Corrigé De L'Exercice1. Le domaine de définition de la fonction f:

Dans la recherche du domaine de définition on tient compte seulement de ces trois opérations : La division $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$, La racine carrée $(\sqrt{\cdot})$ et Logarithme $(\ln \cdot)$. Si ces trois opérations n'interviennent pas dans l'expression de f, alors le domaine de définition de la fonction f : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

■ $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{x-2}}$. On a affaire à la division. On procède comme suit: on a $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$. Donc, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

■ $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}}$. On a affaire à $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ et $(\sqrt{\cdot})$. On procède comme suit:

Pour $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$: on a $\sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$. Donc la division $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ est définie si $x \neq 4$. Et,

Pour $(\sqrt{\cdot})$: on a $\sqrt{x}$ est définie si et seulement si $x \geq 0$.

En combinant ces deux conditions, on obtient : $\mathcal{D}_f = [0,4[\cup]4, +\infty[$.

■ $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x} e^{-x^2}}$. On a affaire seulement à $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ qui est définie si $x \neq 0$.

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

■ $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$. On a affaire à $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ et $(\ln \cdot)$. On procède comme suit:

Pour $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$: on a $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$. Donc la division $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ est définie si $x \neq 1$. Et,

Pour $(\ln \cdot)$: on a $\ln x$ est définie si et seulement si $x > 0$.

En combinant ces deux conditions, on obtient : $\mathcal{D}_f =]0,1[\cup]1, +\infty[$.

Corrigé De L'Exercice2. On a les fonctions f, g et h telles que :

$$■ f(x) = x^2 + 2 \quad ■ g(x) = \frac{2x}{x+1} \quad ■ h(x) = \sqrt{x}$$

Détermination des fonctions : $f + g$; $g.h$; $\frac{f}{h}$; $h \circ g$; $g \circ h$ et leurs domaines de définitions.

■ $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2 + \frac{2x}{x+1} = \frac{x^3+x^2+4x+2}{x+1}$. ■$\mathcal{D}_{f+g} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

■ $(g.h)(x) = g(x)\, h(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{x+1}$. ■$\mathcal{D}_{gh} = [0, +\infty[$.

■ $\frac{f}{h}(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^2+2}{\sqrt{x}}$. ■$\mathcal{D}_{f/h} =]0, +\infty[$.

■ $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\frac{2x}{x+1}}$. Ici pour déterminer le domaine de définition on doit faire l'étude du signe de $u(x) = \frac{2x}{x+1}$. On suit les étapes suivantes :

- On cherche les points tels que $u(x)$ n'es pas définie qui sont : $x+1=0 \Longrightarrow x=-1$.
- On cherche les points tels que $u(x)=0$ qui sont : $\frac{2x}{x+1}=0 \Longrightarrow 2x=0 \Longrightarrow x=0$.
- On fait le tableau suivant tout en tenant compte du principe que le signe de $u(x)$ dépend de la position de x par rapport aux points trouvés aux étapes 1 et 2, c.-à-d. : -1 et 0.

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
signe de $u(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

Du tableau, on déduit : ■$\mathcal{D}_{h\circ g}=]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[$.

■ $(g\circ h)(x)=g\big(h(x)\big)=\frac{2h(x)}{h(x)+1}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$. ■$\mathcal{D}_{g\circ h}=[0,+\infty[$.

Corrigé De L'Exercice3. Calcul de la dérivée f' dans les cas suivants :

■$f(x)=3x^5 \Longrightarrow f'(x)=15x^4$.

■ $f(x)=\frac{x^4}{4}-x \Longrightarrow f'(x)=x^3-1$.

■ $f(x)=\frac{2x}{x+1} \Longrightarrow f'(x)=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$.

■ $f(x)=\frac{1}{x}\,e^{-x^2} \Leftrightarrow f(x)=\frac{e^{-x^2}}{x} \Longrightarrow f'(x)=\frac{\left(-2xe^{-x^2}\right)x-e^{-x^2}}{x}=\frac{-2x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}}{x^2}=\frac{-2x^2-1}{x^2}\,e^{-x^2}$.

■ $f(x)=\frac{x^2}{\ln x} \Longrightarrow f'(x)=\frac{2x\ln x-\frac{x^2}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}$.

L'équation de la tangente.

On sait que l'équation de la tangente au point x_0 est donnée par :

$$y=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$$

Donc la tangente au point 0 est : $y=(x-0)f'(0)+f(0)=xf'(0)+f(0)$, avec :

$f(x)=\frac{x^4}{4}-x \;\Longrightarrow\; f(0)=0$

$f'(x)=x^3-1 \Longrightarrow f'(0)=-1$

D'où l'équation est : $y=-x$.

Corrigé De L'Exercice4. On a la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x}{x+1}$$

1. La monotonie de f.

On sait que la monotonie de f dépend du signe de sa dérivée. Et on a $f'(x)=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$.

Il est facile de remarquer que $f'(x)>0$, pour tout $x\in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$. Donc la fonction f est croissante sur les intervalles $]-\infty,-1[,]-1,+\infty[$. Et l'image de f :

$$\mathcal{I}mf=f\big(\mathcal{D}_f\big)=f(]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[)=f(]-\infty,-1[)\cup f(]-1,+\infty[)$$

De plus :
$f(]-\infty,-1[) =]a,b[$ et $f(]-1,+\infty[) =]c,d[$.
Comme f est croissante, on a :
$a = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2, b = \lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty.$

$c = \lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty\,, d = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2\,.$

Et par conséquent :

$$\mathcal{I}mf =]2,+\infty[\cup]-\infty,2[=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$$

2. **Vérification.**

Comme f est bijective sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ car elle est définie et croissante, alors f admet une unique fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$.

De plus f^{-1} vérifie pour tout $x \in]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$:

$$(f\circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x$$

Donc pour vérifier si $f^{-1}(x) = \frac{x}{2-x}$, il suffit de calculer $f\big(f^{-1}(x)\big)$. On a :

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = \frac{2f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)+1} = \frac{2\frac{x}{2-x}}{\frac{x}{2-x}+1} = \frac{\frac{2x}{2-x}}{\frac{x+2-x}{2-x}} = \frac{\frac{2x}{2-x}}{\frac{2}{2-x}} = \frac{2x}{2-x}\frac{2-x}{2} = \frac{2x(2-x)}{2(2-x)} = x.$$

Et ceci signifie f^{-1} est la fonction réciproque de f.

3. **Les Asymptotes.** D'après ce qui précède, on a :

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2 \Longrightarrow y = 2$ est l'asymptote horizontale.

$\lim_{x\to-1} f(x) = \infty \Longrightarrow x = -1$ est l'asymptote verticale.

Corrigé De L'Exercice5. On a la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$$

1. **Calcul de la première dérivée et l'étude de son signe.**

- **La première dérivée.**

$f'(x) = \frac{2x(x^3) - 3x^2(x^2-1)}{(x^3)^2} = \frac{2x^4 - 3x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{-x^4+3x^2}{x^6} = \frac{x^2(3-x^2)}{x^6} = \frac{3-x^2}{x^4}.$

➢ **Le signe de f'.** On suit les étapes suivantes :

- On cherche les points critiques de f à savoir : $x \in \mathbb{R}^*$ tels que $f'(x) = 0$. Ainsi, on a :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 - x^2}{x^4} = 0 \Rightarrow 3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

- Le signe de la première dérivée f'dépend de la position de x par rapport aux points critiques et aux bornes du domaine de définition. Et on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

2. **La déduction.**

Du tableau, on déduit que f est décroissante sur les intervalles $]-\infty, -\sqrt{3}]$, $[\sqrt{3}, +\infty[$ et croissante sur les intervalles $[-\sqrt{3}, 0[$, $]0, \sqrt{3}]$.

De plus f admet deux extremums :

- Un minimum au point $-\sqrt{3}$, sa valeur $f(-\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$.
- Un maximum au point $\sqrt{3}$, sa valeur $f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

3. **Calcul de la deuxième dérivée et l'étude de son signe.**

➢ **La deuxième dérivée.**

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \frac{-2x(x^4) - 4x^3(3 - x^2)}{(x^4)^2} = \frac{-2x^5 - 12x^3 + 4x^5}{x^8} = \frac{2x^5 - 12x^3}{x^8} = \frac{2(x^2 - 6)}{x^5}.$$

➢ **Le signe de f''.** On a :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 6)}{x^5} = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}.$$

Donc, le signe de la deuxième dérivée f'' dépend de la position de x par rapport aux points $\pm\sqrt{6}$ et aux bornes du domaine de définition. Et on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$		$+\infty$
signe de f''		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

4. **La déduction.**

Du tableau, on déduit que f est convexe aux intervalles $[-\sqrt{6}, 0[$, $[\sqrt{6}, +\infty[$ et concave aux intervalles $]-\infty, -\sqrt{6}]$, $]0, \sqrt{6}]$.

De plus, f admet deux points d'inflexion :

- $\left(-\sqrt{6}, f(-\sqrt{6})\right) = \left(-\sqrt{6}, -\frac{5\sqrt{6}}{36}\right), \left(\sqrt{6}, f(\sqrt{6})\right) = \left(\sqrt{6}, \frac{5\sqrt{6}}{36}\right).$

Corrigé De L'Exercice6. Calcul de l'intégral :

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} (4x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = [x^4 - x^3 + x^2]_{-1}^{1} = [1^4 - 1^3 + 1^2] - [(-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2] = 1 - 3 = -2.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{2} \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{2}[\ln t]_1^2 = \frac{1}{2}[\ln 2 - \ln 1] = \frac{1}{2}\ln 2.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} 2xe^{-x^2}\, dx = -\int_{0}^{-1} e^t dt = -[e^{-1} - e^0] = -\left[\frac{1}{e} - 1\right] = -\left[\frac{1 - e}{e}\right] = \frac{e - 1}{e}.$