Introduction

En analyse numérique, et pour un problème posé (P), on étudie toutes les méthodes de résolution de (P), au moyen du calcul arithmétique. L'étude peut englober aussi bien les conditions d'existence et d'unicité de la solution du problème (P), et aussi les performances et l'efficacité du procédé choisi (précision, convergence, stabilité, rapidité,...).

Ordinateur et analyse numérique

Les calculatrices et les ordinateurs nous permettent de faire beaucoup d'opérations et ce très rapidement. Mais pour que les machines soient capables de faire ces calculs, il faut les programmer. C'est l'objet essentiel de l'analyse numérique qui s'est développée avec l'apparition des ordinateurs. Les caractéristiques des ordinateurs (fidélité, rapidité, précision,... ect) ont permis d'améliorer plusieurs méthodes numérique connues, et ont facilité la création d'algorithmes relatifs à des problèmes difficilement maîtrisés par l'homme jusque-là.

Mais faire beaucoup d'opérations ne veut pas dire faire n'importe quoi : les méthodes ont un **coût** (nombre d'opérations arithmétiques élémentaires), lié d'une part au temps de calcul, et d'autre part à la capacité de mémoire nécessaire pour stocker les données et les résultats. D'où l'étude de la complexité (efficacité) d'un algorithme.

Complexité d'un algorithme

Soit (P) un problème à N variables. On dit d'un algorithme, relatif à une méthode de résolution de (P), qu'il est de complexité exponentielle si le coût $f(N)$ nécessaire à sa résolution croit comme : $N!,\ N^N,\ \alpha^N($ où $\alpha > 1), \ldots etc.$ On écrit simplement :

$$f(N) = O(N!),\ f(N) = O(N^N),\ f(N) = O(\alpha^N), \ldots etc.$$

D'autre part, un algorithme est de complexité polynômiale si

$$f(N) = O(N),\ f(N) = O(N^2),\ f(N) = O(N^\beta)\ \beta > 0, \ldots etc.$$

L'intérêt, en analyse numérique, est -entre autres objectifs- de mettre au point des algorithmes de complexité polynômiale.

En général, afin de choisir le meilleur algorithme possible, il faut choisir l'algorithme :

1. le moins coûteux possible en place mémoire,
2. le moins coûteux possible en temps de calcul : c'est à dire celui qui a de complexité polynômiale.
3. le plus stable possible : c'est à dire le moins sensible aux erreurs d'arrondi,
4. le plus précis possible : c'est à dire celui qui permet d'estimer l'erreur.

Ce cours est dispensé depuis 2009 aux étudiants de $2^{ème}$ année licence mathématiques de l'université Abderrahmane Mira de Béjaia. Il a pour objectif de présenter aux étudiants une variété d'outils numériques (algorithmes) permettant la résolution effective d'un certain nombre de problèmes. Les chapitres de ce cours sont illustrés par des exemples d'applications, et une série d'exercices est proposée à la fin de chacun d'entre eux. La plupart de ces exercices étaient proposés lors des séances de travaux dirigés ou des épreuves de moyenne durée.

Ce cours se compose de neuf chapitres. Il est divisé en deux parties couvrant le programme des modules d'analyse numérique I et analyse numérique II destinés aux étudiants de $2^{ème}$ année licence mathématiques. Particulièrement, ce cours traite les sujets suivants :

- Notions sur les erreurs,
- Interpolation et approximation polynomiale,
- Intégration et dérivation numériques,
- Résolution des systèmes linéaires,
- Résolution des équations non linéaires,
- Calcul des valeurs et vecteurs propres,
- Résolution des équations différentielles ordinaires.

Enfin merci de me communiquer toute erreur éventuelle dans le fond ou dans la forme de ce premier essai.

Bibliographie

1. Cours de licence de Mathématiques d'Analyse Numérique de N. Akroune (Université Abderrahmane Mira, Béjaia).
2. Cours de licence de Mathématiques d'Analyse Numérique de S. Salmon (Université Louis Pasteur, Strasbourg).
3. Cours d'Analyse Numérique de P. Goatin (Université du Sud Toulon-Var, France).
4. Analyse numérique pour ingénieurs (Deuxième édition). Auteur : André Fortin, Editeur : Presses internationales Polytechnique.
5. Introduction aux méthodes numériques (Deuxième édition). Auteur : Franck Jedrzejewski, Editeur : Springer-Verlag France, Paris 2005.

Première partie

Analyse numérique I

Chapitre 1

Notions sur les erreurs

1.1 Introduction

En général, la résolution des problèmes scientifiques passe par une représentation mathématique des phénomènes mis en jeu. Ces phénomènes sont en général compliqués et multiples. Pour les représenter, on est amené à négliger certains paramètres et à simplifier d'autres. Même avec ces simplifications, les équations obtenues sont souvent insolubles par les méthodes analytiques connues. Par exemple, on ne sait pas trouver analytiquement, la solution des équations $x^5 + 3x^4 + 7x + 8 = 0,\ x = e^{-x},\ \sin x + e^x = 0, ...etc.$

C'est ici que l'analyse numérique se distingue des autres champs plus classiques des mathématiques. En effet, pour un problème donné, il est possible d'utiliser différents algorithmes de résolution. Ces algorithmes dépendent de certains paramètres qui influent sur la précision du résultat. De plus, on utilise en cours de calcul des approximations plus ou moins précises. Par exemple, on peut remplacer une dérivée par une différence finie de façon à transformer une équation différentielle en une équation algébrique. Le résultat final et son degré de précision dépendent des choix que l'on fait.

Une partie importante de l'analyse numérique consiste donc à contenir les effets des erreurs ainsi introduites, qui proviennent de trois sources principales :

- les erreurs de modélisation ;
- les erreurs de représentation sur ordinateur ;
- les erreurs de troncature.

Ce chapitre traite principalement des erreurs numériques. La première source d'erreurs dans les calculs faits par un ordinateur provient d'abord des erreurs d'arrondi sur les données, puis des opérations effectuées sur les donnés. Il devrait donc permettre au lecteur de mieux gérer les erreurs au sein des processus numériques afin d'être en mesure de mieux interpréter les résultats.

1.2 Erreurs absolue et relative

$$\text{Nombres exacts} \begin{cases} \text{dans } \mathbb{N} : 1, 3, 9; \\ \text{dans } \mathbb{Q} : \frac{2}{3}, \frac{1}{7}, \frac{10}{3}; \\ \text{dans } \mathbb{R} : \sqrt{5}, \pi, e. \end{cases}$$

Soit x un nombre exact et x^* une valeur approchée de x, on écrit

$$x \simeq x^* \quad \text{ou} \quad x \approx x^*.$$

• Si $x^* > x,\ x^*$ est dite valeur approchée par excès.
• Si $x^* < x,\ x^*$ est dite valeur approchée par défaut.

Exemples : $\frac{2}{3} \simeq 0,6666$, $\pi \simeq 3,14$, $\sqrt{5} \simeq 2,23$, sont des approximations par défaut mais $e \simeq 2,72$ est une approximation par excès.

1.2.1 Erreur absolue

Définition 1.1. *On appelle erreur absolue du nombre approché x^* de x la quantité réelle positive, notée $\Delta(x)$, définie par*

$$\Delta(x) = |x - x^*|.$$

Commentaire : Plus l'erreur absolue est petite, plus x^* est précis.

Exemple 1.1. *Pour la valeur exacte $x = \frac{2}{3}$, la valeur approchée $x_1^* = 0.666667$ est 1000 fois plus précise que la valeur approchée $x_2^* = 0.667$. En effet, nous avons :*

$$\begin{array}{rcl} \Delta_1(x) & = & |x - x_1^*| = |\frac{2}{3} - 0.666667| = |\frac{2}{3} - \frac{666667}{10^6}| = \frac{1}{3}10^{-6}, \\ \Delta_2(x) & = & |x - x_2^*| = |\frac{2}{3} - 0.667| = |\frac{2}{3} - \frac{667}{10^3}| = \frac{1}{3}10^{-3}. \end{array}$$

1.2.2 Erreur relative

Définition 1.2. *On appelle erreur relative du nombre approché x^* de x la quantité réelle positive, notée $r(x)$, définie par*

$$r(x) = \frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{\Delta(x)}{|x|}$$

Commentaire : l'erreur relative est souvent exprimée en pourcentage (précision relative) par :

$$r\% = r(x) \times 100$$

Exemple 1.2. *Pour les valeurs exactes $x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{1}{15}$ on considère les valeurs approchées $x^* = 0.67$ et $y^* = 0.07$, respectivement. Les erreurs absolues correspondantes sont :*

$$\begin{array}{rcl} \Delta(x) & = & |x - x^*| = |\frac{2}{3} - 0.67| = |\frac{200-201}{3.10^2}| = \frac{1}{3}10^{-2}, \\ \Delta(y) & = & |y - y^*| = |\frac{1}{5} - 0.07| = |\frac{100-105}{15.10^2}| = \frac{1}{3}10^{-2}. \end{array}$$

Les erreurs relatives correspondantes sont :

$$\begin{array}{rcl} r(x) & = & \frac{|x-x^*|}{|x|} = \frac{\Delta(x)}{|x|} = 0.5 \times 10^{-2} = 0.5\%, \\ r(y) & = & \frac{|y-y^*|}{|y|} = \frac{\Delta(y)}{|y|} = 5 \times 10^{-2} = 5\%. \end{array}$$

Ainsi, bien que les erreurs absolues soient égales, x^* est une approximation 10 fois plus précise pour x que y^* l'est pour y.

1.2.3 Majorants des erreurs absolue et relative

Si la valeur exacte est connue on peut déterminer les erreurs absolue et relative. Mais dans la majorité des cas, elle ne l'est pas. Les erreurs absolue et relative deviennent alors inconnues, et pour les estimer on introduit la notion de majorant de l'erreur absolue et de l'erreur relative.

Définition 1.3. *On appelle majorant de l'erreur absolue d'une valeur approchée x^* de x tout nombre réel positif noté Δx vérifiant :*

$$\Delta(x) = |x - x^*| \leqslant \Delta x$$

ou de manière équivalente : $x^* - \Delta x \leqslant x \leqslant x^* + \Delta x$, et on écrit :

$$x = x^* \pm \Delta x \quad \textit{qui veut dire :} \; x \in [x^* - \Delta x, x^* + \Delta x]$$

Remarque 1.1. 1. *Plus Δx est petit, plus l'approximation x^* est précise. D'où, en pratique, on prend le plus petit Δx possible.*

2. *Comme $x \simeq x^*$, en pratique on prend $r_x \simeq \dfrac{\Delta x}{|x^*|}$ qui est un majorant de l'erreur relative de x^* et on écrit $x = x^* \pm |x^*|\, r_x$.*
3. *A défaut de l'erreur absolue (l'erreur relative) effective, Δx (r_x) est appelé par abus de langage, erreur absolue (erreur relative) de x^*.*

1.3 Représentation décimale des nombres approchés

On sait que tout nombre réel positif x peut être représenté sous la forme d'une représentation décimale de développement limité ou illimité :

$$x = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + ... + a_{m-n+1}10^{m-n+1} + ...$$

avec $a_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ pour $i \neq m$ et $a_m \neq 0$ où m est le rang supérieur de x (la plus grande puissance de 10).

Exemple 1.3. $5406,3080 = 5.10^3 + 4.10^2 + 0.10^1 + 6.10^0 + 3.10^{-1} + 0.10^{-2} + 8.10^{-3} + 0.10^{-4}$
$\pi = 3.14159265358... = 3.10^0 + 1.10^{-1} + 4.10^{-2} + 1.10^{-3} + 5.10^{-4} + ... + 5.10^{-10} + 8.10^{-11} + ...$
$\frac{68}{3} = 2.10^1 + 2.10^0 + 6.10^{-1} + 6.10^{-2} + 6.10^{-3} + 6.10^{-4} + ...$

Remarque 1.2. *Dans la pratique, les nombres utilisés x ont des représentations décimales limitées (car, en général, ce sont des nombres approchés).*

i. *Tous les chiffres conservés a_i s'appellent chiffres significatifs du nombre approché x.*

ii. *Certains des a_i peuvent être nuls.*

1.3.1 Chiffre significatif (c.s)

Définition 1.4. *On appelle chiffre significatif d'un nombre approché, tout chiffre dans sa représentation décimale différent de zéro ; et un zéro s'il se trouve entre deux chiffres significatifs, ou s'il constitue un chiffre conservé.*

Exemple 1.4. *Une approximation à 6 décimales de* 0.00301045 *est :*

$$\underbrace{0.00}_{(1)}3\underbrace{0}_{(2)}1\underbrace{0}_{(3)}$$

$$\left\{\begin{array}{c} (1) : \textit{Ne sont pas significatifs car ils ne servent qu'à indiquer les rangs des autres chiffres.} \\ (2) : \textit{Etant placé entre les chiffres significatifs } 1 \textit{et } 3, \textit{ zéro est lui même un chiffre significatif.} \\ (3) : \textit{Ce zéro traduit le fait que le nombre approché a conservé la décimale } 10^{-6} \\ \textit{est un chiffre significatif.} \end{array}\right.$$

Exemple 1.5. *Les valeurs approchées $x^* = 0.0301009$, 400357 ont 6 chiffres significatifs (6 c.s.).*

Remarque 1.3. 1. *On ne peut pas connaître le nombre de chiffres significatifs de $x = 45800$ donné sous cette forme. Pour savoir, il faut soit sa représentation décimale, ou encore -d'une façon équivalente- connaître l'écriture sous la forme $(p, q) \times 10^s$. En effet ;*
$x = x_1 = 4,58 \times 10^4$ (x_1 a 3 c.s.) ou encore $x = x_2 = 4,5800 \times 10^4$ (x_2 a 5 c.s.).

2. *Sur un ordinateur, les nombres sont représentés en virgule flottante comme suit :*
   soit x un réel non nul, en virgule flottante x s'écrit sous la forme :

$$x = \pm 0.a_1 ... a_N . b^E,$$

avec $b \in \mathbb{N}$ est la base, $a = 0.a_1...a_N$ que l'on appelle la mantisse, $0 \leq a_i < b, a_1 \neq 0, E \in \mathbb{Z}$, l'exposant compris entre deux entiers m et $M(-m \leq E \leq M)$ et $N \in \mathbb{N}$ le nombre de chiffres significatifs.

1.3.2 Chiffre significatif exact (c.s.e)

Soit x un nombre exact, x^* une valeur approchée de x dont sa représentation décimale (prise de gauche à droite) est :

$$x^* = \underbrace{a_m}_{1^{er} c.s} 10^m + \underbrace{a_{m-1}}_{2^{eme} c.s} 10^{m-1} + ... + \underbrace{a_{m-n+1}}_{n^{eme} c.s} 10^{m-n+1} + a_{m-n} \underbrace{10^{m-n}}_{rang\, du (n+1)^{eme} c.s} ... + a_k 10^k, \; a_m \neq 0, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Définition 1.5. *(importante) On dit que les n premiers chiffres significatifs d'un nombre x^* sont exacts si l'erreur absolue de ce nombre ne dépasse pas la moitié du rang du $n^{ème}$ chiffre significatif. c'est à dire*

$$\Delta x \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}.$$

Proposition 1.1. *Si un nombre approché possède n c.s. exacts alors :*

$$r_x \leq 5.10^{-n}.$$

Exercice 1.1. *Donner une borne supérieure de l'erreur absolue et estimer l'erreur relative, si tous les chiffres significatifs des nombres approchés suivants sont exacts.*

$$x_1 = 0,0019, \; x_2 = 99,200, \; x_3 = -34508, \; x_4 = 0,000805.$$

Propriétés

a. Si un chiffre significatif est exact, tous les chiffres à sa gauche sont exacts.

b. Si un chiffre n'est pas exact, tous ceux à sa droite ne les sont pas.

Exemple 1.6. *Soit $x = 35.97$ et $x^* = 36.00$, ici $m = 1$ car $x^* = 3.10^1 + 6.10^0 + 0.10^{-1} + 0.10^{-2}$.*

$$\Delta x = |x - x^*| = 0,03 = 0,3.10^{-1} < 0,5.10^{-1}.$$

Alors $\begin{cases} m - n + 1 = -1 \\ m = 1 \end{cases} \implies n = 3$. *Donc, x^* est une approximation de x avec trois chiffres significatifs exacts.*

Remarque 1.4. *La notion de chiffre significatif exact est purement mathématique, elle ne veut pas dire que les n premiers c.s. de x^* coïncident avec les n premiers c.s. de x; l'exemple ci-dessus l'illustre bien.*