Abessi

Ex 1) Modélisation (4 pts)

Le Problème revient à minimiser le Coût de ~~d'al~~ l'allocation des avions. 0,5

Objectif : minimiser le coût d'allocation

Min Z = 800.10³ nbre d'avion de Type A
+ 200.10³ " " de Type B | 0,5

d'où les Variables du Problème sont :

x_A = nbre d'avions de Type A
x_B = nbre " " B. | 0,5

Les contraintes :

a) Contraintes concernant la charge des avions

* Contrainte concernant la charge des personnes

$$200 x_A + 100 x_B \geq 1600.$$ 0,5

* cont sur la charge des bagages.

$$6 x_A + 6 x_B \geq 90$$ 0,5

b) Cont concernant le nbre d'avions de Type A ou B disponibles.

0,5 $x_A \leq 12$ (nbre d'avion de Type A disp)

0,5 $x_B \leq 9$ (" " " B ")

c) Cont de Positivité des Var.

$$x_A \geq 0 ; x_B \geq 0$$ 0,5

Ex 2) 4 pts

$$\begin{cases} \text{Max } Z = x_1 + x_2 \\ 3x_1 - x_2 \leq 5 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq -10 \\ -8x_1 + 10x_2 \leq 16 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

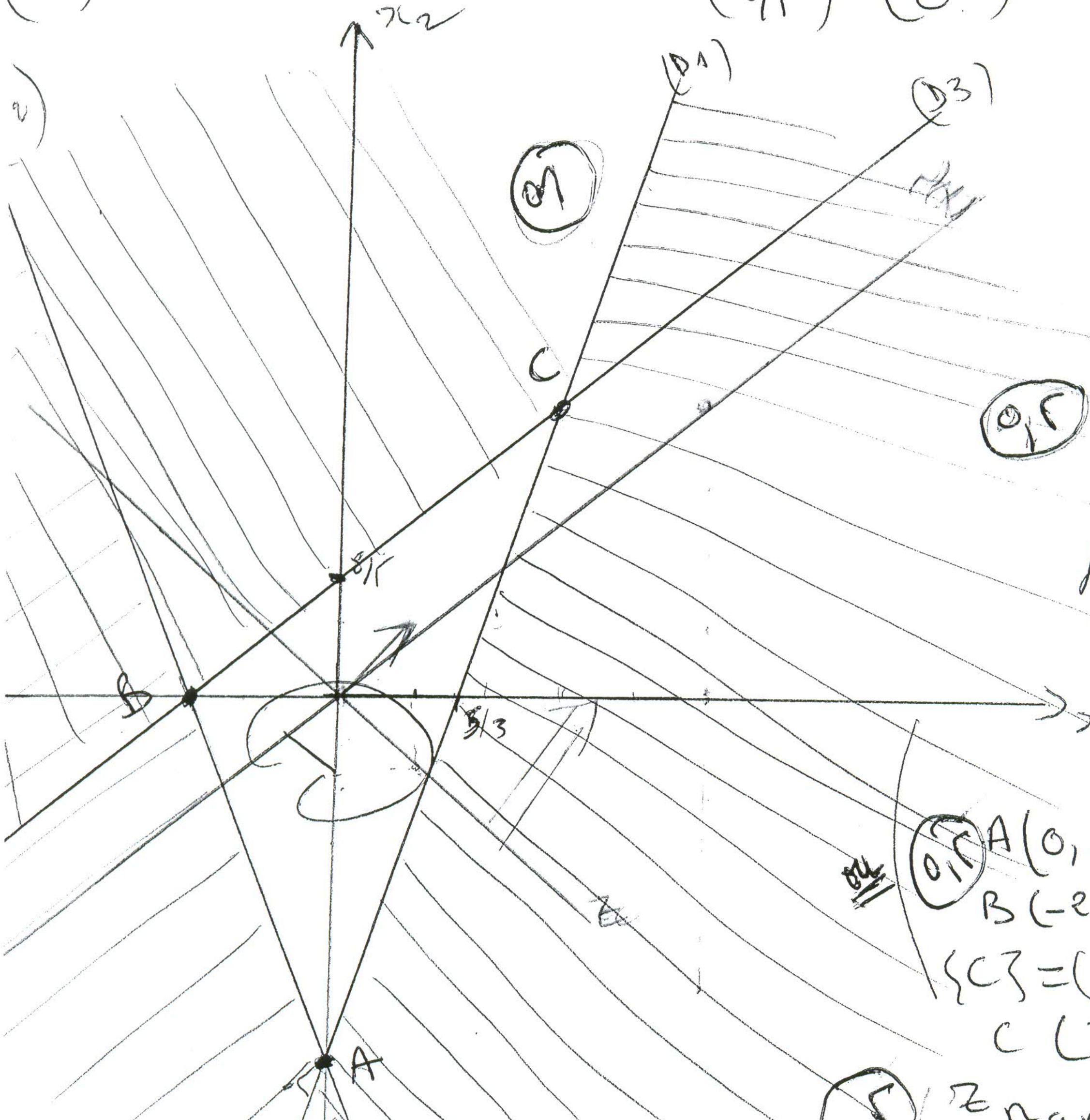
Résolution géometrique :

+ Tracer les droites

$(D_1) : 3x_1 - x_2 = 5$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(D_2) : 5x_1 + 2x_2 = -10$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(D_3) : -8x_1 + 10x_2 = 16$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 8/5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$



l'ensemble des solt réalisables est le polyèdre convexe D Triangle (ABC)

0,5

La solution optimal se trouve au niveau de l'un des sommets A, B, C.

0,5

$A(0,-5) \Rightarrow Z_A = -5$

$B(-2,0) \Rightarrow Z_B = -2$

$\{C\} = (D_1) \cap (D_3)$

$C(3,4) \Rightarrow Z_C = 7$

0,5

$Z_{max} = Z_C = 7$

La solt opt est $C(3,4)$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -8x_1 + 10x_2 = 6 \end{cases}$$

On trace la droite Z, on fait un balayage le dernier sommet atteint est la solt opt.

(0,5) ou

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 .$$

2) Soit $(P'1)$ c'est $(P1)$ en changeant la fct objectif

$$\tilde{Z}(x) = -4x_1 + 5x_2 .$$

Les contraintes ne changent pas donc l'ensemble ~~Polyedre~~ des solutions réalisable est le Triangle (ABC)

(0,5)

La solt opt devient.

$$A(0,-5) \Rightarrow \tilde{Z}_A = -25$$

$$B(-2,0) \Rightarrow \tilde{Z}_B = 8 .$$

$$C(3,4) \Rightarrow \tilde{Z}_C = -12 + 20 = 8 .$$

~~1,5~~

$Z_{max} = 8$ $\exists$ 2 sommets qui sont solution opt donc le segment $[C,B]$ est solution optimale (Infinité de solt optimales)

(0,1)

<u>ou bien</u>

On trace la nouvelle droite de la fct obj et on fait le balayage.

$$-4x_1 + 5x_2 = 0 \quad \{ \quad x_2 = \frac{4}{5} x_1$$

On peut remarque que la droite $\tilde{Z}$ // (BC) donc l'ens des solt opt est $[BC]$ $Z_{max} = 8$.

3)

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	$-5/2$	1	$1/2$	0	0
x_1	1	$1/2$	0	$-1/2$	0	1
x_5	0	2	0	-1	1	4
Z_{max}	0	$1/2$	0	$1/2$	0	-1
x_3	5	0	1	-2	0	$5/2$
x_2	2	1	0	-1	0	2
x_5	-4	0	0	$\boxed{1}$	1	0
Z_{max}	-1	0	0	1	0	-2
x_3	-3	0	1	0	2	$5/2$
x_2	-2	1	0	0	1	2
x_4	-4	0	0	1	1	0
Z_{max}	3	0	0	0	-1	-2

$\exists\, c_j > 0$ ($c_2 \geq 0$) donc x_2 entre en base.
$\min(b_i/a_{ij}) = 2$
$\min(1/\tfrac{1}{2}) = 2$
$\Rightarrow x_1$ sort de la base.

1,5

$\exists\, c_j > 0$
$c_4 = 1$ donc x_4 entre en base
x_5 sort de la base

$\exists\, C_j \geq 0$ [$C_1 = 3 > 0$] / $\forall\, a_{i1} \leq 0$
donc l'algo du simplexe s'arrête
l'ensemble des solt réalisable est un polyèdre non borné ($D = +\infty$)

01

ou

$Z_{max} \longrightarrow +\infty$.

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
x_3	0	$-5/2$	1	$1/2$	0	0
x_1	1	$1/2$	0	$-1/2$	0	1
x_5	0	2	0	-1	1	4
Z_{max}	0	$1/2$	0	$1/2$	0	-1
x_4	0	-5	2	1	0	0
x_1	1	-2	1	0	0	1
x_5	0	-3	2	0	1	4
Z_{max}	0	3	-1	0	0	-1

1,5

Ex 3 (5pts)

Soit le (PL) suivant

$$\begin{cases} \text{Max } Z = x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1..5 \end{cases}$$

1) La valeur 0 dans la dernière colonne du Tableau signifie que la solt de base est réalisable dégénérée 1

2) La solt du ~~Tabl~~ Problème est donnée au niveau ~~de~~ de la Colonne B (X_B) du Tableau.
Les variables de base sont celles du niveau de la colonne Base
et le reste sont des VHB qui ont une valeur Nulle

La solt est :

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_5 &= 4 \end{aligned}\right\} \text{Var de Base}$$ 1

$x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow$ Var Hors Base.

3) Non, la solution n'est pas optimale car ∃ encore des $C_j \geq 0$ dans la dernière ligne du Tableau.

0,5

Exo 04 (07 pts)

Soit le programme linéaire (P_3) suivant

$$(P_3)\begin{cases} \max Z(x) = 9x_1 - 12x_2 + 10x_3 + 7x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 10 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 16 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

1°/ pour montrer que la fonction objectif ne dépasse pas une certai valeur λ, il faut trouver l'équation de la fonction objectif en utilisant les contraintes. (0,25)

on remarque que:

$3 \times (\text{"eq 1"}) + 2(\text{"eq 2"}) = Z(x)$ (0,25)

$$\begin{cases} 3(x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4) \leq 3 \cdot 10 \text{ --- } ① \\ 2(3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4) \leq 2 \cdot 16 \text{ --- } ② \end{cases}$$

$① + ② \Rightarrow 9x_1 - 12x_2 + 10x_3 + 7x_4 \leq 62$

$\Rightarrow Z(x) \leq 62,\ \forall x \in S$

$\Rightarrow \max Z(x) \leq 62$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = 62}$ (0,5)

Ainsi, la valeur de la fct objectif ~~ne~~ peut dépasser $\lambda = 62$

2°/ Résolution de (P_3) par la méthode du simplexe

Il faut mettre le programme sous forme standard. pour cela, on doit avoir $x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$. or on remarque que $x_2 < 0$ et donc on doit faire un changement de variable $x_2' = -x_2$.

Ainsi, en ajoutant des variables d'ecart et en faisant le changement de variable $x_2' = -x_2$, on obtient la forme standard donnée comme : (0,25)

$$(PLS)\begin{cases} \max \bar{Z}(x) = 9x_1 + 12x_2' + 10x_3 + 7x_4 \\ x_1 + 2x_2' + 2x_3 + x_4 + e_1 = 10 \\ 3x_1 + 3x_2' + 2x_3 + 2x_4 + e_2 = 16 \\ x_1, x_2', x_3, x_4, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$ (01)

on prend comme solution réalisable de base de départ

$$x = (\underbrace{x_1, x_2', x_3, x_4}_{VHB}, \underbrace{e_1, e_2}_{VB}) = (0, 0, 0, 0, 10, 16)$$

Ainsi, on applique l'algorithme du simplexe et 1er tableau est donnée comme suit.

-3/2

—	—	C	9	12	10	7	0	0	—
base	C_B	X_B	x_1	x_2'	x_3	x_4	e_1	e_2	θ_i
e_1	0	10	1	$\boxed{2}$	2	1	1	0	5 ⟹ $x_s = e_1$
e_2	0	16	3	3	2	2	0	1	16/3
$\bar{Z} = 0$		Z_j	0	0	0	0	0	0	
		Δ_j	9	12	10	7	0	0	

0,25

$x_r = x_2'$

—	—	C	9	12	10	7	0	0	—
base	C_B	X_B	x_1	x_2'	x_3	x_4	e_1	e_2	θ_i
x_2'	12	5	1/2	1	1	1/2	1/2	0	10
e_2	0	1	$\boxed{3/2}$	0	-1	1/2	-3/2	1	2/3 ⟹ $x_s = e_2$
$\bar{Z} = 60$		Z_j	6	12	12	6	6	0	
		Δ_j	3	0	-2	1	-6	0	

0,5

$x_r = x_1$

—	—	C	9	12	$\boxed{10}$	$\boxed{7}$	0	0	—
base	C_B	X_B	x_1	x_2'	$\boxed{x_3}$	$\boxed{x_4}$	e_1	e_2	θ_i
x_2'	12	14/3	0	1	$\boxed{14/3}$	1/3	1	-1/3	~~7/2~~ ⟹ $x_s = x_2'$
x_1	9	2/3	1	0	-2/3	1/3	-1	2/3	/
$\bar{Z} = 62$		Z_j	9	12	10	7	3	6/3 = 2	
		Δ_j	0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	-3	-6/3 = -2	

$x_r = x_3$

0,5

Tous les $\Delta_j \leq 0$ ⟹ la solution obtenue $x = (2/3, 14/3, 0, 0, 0, 0)$ est optimale pour le pb (PLS) avec $\bar{Z}^* = 62$

⟹ $x^* = (2/3, 14/3, 0, 0)$ est solution optimale du pb de départ (P) avec $Z^* = 62$

0,5

On remarque qu'il existe des V.H.B x_3 et x_4 pour lesquelles il correspond des $\Delta_j = 0$. D'où le problème peut avoir une infinité de solutions. ~~Pour trouver l'autre (ou les autres) points extrêmes~~ Il peut y avoir deux autres pts extrêmes ~~optimaux~~. Pour trouver le 2e pt extrême optimal, on fait rentrer x_3 dans la base et on continue l'algo du simplexe.

—	—	C	9	12	10	7	0	0	—
base	C_B	X_B	x_1	x_2'	x_3	x_4	e_1	e_2	θ_i
x_3	10	7/2	0	3/4	1	1/4	3/4	-1/4	14
x_1	9	3	1	1/2	0	$\boxed{1/2}$	-1/2	1/2	6 ⟹ $x_s = x_1$
$Z = 62$		Z_j	9	12	10	7	3	2	
		Δ_j	0	0	0	$\boxed{0}$	-3	-2	

0,5

$x_r = x_4$

Tous les $\Delta_j \leq 0$ ⟹ le 2e pt extrême optimal est $x^{**} = (3, 0, 7/2, 0)$ avec $Z(x^{**}) = Z^* = 62$.

~~On remarque qu'il existe encore~~

Pour trouver le 3e pt extrême optimal, on fait rentrer la VHB x_4 dans la base et on continue l'algo du simplexe.

/	/	c	9	12	10	7	0	0	/
base	c_B	X_B	x_1	x_2'	x_3	x_4	e_1	e_2	θ_i
x_3	10	2	$-1/2$	$\boxed{1/2}$	1	0	1	$-1/2$	4 $\Rightarrow x_s = x_3$
x_4	7	6	2	1	0	1	-1	1	6
$Z=62$	z_j		9	12	10	7	3	2	
	Δ_j		0	0	0	0	-3	-2	

$x_e = x_2'$

0,25

Tous les $\Delta_j \leq 0 \Rightarrow$ 3^e pt extrême optimal est $x^{***} = (0, 0, 10, 7, 0, 0)$
avec $Z(x^{***}) = Z^* = 62$.

0,5

On remarque encore qu'il existe une VHB x_2' qui a un $\Delta_j = 0$ d'où il peut avoir un 4^e pt extrême optimal ; pour le trouver on fait rentrer x_2' dans la base et on continue l'algo du simplexe.

0,25

/	/	c	9	12	10	7	0	0	/
base	c_B	X_B	x_1	x_2'	x_3	x_4	e_1	e_2	θ_i
x_2'	12	4	-1	1	2	0	2	-1	
x_4	7	2	3	0	-2	1	-3	2	
$Z=62$	z_j		9	12	10	7	3	2	
	Δ_j		0	0	0	0	-3	-2	

0,25

Tous les $\Delta_j \leq 0 \Rightarrow$ 4^e pt extrême optimal est $x^{****} = (0, 4, 0, 2)$
avec $Z(x^{****}) = Z^* = 62$.

On a obtenu 4 pts extrêmes optimaux, et donc toute combinaison convexe de ces pts est une solution optimale.
i.e tout $x = \lambda_1 x^* + \lambda_2 x^{**} + \lambda_3 x^{***} + \lambda_4 x^{****}$, avec $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1$, est une solution opt du pb (P_3) avec
$Z(x^*) = Z(x^{**}) = Z(x^{***}) = Z(x^{****}) = 62$
d'où le pb (P_3) admet une infinité de solutions.

0,25