصبح اقل من اجل تغيير في حجم المحفظة من 1000 الى 2000. و احتمال الافلاس اصبح 0.07 بدلا من 0.15.

حجم المحفظة له دور مهم في احتمال الافلاس حيث انه يؤدي الى استقرار الاخطار داخل المحفظة. بالصيغة الكلاسيكية يمكن القول ان التعويض بين الاخطار داخل المحفظة يكون بصفة افضل. و هي نتيجة من نتائج نظرية الاعداد الكبرى.

### 4-7. استعمال احتياطي من اجل تخفيض احتمال الافلاس

يمكن لشركة التامين ان تكون احتياطي من اجل مواجهة حالات عدم الاستقرار في المحافظ كما يمكن استخدام هذا الاحتياطي من اجل تعزيز القدرة على اصدار الاقساط. من اجل هذا الهدف الاخير يمكن لشركة التامين استخدام هذا الاحتياطي من اجل تخفيض احتمال الافلاس. نفرض ان شركة اللتامين تكون احتياطي بقيمة $R$ من اجل مواجهة التغيرات الكبرى التي تحصل على مستوى $X$ (مبالغ التعويضات). في الحقيقة مبلغ $R$ مكونة من راس مال شركة التامين و الاحتياطي القانوني ( اي الاجباري).

نفرض ان شركة التامين تخصص مبلغ $R$ الى فئة من خطر معين. هذا ما يجعل امكانية كتابة احتمال الافلاس كما يلي:

$$p(\text{الافلاس}) = p(X > \Pi(X) + R)$$

نحتفظ بشكل القسط التقني $\Pi(X) = (1+\lambda)E(X)$.

احتمال الافلاس يصبح:

$$p(X > \Pi(X) + R) = 1 - p(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} < \frac{R + (1+\lambda)E(X) - E(X)}{\sigma(X)})$$

$$p(X > \Pi(X) + R) = 1 - F(\frac{R + \lambda E(X)}{\sigma(X)})$$

حيث $F(.)$ تمثل دالة التوزيع الطبيعي المعياري و هي دالة موجبة مع المقدار $\frac{R+\lambda(X)}{\sigma(X)}$. اي كلما ارتفعت قيمة هذا المقدار ازدادت قيمة الاحتمال و هذا ما يؤدي الى انخفاض قيمة احتمال الافلاس.

**مثال عددي**

ناخذ نفس المثال السابق و ناخذ بعين الاعتبار الاحتياط $R$ يمكن ان نكتب احتمال الافلاس كما يلي:

$$p(\text{الافلاس}) = 1 - F\left(\frac{R}{C\sqrt{npq}} + \lambda\sqrt{n}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$$

كتطبيق عددي نحتفظ بالمعطيات السابقة و نضع $R = 1200$ نجد احتمال الافلاس :

$$p(\text{الافلاس}) = 1 - F\left(\frac{1200}{100\sqrt{90}} + 0.1\sqrt{1000}\sqrt{\frac{0.1}{0.9}}\right)$$

$$p(\text{الافلاس}) \approx 0.01$$

نلاحظ انه اخذا بعين الاعتبار احتياطي اصبح احتمال الافلاس 1%.

### 7-4. هامش معامل امان شركة تامين

من النواتج الهامشية من الحسابات السابقة نجد هامش امان شركة التامين حيث انه مقدار يسمح بحساب امان المؤمن و ناخذ بعين الاعتبار الاحتياطي و لحساب هامش الامان لا تهم الصيغة المفصلة للتحميل التقني.

من اجل حساب هامش امان شركة التامين نقوم اولا بحساب ربح شركة التامين الذي هو متغيرة عشوائية و ذات الصيغة التالية:

$$B = \Pi(X) - X$$

اي الاقساط المحصلة ناقص مبلغ التعويض.

و يمكن ان نلاحظ ان التوقع على هذا الربح $B = \lambda E(X)$ هو مبلغ التحميل التقني. و الانحراف المعياري على هذا الربح هو نفسه الانحراف المعياري على مبلغ التعويضات العشوائية اي: $\sigma_B = \sigma_X$.

بالتالي احتمال الافلاس يصبح كالأتي:

$$p(\text{الافلاس}) = 1 - p\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X} < \frac{\mathrm{R} + \mathrm{E(B)}}{\sigma_B}\right)$$

*و نضع* $T = \frac{\mathrm{R+E(B)}}{\sigma_B}$ معامل امان شركة التامين.

نلاحظ ان معامل امان شركة التامين متعلق باحتمال افلاس شركة التامين و كما نلاحظ ان حسابه يتحقق بالعزمين الاول و الثاني لارباح شركة التامين.

### 4-8. تخفيض احتمال الافلاس باللجوء الى اعادة التامين

ليس دائما اللجوء الى رفع نسبة التحميل التقني او الاحتياطي ممكن من اجل تقليص احتمال الافلاس. لذا وجدت شركات تامين ذات خاصية اعادة التامين و التي تسمح بتخفيض احتمال الافلاس لشركات التامين. و هذه العملية تتمثل باختصار في تامين شركة تامين لجزء من محفظتها عند شركة اعادة تامين مخول لها قانونيا. ببساطة هذه شركة التامين تؤمن نفسها عند شركة تامين اخرى مخول لها قانونيا.

شركة التامين تدفع جزء من الاقساط المحصلة الى شركة اعادة التامين في المقابل هذه الاخيرة تتعهد بدفع التعويضات للعقود التي يأخذها بعين الاعتبار اعادة التامين و ذلك يكون وفق شروط تم وضعها عند امضاء عقد اعادة التامين بين شركة التامين و شركة اعادة التامين.

الهدف التقني وراء عملية اعادة التامين هو تخفيض عدم الاستقرار في محافظ شركات التامين. هناك عدة طرق اعادة التامين وفيما يلي نتعرض لاهمها:

- اعادة التمين بالحصص
- اعادة التامين المثلى.

**1- اعادة التامين بالحصص**

نفرض فئة متجانسة من $n$ خطر. المتغيرة العشوائية $y$ تمثل قيمة التكلفة الناجمة من تحقق الخطر $i$ و القيمة الاجمالية لنفقات السنة الجارية تكون :

$$X = y_1 + y_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + y_n$$

لما يتم امضاء عقد تامين بين شركة تامين و شركة اعادة تامين فان شركة التامين تدفع الى شركة اعادة التامين و في بداية المرحلة (لحظة امضاء العقد) جزء من الاقساط المستلمة (المحصلة) من المؤمنين لهم.

نرمز ب $\theta$ للجزء المحتفظ من المحفظة من طرف شركة التامين حيث يكون $0 < \theta < 1$ و بالتالي فان شركة التامين تحتفظ بتعويض $\theta X$ و بينما تتكفل شركة اعادة التامين بتعويض بتعويض مبلغ $X(1-\theta)$. يمكن القول ان القسط التقني الكلي المحصل يكون مقسم و بصفة نسبية بين شركة التامين و شركة اعادة التامين و التقسيم يكون كما يلي:

| | |
|---|---|
| شركة التامين | $\Pi\theta(X)$ |
| شركة اعادة التامين | $(1-\theta)\Pi(X)$ |

نضع القسط التقني كما يلي:

$$\Pi(X) = (1+\lambda)E(X)$$

يمكن حساب احتمال الافلاس في هذه الحالة و الذي يكون كما يلي:

$$p(\text{الافلاس}) = p\big(\theta X > R + \theta\,\Pi(X)\big)$$

اي حالة الافلاس في هذه الحالة اصبحت ان يكون التعويض عن الجزء المحتفظ من المحفظة اكبر من المخصصات و القسط التقني المحتفظ به.

من اجل تطبيق نظرية النهايات المركزية نطرح من طرفي المساواة $E(\theta X)$و نقسم على $\theta\sigma(X)$ و نتحصل على:

$$p(\text{الافلاس}) = p\left(\frac{\theta X - E(\theta X)}{\theta\sigma(X)} > \frac{R + \theta\,\Pi(X) - E(\theta X)}{\theta\sigma(X)}\right)$$

لان بما ان $\theta$ عدد ثابت فانه يمكن كتابة:

$$\frac{\theta X - E(\theta X)}{\theta\sigma(X)} \sim N(0,1)$$

بالتالي يمكن ايجاد:

$$p(\text{الافلاس}) = 1 - p\left(\frac{\theta X - E(\theta X)}{\theta\sigma(X)} < \frac{R + \theta\lambda E(X)}{\theta\sigma(X)}\right)$$

$$p(\text{الافلاس}) = 1 - p\left(\frac{\theta X - E(\theta X)}{\theta\sigma(X)} < \frac{R}{\theta\sigma(X)} + \frac{\lambda E(X)}{\sigma(X)}\right)$$

حسب خاصية التوزيع الطبيعي و المتعلقة بالتناظر يمكن ان نقول ان الاحتمال

$p\left(\frac{\theta X - E(\theta X)}{\theta\sigma(X)} < \frac{R}{\theta\sigma(X)} + \frac{\lambda E(X)}{\sigma(X)}\right)$ اصبح اكبر بالتالي احتمال الافلاس اصبح اقل اي اعادة التامين قام بتخفيض احتمال الافلاس.

لو نأخذ نفس المعطيات السابقة حول احتمال الوفاة و نضع قيمة $\theta = 70\%$ نجد:

$$p(\text{الافلاس}) = 1 - p\left(\frac{R}{\theta C\sqrt{npq}} + \frac{\lambda np}{\sqrt{npq}}\right)$$

بالتعويض العددي نجد :

$$p(\text{الافلاس}) = 1 - 0,9979 = 0,0021$$

نلاحظ ان احتمال الافلاس اصبح انخفض.

**2. اثر اعادة التامين على الفائدة المتوسطة لشركة التامين**

في حالة اعادة التامين يمكن كتابة فائدة شركة التامين على شكل متغيرة عشوائية كما يلي:

$$B = \theta\Pi(X) - \theta X$$

بما ان هذه العلاقة خطية و المتغيرات مستقلة فيما بينها يمكن حساب التوقع الرياضي بين طرفي المساواة و نتحصل على:

$$E(B) = \theta\Pi(X) - \theta E(X)$$

$$E(B) = \theta(1+\lambda)E(X) - \theta E(X)$$

$$E(B) = \lambda\theta E(X)$$

في حالة عدم وجود تامين و جدنا $E(B) = \lambda E(X)$ اي ان شركة التامين ضحت ب$(1-\theta)$ من ربحها المتوقع الى شركة اعادة التامين.

**3. اعادة التامين المثلى**

رأينا سابقا دور اعادة التامين في تخفيض احتمال الافلاس لشركة التامين. من اجل ذلك تم التطرق الى طريقة الحصص التي تأخذ بعين الاعتبار و بطريقة احادية نسبة الاحتفاظ بالنسبة الى نوع الاخطار. يمكن ان نتقبل ان هذه الطريقة لها حدود حيث ان شركة التامين لا تقوم بالفصل بين المحافظ ذات مردوديات مثلى للاحتفاظ بها و محافظ ذات اخطار اكثر لإعادة تأمينها. لذلك وجدة طريقة اعادة التامين المثلى الذي يأخذ بعين الاعتبار اشكال التجانس بين الاخطار و المحافظ و ذالك باستخدام اسس التعظيم. لما يكون مشكل معين على شكل اشكال تعظيم يجب اولا صياغته على شكل تعظيم.

**طرح الاشكال**

نفرض ان لشركة تامين ما محفظة مكونة من $K$ فئة اخطار و التي يمكن تمثل فروع النشاطات. لكل فرع $i$ القيمة السنوية للاخطار هي $X_i$ (من اجل $i$ متغيرة بين 1 و$k$).

القيمة السنوية للتكاليف الناتجة من تحقق الاخطار في كل الفروع:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots \ldots \ldots . + X_k$$

عند تكوين هذه الفئات يجب مراعاة ما يلي:

- المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots \ldots . , X_k$ مستقلة فيما بينها.
- بالنسبة الى معامل التقني يجب تحديد شكله بالنسبة لكل فئة و فيما يلي نفرض انه نسبة الى التوقع..
- يجب تحديد شكل المعامل التقني لشركات اعادة التامين و فيما يلي نفرض انه $u$ و هو ايضا نسبة الى التوقع الرياضي.
- نرمز ب $R$ لقيمة الاحتياط التقني المخصص للخطر و نضع $R' = R + (\lambda - u)E(X)$ و تم الحصول على هذه العلاقة كما يلي:

$$R' = R + (1 + \lambda)E(X) - (1 - u)E(X) = R + (\lambda - u)E(X)$$

و $R' > 0$

اي بحساب الفرق بين القسط التقني بين شركة التامين و شركة اعادة التامين.

- من اجل $k$ ... ... ... $j = 1,$ نتقبل ان $E(X_j) > 0$ .

باستعمال ما تم طرحه سابقا يمكن ان نحسب العزمين الاول و الثاني:

$$E(X) = E(X_1) + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . + E(X_k)$$

$$Var(X) = Var(X_1) + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . + Var(X_k)$$

من اجل $i = 1, \ldots . k$ قيمة الاقساط التقنية التي يتحصل عليها كل فرع $i$ تكون كما يلي:

$$\Pi_{\mathrm{i}} = (1+\lambda)E(X_i)$$

و القيمة الاجمالية للأقساط التقنية المتحصل عليها من طرف شركة التامين هي :

$$\Pi(X) = \sum_{i=1}^{k} \Pi_{\mathrm{i}}$$

فائدة شركة التامين يمكن كتابتها كما يلي:

$$B = \Pi(X) - X$$

و التوقع الرياضي و الانحراف المعياري يكونان كما يلي:

$\mathrm{E}\,(\mathrm{B}) = \lambda\mathrm{E}(\mathrm{X})$ و $\sigma\,(\mathrm{B}) = \sigma(\mathrm{X})$

في حالة اعادة التامين المثلى نبحث عن افضل حصص $\theta_i$ التي تحتفظ بها شركة التامين بعد اعادة التامين.

نضع $\theta_i$ الحصة التي تحتفظ بها شركة التامين من المحفظة او الفرع $i$ حيث $(0 \le \theta_i \le 1)$

و نضع الشعاع $\theta = (\theta_1 \ldots\ldots\ldots \theta_k)$ و بالتالي فائدة شركة التامين بعد اعادة التامين $\mathrm{B}(\theta)$ يمكن ان تكون كما يلي :

$$\mathrm{B}(\theta) = \Pi(X) - \sum_{j=1}^{k} \theta_j X_j - (1+u)\sum_{j=1}^{k}(1-\theta_j)E(X_j)$$

و $\sum_{j=1}^{k} \theta_j X_j$ هو الجزء المحتفظ به و

$\sum_{j=1}^{k}(1-\theta_j)X_j$ يمثل الجزء المعاد تأمينه اي الجزء من القسط الصافي المعاد تامينه.

$$E(\mathrm{B}(\theta)) = \Pi(X) - \sum_{j=1}^{k} \theta_j E(X_j) - (1+u)\sum_{j=1}^{k}(1-\theta_j)E(X_j)$$

بوضع $\Pi(X) = (1+\lambda)E(X)$ و بنشر المجاميع نجد:

$$E\big(\mathrm{B}(\theta)\big) = (\lambda - u)E(X) + u\sum_{j=1}^{k}\theta_j\,E(X_j)$$

و

$$V\big(B(\theta)\big) = \sum_{j=1}^{k}{\theta_j}^2\,Var(X_j)$$

من هذه النتائج يمكن ان نلاحظ ان الفائدة المتوسطة دالة متزايدة بدلالة $\theta_j$ من اجل كل $j = 1 \dots k$.

نعرف معامل امان شركة التامين اخذا بعين الاعتبار اعادة التامين:

$$T(\theta) = \frac{R + E\big(B(\theta)\big)}{\sigma\big(B(\theta)\big)} = \frac{R' + u\sum_{j=1}^{k}\theta_j\,E\big(X_j\big)}{\sigma\big(B(\theta)\big)}$$

حيث $j = 1 \dots k$ و $0 < \theta_j < 1$.

المقدار $T(\theta)$ يمثل معامل امان شركة التامين كما تم تعريفه سابقا و هو يمثل سابقة دالة التوزيع الطبيعي. لذا يسمى معامل امان اي كلما كان اكبر كلما كان احتمال الافلاس اقل. و هذا المقدار يمكن استخدامه لقرار حول اعادة التامين من عدمه.

يمكن كتابة اشكال تعظيم هدف دالة شركة التامين كما يلي:

$$\max E\big(B(\theta)\big)$$

*s/c*

$$T(\theta) = \frac{R' + u\sum_{j=1}^{k}\theta_j\,E\big(X_j\big)}{\sigma\big(B(\theta)\big)}$$

اي ان شركة التامين تقوم بتعظيم ربحها اخذا بعين الاعتبار معامل امانها.

من اجل حل هذا المشكل يمكن اللجوء الى خوارزمي تم بنائه لهطا الغرض.

**خوارزمي ايجاد قيم $\boldsymbol{\theta_j}$**

1) يتم ترتيب الفروع حسب $C_i$ حيث $C_i = \frac{m_i}{\sigma_i}$ و $m_i$ و $\sigma_i$ يمثلان على الترتيب المتوسطة و الانحراف داخل الفئات او فروع الاخطار.
2) البحث عن القيم العظمى بين الحالات التالية:
- كل الفروع يتم اعادة تامينها.
- فقط الفرع $k$ لا يتم اعادة تأمينه بينما الفروع الاخرى $(k-1)$ ... ... 1,2 يتم اعادة تامينها.
- فقط الفرعين $k$ و$(k-1)$ لا يتم اعادة تأمينهما بينما الفروع الاخرى $(k-2)$ ... ... 1,2 يتم اعادة تامينها.
- ...
- ...
- فقط الفرع 1 يتم اعادة تأمينه بينما الفروع الاخرى $(k-1)$ ... ... 1,2 لا يتم اعادة تأمينها.

3) نعتبر العدد الطبيعي $j$ ذات قيمة محصورة بين 1 و $k-1$ حيث ان الفروع $j$... ... 1,2 يتم اعادة تأمينها و الفروع الاخرى لا يتم اعادة تأمينها.
4) من اجل كل قيمة $i = j + 1$ الى $k$ *تكون قيم* $\theta_i$ مساوية الى 1.
5) قيمة $C_j$ يمكن الحصول عليها بكتابة قيمة $\theta_i$ في عبارة معامل الامان و الذي يعطي عبارة يتم حلها نسبة الى $C_j$.

# تمارين محلولة

**تمرين 1**

1. ما معنى احتمال البقاء على قيد الحياة؟

2. أعط الصيغة العشوائية و الاحتمالية لعقد تامين على شكل معاشات ابتداءا من سن 60 سنة لشخص سنه 32 سنة لحظة اكتتاب العقد و الذي يواصل التسديد إلى غاية سن 60 سنة؟

**تمرين 2**

1) اكتب الصيغة العشوائية و الاحتمالية لعقد تامين على الحياة يدفع لشخص سنه لحظة اكتتاب العقد 50 سنة مبلغ في حالة بقائه إلى سن 60 سنة و مبلغ أخر إلى ذوي الحقوق في حالة وفاته في سن 70 سنة ؟

2) اشرح باختصار أساس وضع حدود معامل ملاءة شركة التامين ؟

3) كيف يتم حساب حصة إعادة التامين ؟

**تمرين 3**

1) اشرح متى ستخدم الجداول على الحياة و الجداول على الوفاة؟

2) شخص في سن 50 سنة .

2-1) اي الجداول يتم استخدامها في حالة ما اذا كان رجل او امرأة؟

2-2) ما هو احتمال بقاء هذا الشخص الى سن 60 سنة اذا كان رجل او امرأة؟

3) اشرح ببساطة كيفية حساب القسط الصافي ؟ اعط مثال على ذلك؟

4) ما معنى الدوال البديلة على الحياة؟

**تمرين 4**

شخص في سن 50 سنة يود اكتتاب عقد تامين على الحياة يضمن له معاشة تكميلية 100000دج الشخص في حالة بقائه على قيد الحياة عند سن 60 سنة.

1) ما هي القيمة الحالية العشوائية للعقد؟

2) ما هي القيمة الحالية الاحتمالية لقسط التعويض؟

3) اكتب الصيغة العشوائية للقسط الصافي اذا كان لتعويض يكون خلال 5 سنواة بعد سن 60 سنة؟

يود نفس الشخص اكتتاب عقد تامين على الوفاة يضمن له تسديد الى ذوي الحقوق مبلغ 100000دج في حالة وفاته في سن 60 سنة.

4) ما هي القيمة الحالية الصافية للعقد؟
5) ما هي القيمة الحالية الاحتمالية لقسط التعويض؟

**تمرين 5:**

شخص بسن 45 سنة يود الاكتتاب في عقد تأمين يضمن له دفع مبلغ 20000 دج لذويه في حال وفاته عندما يبلغ السن 60سنة والدفع يكون لحظة الوفاة، كما يضمن له هذا العقد دفع مبلغ سنوي مقدر بــ5000 دج في حال بقاءه على قيد الحياة بين 60 و70سنة.

1) ما هي صيغة العقد؟

2) اكتب صيغة القيمة الحالية العشوائية للقسط.

3) اكتب صيغة القيمة الحالية الاحتمالية للقسط باستخدام الدوال البديلة مع حساب قيمته.

**تمرين 6**

1) اشرح أساس تكوين قسط التامين؟

2) اكتب الصيغة العشوائية و الاحتمالية لعقد تامين يمنح معاشات تكميلية ابتداء من سن 60 سنة حيث ان الأقساط تكون على شكل اقتطاعات سنوية ابتدءا من سن 30 سنة؟

3) ما هو الهدف من حساب التباين على القسط؟

4) لماذا لما تطلب شركة التامين القسط الصافي يكون احتمال الإفلاس مساو إلى 50%؟

**تمرين 7**

محفظة أخطار مكونة من 100 عقد تامين على حوادث السيارات مبلغ القسط الصافي 20000دج بينما الانحراف المعياري لهذا القسط 1000دج. طبقت الشركة تحميل تقني مقدر ب 6.%

1. ما معنى احتمال الإفلاس؟ اعط استخدام لاحتمال الإفلاس؟

2. ما هو احتمال إفلاس هذه الشركة؟

3. ما هي قيمة معامل التحميل التقني حتى يصبح احتمال الإفلاس 1 %؟

4. إذا كانت الشركة لا تستطيع رفع معامل التحميل التقني أكثر من 6%, ما قيمة الاحتياط التقني الواجب تكوينه حتى يتحقق نفس الهدف (احتمال إفلاس 1%)؟

التمرين 8

محفظة أخطار مكونة من 100 عقد تامين على حوادث السيارات مبلغ القسط الصافي 30000دج بينما الانحراف المعياري لهذا القسط 1000دج. طبقت الشركة تحميل تقني مقدر ب 7%

1) ما هو احتمال إفلاس الشركة؟

2) ما هي قيمة معامل التحميل التقني حتى يصبح احتمال الإفلاس 1 %؟

إذا كانت الشركة لا تستطيع رفع معامل التحميل التقني أكثر من 6%, ما قيمة الاحتياط التقني الواجب تكوينه حتى يتحقق نفس الهدف (احتمال إفلاس 1%)؟

**التمرين 9**

محفظة أخطار مكونة من 100عقد تامين على حوادث السيارات أين كان احتمال تحقق الحادث 5% و مبلغ التعويض للعقد الواحد مقدر ب 150000 دج.

1) ما هو المبلغ المتوقع تعويضه على كل المحفظة؟

2) ما هي قيمة التباين على التعويض لكل الحفظة؟ ما معنى المقدار المتحصل عليه؟

3) لما تقوم بتكوين المحفظة يجب مراعاة أساسين مهمين , ما هما مع شرح لأهميتهما؟

4) ما هو احتمال الإفلاس على المحفظة إذا كانت قيمة القسط الصافي الذي تطلبه شركة التامين 20000دج و التحميل التقني 3%؟ (يمكن اعتبار الان الانحراف المعياري على المحفظة 1000000دج. ليس شرط انه مساو الى الذي يتم حسابه في السؤال 2 )

**حلول التمارين**

**حل التمرين 1**

1. ما معنى احتمال البقاء على قيد الحياة؟

الاجابة: معنى احتمال البقاء على قيد الحياة هو احتمال ان يبقى الشخص حي من السنة الاصلية للحساب اي السن x الى غاية السن x+n. اي يحتفل بعيد ميلاده n بعد x.

2. أعط الصيغة العشوائية و الاحتمالية لعقد تامين على شكل معاشات ابتداءا من سن 60 سنة لشخص سنه 32 سنة لحظة اكتتاب العقد و الذي يواصل التسديد إلى غاية سن 60 سنة؟

الاجابة:

الصيغة العشوائية لعقد تامين على شكل معاشات ابتداءا من سن 60 سنة حيث يواصل التسديد (الاشتراك) الى غاية السن 60 سنة.

$$\sum_{j=1}^{n} {}_{j}w_x V^j = \sum_{k=n}^{w-n} x(k)V^k$$

حيث ${}_{j}w_x$ يمثل الاشتراكات العشوائية و $x(k)$ تمثل التعويضات العشوائية.

الصيغة الاحتمالية للعقد:

$$E\left(\sum_{j=1}^{n} {}_{j}w_x V^j\right) = E\left(\sum_{k=n}^{w-n} x(k)V^k\right)$$

بحساب الاحتمالات يمكن ان نكتب الصيغة السابقة كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} P\ {}_{j}p_x V^j = \sum_{k=n}^{w-n} C\ {}_{k}p_x V^k$$

حيث $P$ يمثل مبلغ القسط و $C$ يمثل مبلغ التعويض.

**تمرين 2**

1) اكتب الصيغة العشوائية و الاحتمالية لعقد تامين على الحياة يدفع لشخص سنه لحظة اكتتاب العقد 50 سنة مبلغ في حالة بقائه إلى سن 60 سنة و مبلغ أخر إلى ذوي الحقوق في حالة وفاته في سن 70 سنة ؟

الاجابة :

الصيغة العشوائية

$$w_{50} = x(60)V^{10} + x(70)V^{20}$$

الصيغة الاحتمالية

$$E(\ \ w_{50}) = E(x(60)V^{10} + x(70)V^{20})$$

$$\Rightarrow P = C\,{}_{10}p_{50}V^{10} + \ C_1\,{}_{19}q_{50}\ {}_{1}p_{69}V^{20}$$

حيث $C$ يمثل مبلغ التعويض عند سن 60 و $_1$ مبلغ التعويض عند سن 70 سنة.

2) اشرح باختصار أساس وضع حدود معامل ملاءة شركة التامين ؟

الاجابة : حدود معامل الامان تم وضعها باستخدام القانون الطبيعي المعياري و جدول الاحتمالات المرفق بهذا القانون (انظر الملحق). و يتم حساب هذه الحدود باستهداف احتمال افلاس ثم يتم البحث عن الدالة العكسية.

3) كيف يتم حساب حصة إعادة التامين ؟

الاجابة: يتم حساب حصة اعادة التامين باستهداف تخفيض احتمال افلاس او تحسين معامل امان شركة التامين.

**تمرين 3**

1) اشرح متى ستخدم الجداول على الحياة و الجداول على الوفاة؟

الاجابة: يتم استخدام الجدول على الحياة في حالة عقود التامين على الحياة او في حالة حساب احتمال الوفاة للنساء.

يتم استخدام الجدول على الوفاة في حالة عقود تامين على الوفاة او في حلة البحث عن حساب الاحتمال الحقيقي لوفاة رجل.

2) شخص في سن 50 سنة يود اكتتاب عقد تامين على الحياة.

- اي الجداول يتم استخدامها في حالة ما اذا كان رجل او امرأة؟

الاجابة: الجدول المستخدم هو جدول الحياة TV حيث انه في هذه الحالة ننظر الى نوع العقد و ليس جنس المكتتب.

- ما هو احتمال بقاء هذا الشخص الى سن 60 سنة اذا كان رجل او امرأة؟

نقوم بحساب الاحتمال باستخدام الجدول TV انظر الملحق.

احتمال بقاء الشخص على قيد الحياة من السن 50 الى السن 60

$$ {}_{10}P_{50} = \frac{l_{60}}{l_{50}} $$

3) اشرح ببساطة كيفية حساب القسط الصافي ؟ اعط مثال على ذلك؟

يتم حساب القسط الصافي بحساب التوقع على مبلغ التعويض العشوائي. بصيغة اخرى حساب التوقع على الصيغة العشوائية للقسط.

مثال يمكن تعويض شخص بمبلغ 100000دج في حالة تحقق حادث ذات احتمال 0.1. قيمة القسط الصافي في هذه الحالة = 100000✕0.1=10000دج.

4) ما معنى الدوال البديلة على الحياة؟

الدوال البديلة عبارة عن علاقات رياضية تم استنتاجها من الاشكال الرياضية لعقود التامينات على الحياة و الوفاة. و هي تسمح بكتابة ابسط و اوضح لاي عقد تامين.

**تمرين 4**

شخص في سن 50 سنة يود اكتتاب عقد تامين على الحياة يضمن له معاشة تكميلية 100000دج الشخص في حالة بقائه على قيد الحياة عند سن 60 سنة.

1) ما هي القيمة الحالية العشوائية للعقد؟

الاجابة:

$$vaa = 100000\ X_i(10)V^{-10}$$

$$X_i(10) = \begin{cases} 1 & \text{الشخص على قيد الحياة} \\ 0 & \text{الشخص متوفي} \end{cases}$$

حيث $i \in [1, n]$

2) ما هي القيمة الحالية الاحتمالية لقسط التعويض؟

القيمة الحالية الاحتمالية هي نفسها القسط الصافي و هي بمثابة التوقع على القيمة الحالية العشوائية.

$$P = E(vaa) = 10000\ {}_{10}p_{50}V^{-10}$$

يتم استخدام الجدول TV انظر الملحق.

3) اكتب الصيغة العشوائية للقسط الصافي اذا كان التعويض يكون خلال 5 سنواة بعد سن 60 سنة؟

$$vaa = 100000 \sum_{\mathrm{t=10}}^{15} X_i(t)V^{-t}$$

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{الشخص على قيد الحياة} \\ 0 & \text{الشخص متوفي} \end{cases}$$

حيث $i \in [1, n]$

يود نفس الشخص اكتتاب عقد تامين على الوفاة يضمن له تسديد الى ذوي الحقوق مبلغ 100000دج في حالة وفاته في سن 60 سنة.

4) ما هي القيمة الحالية العشوائية للعقد؟

الاجابة:

$$vaa = 100000\, X_i(10) V^{-10}$$

$$X_i(10) = \begin{cases} 1 & \text{الشخص متوفي} \\ 0 & \text{الشخص على قيد الحياة} \end{cases}$$

حيث $i \in [1, n]$

5) ما هي القيمة الحالية الاحتمالية لقسط التعويض؟

$$P = E(vaa) = 10000\ {}_{10}p_{50}\ {}_{1}q_{60} V^{-10}$$

**قائمة المراجع**


Christian Hess .(2000) .*Méthodes Actuarielles de l'assurance vie* . Paris: Eonomica.

Christian Partrat ،Eric Lecoeur ،Jean Marie Nessi ،Ecaterina Nisipasu و ، Olivier Reiz .(2007) .*Provision technique en assurance non-vie: perspective actuarielles modernes* .Paris: ECONOMICA.

Dale S Borowiak و ،Arnold F Shapiro .(2014) .*Financial and actuarial statistics: an introduction* .USA: CRC Press.

J L Cassabalian .(2000) .*Mathématiques et calculs de l'assurance* . ESKA.

Jacqueline Friedland .(2020) .*Fundamental of general insurance actuarial analysis* .USA: Society of Actuaries.

Kartashova Olga Ivanova ،Molchanova Olga Vladimirovna و ،Axana Turgaeva .(2018) .Insurance risque management methodology .*Risk and Financial Management*.

Khaled Khaldi .(2006) .*Méthode statistiques et probabilités* .CASBA.

Michel Denuit و ،Arthur Charpentier .(2004) .*Mathématiques de l'assurance non-vie* .Economica.

Michel Fromenteau و ،Pierre Petauton .(2017) .*Théorie et pratique de l'assurance vie* . Paris: Dunod.

pascal Ardilly .(2006) .*les techniques de sondage* . TECHNIP.

W.E. Deming .(1964) .quelques méthodes de sondage .*revue de statistique appliquée*.55-11 ،

Walder Masiéri .(2001) .*Mathématiques financières* .Paris: DALLOZ.

Werner Hurlimann .(2009) .Actuarial analysis of the multiple life endowment insurance contract .*FRS Global Switzerland*.

ابراهيم علي ابراهيم عبد ربه. (2001). *مبادئ علم الاحصاء*. الاسكندرية: مطبعة الاسعاع الفني .

ابراهيم محمد العلي. (1980). *مدخل في نظرية المعاينة*. دمشق: مديرية الكتب و المطبوعات الجامعية .

قيس ناجي عبد الجبار. (2017). *اصول الاحصاء*. دار المناهج.

معجم المصطلحات الاحصائية . (2005). المعهد العربي للتدريب و البحوث الاحصائية .

# الملاحق

الملحق رقم 1 جدول الحياة

**Table TV 1997-1999**

| âge | lx | dx | âge | lx | dx |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100 000 | 5 061 | 53 | 85348 | 484 |
| 1 | 94 939 | 884 | 54 | 84864 | 526 |
| 2 | 94 055 | 428 | 55 | 84338 | 556 |
| 3 | 93 627 | 130 | 56 | 83782 | 583 |
| 4 | 93 497 | 106 | 57 | 83199 | 627 |
| 5 | 93 391 | 110 | 58 | 82572 | 693 |
| 6 | 93 281 | 80 | 59 | 81879 | 781 |
| 7 | 93 201 | 59 | 60 | 81098 | 864 |
| 8 | 93 142 | 43 | 61 | 80234 | 936 |
| 9 | 93 099 | 37 | 62 | 79298 | 1 017 |
| 10 | 93 062 | 61 | 63 | 78281 | 1 113 |
| 11 | 93 001 | 59 | 64 | 77168 | 1 231 |
| 12 | 92 942 | 57 | 65 | 75937 | 1 378 |
| 13 | 92 885 | 60 | 66 | 74559 | 1 527 |
| 14 | 92 825 | 64 | 67 | 73032 | 1 657 |
| 15 | 92 761 | 68 | 68 | 71375 | 1 765 |
| 16 | 92 693 | 72 | 69 | 69610 | 1 846 |
| 17 | 92 621 | 75 | 70 | 67764 | 1 948 |
| 18 | 92 546 | 78 | 71 | 65816 | 2 088 |
| 19 | 92 468 | 83 | 72 | 63728 | 2 221 |
| 20 | 92 385 | 75 | 73 | 61507 | 2 343 |
| 21 | 92 310 | 80 | 74 | 59164 | 2 444 |
| 22 | 92 230 | 83 | 75 | 56720 | 2 862 |
| 23 | 92 147 | 85 | 76 | 53858 | 3 049 |
| 24 | 92 062 | 89 | 77 | 50809 | 3 220 |
| 25 | 91 973 | 104 | 78 | 47589 | 3 370 |
| 26 | 91 869 | 105 | 79 | 44219 | 3 492 |
| 27 | 91 764 | 110 | 80 | 40727 | 3 578 |
| 28 | 91 654 | 115 | 81 | 37149 | 3 626 |
| 29 | 91 539 | 121 | 82 | 33523 | 3 626 |
| 30 | 91 418 | 187 | 83 | 29897 | 3 578 |
| 31 | 91 231 | 139 | 84 | 26319 | 3 478 |
| 32 | 91 092 | 126 | 85 | 22841 | 3 327 |
| 33 | 90 966 | 127 | 86 | 19514 | 3 127 |
| 34 | 90 839 | 145 | 87 | 16387 | 2 885 |
| 35 | 90 694 | 175 | 88 | 13502 | 2 605 |
| 36 | 90 519 | 188 | 89 | 10897 | 2 302 |
| 37 | 90 331 | 202 | 90 | 8595 | 1 984 |
| 38 | 90 129 | 215 | 91 | 6611 | 1 665 |
| 39 | 89 914 | 229 | 92 | 4946 | 1 356 |
| 40 | 89 685 | 248 | 93 | 3590 | 1 071 |
| 41 | 89 437 | 268 | 94 | 2519 | 816 |
| 42 | 89 169 | 286 | 95 | 1703 | 598 |
| 43 | 88 883 | 297 | 96 | 1105 | 420 |
| 44 | 88 586 | 304 | 97 | 685 | 281 |
| 45 | 88 282 | 307 | 98 | 404 | 179 |
| 46 | 87 975 | 319 | 99 | 225 | 108 |
| 47 | 87 656 | 334 | 100 | 117 | 60 |
| 48 | 87 322 | 340 | 101 | 57 | 32 |
| 49 | 86 982 | 375 | 102 | 25 | 15 |
| 50 | 86 607 | 395 | 103 | 10 | 6 |
| 51 | 86 212 | 417 | 104 | 4 | 3 |
| 52 | 85 795 | 447 | 105 | 1 | 1 |

الملحق رقم 2 جدول الوفاة

Table TD 1997-1999

| âge | lx | dx | âge | lx | dx |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100 000 | 5 599 | 53 | 82065 | 668 |
| 1 | 94 401 | 755 | 54 | 81397 | 697 |
| 2 | 93 646 | 385 | 55 | 80700 | 704 |
| 3 | 93 261 | 172 | 56 | 79996 | 728 |
| 4 | 93 089 | 142 | 57 | 79268 | 780 |
| 5 | 92 947 | 164 | 58 | 78488 | 863 |
| 6 | 92 783 | 118 | 59 | 77625 | 979 |
| 7 | 92 665 | 84 | 60 | 76646 | 1108 |
| 8 | 92 581 | 63 | 61 | 75538 | 1219 |
| 9 | 92 518 | 53 | 62 | 74319 | 1317 |
| 10 | 92 465 | 90 | 63 | 73002 | 1399 |
| 11 | 92 375 | 87 | 64 | 71603 | 1465 |
| 12 | 92 288 | 89 | 65 | 70138 | 1526 |
| 13 | 92 199 | 94 | 66 | 68612 | 1593 |
| 14 | 92 105 | 104 | 67 | 67019 | 1679 |
| 15 | 92 001 | 114 | 68 | 65340 | 1788 |
| 16 | 91 887 | 121 | 69 | 63552 | 1933 |
| 17 | 91 766 | 130 | 70 | 61619 | 2144 |
| 18 | 91 636 | 140 | 71 | 59475 | 2364 |
| 19 | 91 496 | 154 | 72 | 57111 | 2545 |
| 20 | 91 342 | 172 | 73 | 54566 | 2661 |
| 21 | 91 170 | 193 | 74 | 51905 | 2690 |
| 22 | 90 977 | 205 | 75 | 49215 | 2554 |
| 23 | 90 772 | 210 | 76 | 46661 | 2626 |
| 24 | 90 562 | 206 | 77 | 44035 | 2690 |
| 25 | 90 356 | 202 | 78 | 41345 | 2743 |
| 26 | 90 154 | 205 | 79 | 38602 | 2785 |
| 27 | 89 949 | 207 | 80 | 35817 | 2812 |
| 28 | 89 742 | 206 | 81 | 33005 | 2823 |
| 29 | 89 536 | 204 | 82 | 30182 | 2814 |
| 30 | 89 332 | 199 | 83 | 27368 | 2784 |
| 31 | 89 133 | 195 | 84 | 24584 | 2732 |
| 32 | 88 938 | 195 | 85 | 21852 | 2655 |
| 33 | 88 743 | 201 | 86 | 19197 | 2552 |
| 34 | 88 542 | 213 | 87 | 16645 | 2424 |
| 35 | 88 329 | 224 | 88 | 14221 | 2270 |
| 36 | 88 105 | 233 | 89 | 11951 | 2094 |
| 37 | 87 872 | 245 | 90 | 9857 | 1897 |
| 38 | 87 627 | 254 | 91 | 7960 | 1685 |
| 39 | 87 373 | 269 | 92 | 6275 | 1462 |
| 40 | 87 104 | 287 | 93 | 4813 | 1236 |
| 41 | 86 817 | 306 | 94 | 3577 | 1013 |
| 42 | 86 511 | 320 | 95 | 2564 | 801 |
| 43 | 86 191 | 329 | 96 | 1763 | 610 |
| 44 | 85 862 | 336 | 97 | 1153 | 441 |
| 45 | 85 526 | 334 | 98 | 712 | 301 |
| 46 | 85 192 | 336 | 99 | 411 | 193 |
| 47 | 84 856 | 352 | 100 | 218 | 114 |
| 48 | 84 504 | 365 | 101 | 104 | 60 |
| 49 | 84 139 | 425 | 102 | 44 | 28 |
| 50 | 83 714 | 484 | 103 | 16 | 12 |
| 51 | 83 230 | 550 | 104 | 4 | 3 |
| 52 | 82 680 | 615 | 105 | 1 | 1 |

## ملحق رقم 3

### الجدول الاحصائي لقانون بواسون

$$P(X=k)=e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$$

(μ le nombre d'occurrences moyen)

| x \ μ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9048 | 0,8187 | 0,7408 | 0,6703 | 0,6065 | 0,5488 | 0,4966 | 0,4493 | 0,4066 | 0,3679 |
| 1 | 0,9953 | 0,9825 | 0,9631 | 0,9384 | 0,9098 | 0,8781 | 0,8442 | 0,8088 | 0,7725 | 0,7358 |
| 2 | 0,9998 | 0,9989 | 0,9964 | 0,9921 | 0,9856 | 0,9769 | 0,9659 | 0,9526 | 0,9371 | 0,9197 |
| 3 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9992 | 0,9982 | 0,9966 | 0,9942 | 0,9909 | 0,9865 | 0,9810 |
| 4 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9996 | 0,9992 | 0,9986 | 0,9977 | 0,9963 |
| 5 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9997 | 0,9994 |
| 6 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 |
| 7 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

| x \ μ | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,2231 | 0,1353 | 0,0498 | 0,0183 | 0,0067 | 0,0025 | 0,0009 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0000 |
| 1 | 0,5578 | 0,4060 | 0,1991 | 0,0916 | 0,0404 | 0,0174 | 0,0073 | 0,0030 | 0,0012 | 0,0005 |
| 2 | 0,8088 | 0,6767 | 0,4232 | 0,2381 | 0,1247 | 0,0620 | 0,0296 | 0,0138 | 0,0062 | 0,0028 |
| 3 | 0,9344 | 0,8571 | 0,6472 | 0,4335 | 0,2650 | 0,1512 | 0,0818 | 0,0424 | 0,0212 | 0,0103 |
| 4 | 0,9814 | 0,9473 | 0,8153 | 0,6288 | 0,4405 | 0,2851 | 0,1730 | 0,0996 | 0,0550 | 0,0293 |
| 5 | 0,9955 | 0,9834 | 0,9161 | 0,7851 | 0,6160 | 0,4457 | 0,3007 | 0,1912 | 0,1157 | 0,0671 |
| 6 | 0,9991 | 0,9955 | 0,9665 | 0,8893 | 0,7622 | 0,6063 | 0,4497 | 0,3134 | 0,2068 | 0,1301 |
| 7 | 0,9998 | 0,9989 | 0,9881 | 0,9489 | 0,8666 | 0,7440 | 0,5987 | 0,4530 | 0,3239 | 0,2202 |
| 8 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9962 | 0,9786 | 0,9319 | 0,8472 | 0,7291 | 0,5925 | 0,4557 | 0,3328 |
| 9 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9989 | 0,9919 | 0,9682 | 0,9161 | 0,8305 | 0,7166 | 0,5874 | 0,4579 |
| 10 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9997 | 0,9972 | 0,9863 | 0,9574 | 0,9015 | 0,8159 | 0,7060 | 0,5830 |
| 11 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9991 | 0,9945 | 0,9799 | 0,9467 | 0,8881 | 0,8030 | 0,6968 |
| 12 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9997 | 0,9980 | 0,9912 | 0,9730 | 0,9362 | 0,8758 | 0,7916 |
| 13 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9993 | 0,9964 | 0,9872 | 0,9658 | 0,9261 | 0,8645 |
| 14 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9986 | 0,9943 | 0,9827 | 0,9585 | 0,9165 |
| 15 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9976 | 0,9918 | 0,9780 | 0,9513 |
| 16 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9990 | 0,9963 | 0,9889 | 0,9730 |
| 17 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9984 | 0,9947 | 0,9857 |
| 18 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9993 | 0,9976 | 0,9928 |
| 19 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9997 | 0,9989 | 0,9965 |
| 20 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9984 |
| 21 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9993 |
| 22 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 |
| 23 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 |
| 24 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

## ملحق رقم 4

### الجدول الاحتمالي للقانون الطبيعي

| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9913 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9986 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |