Corrigé DE L'Exercice1. Calcul des limites :

■$\lim u_n = \lim\left(2n^2 - 2\sqrt{n} + 1\right) = \lim(2n^2) = +\infty$

■$\lim u_n = \lim \dfrac{\sqrt{n}+1}{n+7} = \lim \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

■$\lim u_n = \lim\left(\dfrac{3n^2+2n-1}{5n^2-8}\right) = \lim \dfrac{3n^2}{5n^2} = \dfrac{3}{5}$

■ $\lim u_n = \lim \dfrac{3^n + (-1)^n}{2(3)^n} = \lim\left(\dfrac{3^n}{2(3)^n} + \dfrac{(-1)^n}{2(3)^n}\right) = \dfrac{1}{2}\lim\left(\dfrac{3^n}{3^n} + \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right) = \dfrac{1}{2}(1+0) = \dfrac{1}{2}$

■$\lim u_n = \lim \dfrac{\sqrt{n}-n+1}{2\sqrt{n}+n+2} = \lim \dfrac{-n}{n} = -1$

■$\lim u_n = \lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2}} = \lim \sqrt{\dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\lim \dfrac{n^2+1}{n^2+2n+1}} = \sqrt{\lim \dfrac{n^2}{n^2}} = 1$

■$\lim u_n = \lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}-\sqrt{n^2-1}}{n+1} = \lim\left(\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} + \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} - \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n+1}\right) = 1+0-1 = 0$

■$\lim u_n = \lim(-2)^n$ N'existe pas.

■$\lim u_n = \lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\left(\dfrac{5}{4}\right)^n = \lim\left(\dfrac{2}{3}\dfrac{5}{4}\right)^n = \lim\left(\dfrac{10}{12}\right)^n = 0$

Corrigé DE L'Exercice2. On a la suite (u_n) telle que : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = \frac{4u_n}{3u_n+3}$.

1. Le Calcul des termes.

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{4u_0}{3u_0+3} = \frac{4}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \boldsymbol{u_2} = \frac{4u_1}{3u_1+3} = \frac{4\left(\frac{2}{3}\right)}{3\left(\frac{2}{3}\right)+3} = \frac{\frac{8}{3}}{5} = \frac{8}{15}$$

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \frac{1}{3}$.

Par récurrence, on a $u_0 = 1$, donc $u_0 > \frac{1}{3}$. De plus pour $u_n > \frac{1}{3}$, on a :

$$u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{4u_n}{3u_n+3} - \frac{1}{3} = \frac{3(4u_n)-(3u_n+3)}{3(3u_n+3)} = \frac{12u_n-3u_n-3}{9(u_n+1)} = \frac{9u_n-3}{9(u_n+1)} = \frac{9\left(u_n-\frac{1}{3}\right)}{9(u_n+1)} = \frac{u_n-\frac{1}{3}}{u_n+1} > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > \frac{1}{3}.$$

D'où le résultat.

3. La monotonie.

On a $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{3u_n+3} - u_n = \frac{4u_n - u_n(3u_n+3)}{3u_n+3} = \frac{4u_n - 3u_n^2 - 3u_n}{3u_n+3} = \frac{u_n - 3u_n^2}{3u_n+3} = \frac{3u_n\left(\frac{1}{3}-u_n\right)}{3u_n+3}$.

Comme $u_n > \frac{1}{3}$, on a : $u_n > 0$ et $\frac{1}{3} - u_n < 0$. Et on déduit $u_{n+1} - u_n < 0$. Ce qui signifie la suite (u_n) est décroissante.

4. La convergence.

La suite (u_n) est convergente car elle est décroissante et minorée ($u_n > \frac{1}{3}$).

Donc $\lim u_n = l$. Et $l \geq \frac{1}{3}$.

5. La Limite.

Comme $l = \lim u_n$, l vérifie l'équation $l = \frac{4l}{3l+3}$ ou bien $l(3l+3) = 4l$. Ce qui donne l'équation suivante $3l^2 - l = 0$. Qu'on peut écrire aussi sous la forme $l(3l-1) = 0$. Et on a les deux solutions $l = 0$, $l = \frac{1}{3}$. Et comme $l \geq \frac{1}{3}$, on a $\lim u_n = \frac{1}{3}$.

Corrigé DE L'Exercice3. On a les deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_0 = 2, v_0 = 1 \; et \; u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

1. Le Calcul des termes.

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}, v_1 = \sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{2}$$

2. Les inégalités. $0 < v_n < u_n$:

On a $u_0 = 2, v_0 = 1$. Donc $0 < v_0 < u_0$. Pour u_n, v_n telles que $0 < v_n < u_n$, on a :

D'une part, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} > 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0$ (car $u_n > 0$ et $v_n > 0$).

Et en d'autre part,

$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{u_n+v_n-2\sqrt{u_n v_n}}{2} = \frac{(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n})^2}{2}$. Comme $u_n > v_n$, on a $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} \neq 0$.

Donc, $u_{n+1} - v_{n+1} > 0$ ou bien, $u_{n+1} > v_{n+1}$.

Ce qui nous donne $0 < v_{n+1} < u_{n+1}$. D'où le résultat.

3. La monotonie.

On a $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+v_n}{2} - u_n = \frac{u_n+v_n-2u_n}{2} = \frac{-u_n+v_n}{2} = -\frac{u_n-v_n}{2}$. Comme $u_n > v_n$, on a $u_n - v_n > 0$.

Donc, $u_{n+1} - u_n < 0$. D'où (u_n) est décroissante.

On a aussi $v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n v_n} - v_n > \sqrt{v_n v_n} - v_n = v_n - v_n = 0$. D'où (v_n) est croissante.

Comme remarque, l'inégalité ci-dessus est déduite en remarquant que $\sqrt{u_n v_n} > \sqrt{v_n v_n} = v_n$.

En effet, on a $u_n > v_n$ ce qui donne $u_n v_n > v_n v_n = v_n^2$. Et donc $\sqrt{u_n v_n} > \sqrt{v_n v_n} = \sqrt{v_n^2} = v_n.(*)$

4. Les inégalités. $0 < u_n - v_n < \frac{u_0 - v_0}{2^n}$:

Tout d'abord, on doit vérifier que pour tout $n \geq 1$:

$$0 < u_n - v_n < \frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{2}$$

On a d'une part, $v_n < u_n$ donne $u_n - v_n > 0$.

En d'autre part,

$$u_n - v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \frac{u_{n-1} + v_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}}{2}$$

$$< \frac{u_{n-1} + v_{n-1} - 2\sqrt{v_{n-1}v_{n-1}}}{2} = \frac{u_{n-1} + v_{n-1} - 2v_{n-1}}{2} = \frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{2}$$

Comme précédemment, pour avoir l'inégalité ci-dessus il suffit de remarquer que :

$$-2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} < -2\sqrt{v_{n-1}v_{n-1}} = -2v_{n-1}$$

En effet, on a de la relation $(*)$:

$\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} > \sqrt{v_{n-1}v_{n-1}} = v_{n-1}$. Donc $-2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} < -2\sqrt{v_{n-1}v_{n-1}} = -2v_{n-1}$.

Ce qui nous donne,

$$u_n - v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1} - 2\sqrt{v_{n-1}v_{n-1}}}{2} < \frac{u_{n-1} + v_{n-1} - 2v_{n-1}}{2} = \frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{2}$$

Ainsi on a pour tout $n \geq 1$,

$$0 < u_n - v_n < \frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{2}$$

Alors, pour $n-1$ on a l'inégalité $0 < u_{n-1} - v_{n-1} < \frac{u_{n-2} - v_{n-2}}{2}$. Donc,

$$0 < u_n - v_n < \frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{2} < \frac{u_{n-2} - v_{n-2}}{2^2}$$

Ce qui nous donne,

$$0 < u_n - v_n < \frac{u_{n-2} - v_{n-2}}{2^2}$$

De même, pour $n-2$ on a l'inégalité $0 < u_{n-2} - v_{n-2} < \frac{u_{n-3} - v_{n-3}}{2}$. Donc,

$$0 < u_n - v_n < \frac{u_{n-2} - v_{n-2}}{2^2} < \frac{u_{n-3} - v_{n-3}}{2^3}$$

Ce qui nous donne,

$$0 < u_n - v_n < \frac{u_{n-3} - v_{n-3}}{2^3}$$

Et par induction, on déduit pour $n-k,\ k = 1, 2, \dots, n-1$:

$$0 < u_n - v_n < \frac{u_{n-(k+1)} - v_{n-(k+1)}}{2^{k+1}}$$

En particulier si $k = n-1$, on a :

$$0 < u_n - v_n < \frac{u_0 - v_0}{2^n}$$

5. Déduction de la limite.

En posant $S_n = 0, T_n = \frac{u_0 - v_0}{2^n}$ et $W_n = u_n - v_n$. Ainsi, on a :

$$\begin{cases} S_n < W_n < T_n \\ \lim S_n = \lim T_n = 0 \end{cases}$$

Et d'après le théorème d'encadrement, on déduit $\lim W_n = \lim(u_n - v_n) = 0$.

6. La convergence.

D'après ce qui précèdent les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, donc sont convergentes.

7. Conclusion.

Comme (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors $\lim u_n = \lim v_n$.

Corrigé DE L'Exercice4. On a les deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(4u_n - u_{n-1}) \\ v_{n+1} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

1. (v_n) Est géométrique.

On a $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$, donc $v_n = u_n - u_{n-1}$.

De plus, $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(4u_n - u_{n-1}) - u_n = \frac{4u_n - u_{n-1} - 3u_n}{3} = \frac{u_n - u_{n-1}}{3} = \frac{1}{3}v_n$. D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - u_0 = 1$.

2. La somme.

On a $S = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

3. La limite.

On a $S = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots + (u_n - u_{n-1})$

$$= u_n - u_0 = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Donc $u_n = u_0 + \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$. D'où $\lim u_n = \lim\left(\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\right) = \frac{3}{2}$.