Chapitre 1

Résolution des systèmes linéaires

On note $M_N(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre N. Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et $b \in \mathbb{R}^n$, on a comme objectif de résoudre le système linéaire $Ax = b$, c'est à dire de trouver x solution de :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^N \\ Ax = b \end{cases} \tag{P}$$

Comme A est inversible, il existe un unique vecteur $x \in \mathbb{R}^N$ solution de (P). Nous allons étudier dans les deux chapitres suivants des méthodes de calcul de ce vecteur x : la première partie de ce chapitre sera consacrée aux méthodes "directes" et la deuxième aux méthodes "itératives". Nous aborderons ensuite en troisième partie les méthodes de résolution de problèmes aux valeurs propres.

Un des points essentiels dans l'efficacité des méthodes envisagées concerne la taille des systèmes à résoudre. Entre 1980 et 2000, la taille de la mémoire des ordinateurs a augmenté de façon drastique. La taille des systèmes qu'on peut résoudre sur ordinateur a donc également augmenté.

Le développement des méthodes de résolution de systèmes linéaires est liée à l'évolution des machines informatiques. Un grand nombre de recherches sont d'ailleurs en cours pour profiter au mieux de l'architecture des machines (méthodes de décomposition en sous domaines pour profiter des architectures parallèles, par exemple).

Dans la suite de ce chapitre, nous verrons deux types de méthodes pour résoudre les systèmes linéaires : les méthodes directes et les méthodes itératives. Pour faciliter la compréhension de leur étude, nous commençons par quelques rappels d'algèbre linéaire.

1.1 Quelques rappels d'algèbre linéaire

1.1.1 Norme induite

Définition 1.1.1 (Norme matricielle, norme induite) *On note $M_N(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des matrices carrées d'ordre N .*

1. On appelle norme matricielle sur $M_N(\mathbb{R})$ une norme $\|.\|$sur $M_N(\mathbb{R})$ t.q.

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall A, B \in M_N(\mathbb{R})$$

2. On considère $M_N(\mathbb{R})$ muni d'une norme $\|.\|$. On appelle norme matricielle induite (ou norme induite) sur $M_N(\mathbb{R})$ par la norme $\|.\|$, encore notée $\|.\|$, la norme sur $M_N(\mathbb{R})$ définie par :

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|;\ x \in \mathbb{R}^n,\ \ \|x\| = 1\}, \forall A \in M_N(\mathbb{R})$$

Proposition 1 *Soit $M_N(\mathbb{R})$ muni d'une norme induite $\|.\|$. Alors pour toute matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$, on a :*
1. $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n$,
2. $\|A\| = \max\{\|Ax\|;\ \ \|x\| = 1,\ x \in \mathbb{R}^n\}$,
3. $\|A\| = \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|};\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}$
4. $\|.\|$ est une norme matricielle.

Proposition 2 *Soit $A = (a_{i,\ j})_{i,\ j \in \{1,\dots,N\}} \in M_N(\mathbb{R})$*

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_\infty$ et $M_N(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|.\|_\infty$. Alors

$$\|A\|_\infty = \max_{i \in \{1,\dots,N\}} \sum_{j=1}^{N} |a_{i,\ j}|$$

2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_1$ et $M_N(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|.\|_1$. Alors

$$\|A\|_1 = \max_{j \in \{1,\dots,N\}} \sum_{i=1}^{N} |a_{i,\ j}|$$

3. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_2$ et $M_N(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|.\|_2$. Alors

$$\|A\|_2 = \left(\rho\left(A^t A\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.3 Matrices diagonalisables

Définition 1.1.3 (Matrice diagonalisable) *Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n. On dit que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si il existe une base $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (pas forcément distincts) tels que $A\Phi_i = \lambda\Phi_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, et les vecteurs $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ sont les vecteurs propres associés.*

Lemme 1.1.3 *Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n, diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Alors*

$$A = Pdiag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1},$$

où P est la matrice dont les vecteurs colonnes sont égaux aux vecteurs $\Phi_1, \dots, \Phi_n$.

Lemme 1.1.4 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie : $dimE = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, muni d'un produit scalaire i.e. d'une application*

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R}, \\ (x, y) & \to & < x, y >_E \end{array}$$

qui vérifie :

$$\forall x \in E, < x, x >_E \geq 0 \ et < x, x >_E = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$
$$\forall (x, y) \in E^2, < x, y >_E = < y, x >_E,$$
$$\forall y \in E, l'application\ de\ E\ dans\ \mathbb{R}, définie\ par\ x \to < x, y >_E\ est\ linéaire.$$

Ce produit scalaire induit une norme sur E, $\|x\| = \sqrt{< x, x >_E}$.

Soit T une application linéaire de E dans E. On suppose que T est symétrique, c.à.d. que $< T(x), y >_E = < x, T(y) >_E$, $\forall (x, y) \in E^2$. Alors il existe une base orthonormée $(f_1 ... f_n)$ de E (c.à.d. telle que $(f_i, f_j)_E = \delta_{i,j}$) et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $T(f_i) = \lambda_i f_i$ pour tout $i \in \{1...n\}$.

Conséquence immédiate : Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique de $x = (x_1, ..., x_N)^t$ et $y = (y_1, ..., y_N)^t$ est défini par $< x, y >_E = x \cdot y = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ Si $A \in M_N(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, alors l'application T définie de E dans E par : $T(x) = Ax$ est linéaire, et : $< T(x), y > = Ax \cdot y = x \cdot A^t y = x \cdot Ay = < x, T(y) >$. Donc T est linéaire symétrique. Par le lemme précédent, il existe $(f_1, ..., f_N)$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ tels que $Tf_i = Af_i = \lambda_i f_i$ $\forall i \in \{1, ..., N\}$ et $f_i . f_j = \delta_{i,j}$, $\forall (i, j) \in \{1, ..., N\}^2$.

Interprétation algébrique : Il existe une matrice de passage P de $(e_1, ..., e_N)$ base canonique dans $(f_1, ..., f_N)$ dont la première colonne de P est constituée des coordonnées de f_i dans $(e_1, ..., e_N)$. On a : $Pe_i = f_i$. On a alors $P^{-1}APe_i = P^{-1}Af_i = P^{-1}(\lambda_i f_i) = \lambda_i e_i = diag\,(\lambda_1, ..., \lambda_N)\, e_i$, où $diag\,(\lambda_1, ..., \lambda_N)$ désigne la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_N$ On a donc :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_N \end{bmatrix} = D.$$

De plus P est orthogonale, i.e. $P^{-1} = P^t$. En effet,

$$P^t Pe_i \cdot e_j = Pe_i \cdot Pe_j = < f_i, f_j > = \delta_{i,j} \forall i, j \in \{1...N\},$$

et donc $(P^t Pe_i - e_i) \cdot e_j = 0 \ \forall j \in \{1...N\} \ \forall i \in \{1, ...N\}$. On en déduit $P^t Pe_i = e_i$ pour tout $i = 1, ...N$,

i.e. $P^t P = PP^t = Id$.

1.2.1 Méthode de Gauss

Soit $Ax = b$ où A est une matrice $(n \times n)$, non singulière ($\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ non singulière).
Principe :
$\star$ Transformation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieure .
on construit $\left[A \vdots b\right]$ et :
$\left[A \vdots b\right]$ – transformation $\longrightarrow \left[A' \vdots b'\right]$ une matrice triangulaire supérieure $.ie$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{pmatrix}$$

$$\left[A \vdots b\right] \longrightarrow \left[A' \vdots b'\right]$$

$\star$ Puis, on résout le système $A'x = b'$ (dont la solution est exactement la solution du système $Ax = b$)
ETAPES : On pose $A = A^{(1)}$ et $b = b^{(1)}$.
1^{ere} étape :
$\star$ Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$, on fait les affectations suivantes

- La ligne L_1 est maintenue ie : $L_1^{(2)} \longleftarrow L_1^{(1)}$
- pour $i = \overline{2, n}$; $L_i^{(2)} \longleftarrow L_i^{(2)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \cdot L_1^{(1)}$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{(1)} \vdots b^{(1)}\right] \longrightarrow \left[A^{(2)} \vdots b^{(2)}\right]$$

où :

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} \qquad j = \overline{1, n} \\ \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \cdot a_{1j}^{(1)} \quad , \quad i = \overline{2, n} \, , \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_1^{(2)} = b_1^{(1)} \\ \quad b_1^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \cdot b_1^{(1)} \quad , \quad i = \overline{2, n} \end{cases}$$

$\star$ Si $a_{11}^{(1)} = 0$, on cherche une ligne $L_p^{(1)}$ avec $2 \leq p \leq n$ telle que $a_{p1}^{(1)} \neq 0$. Puis on permute les lignes $L_1^{(1)}$et $L_p^{(1)}$ pour obtenir

$Ax = b \iff A^{(1)}x = b^{(1)} \iff P^{(1)}A^{(1)}x = P^{(1)}b^{(1)}$

où $P^{(1)}$ est la matrice de permutation des lignes $L_1^{(1)}$et $L_p^{(1)}$.$P^{(1)}$ est elle meme la matrice identité dans laquelle on permute la premiére ligne et la P^{eme} ligne.

Dans ce cas au lieu de la matrice $A^{(1)}$ on considére la matrice : $\tilde{A}^{(1)} = P^{(1)}A^{(1)}$ dont on notera encore les éléments par $a_{ij}^{(1)}$ et on lui applique des transformations analogues à celles correspondantes au cas $a_{11}^{(1)} \neq 0$,étudié plus haut.

k^{eme} étape :

$\star$ $a_{kk}^{(k)} = 0$: On permute les lignes est une ligne d'indice p avec $k+1 \leq p \leq n$, telle que : $a_{pk}^{(k)} \neq 0$. Et dela

$$A^{(k)}x = b^{(k)} \iff P^{(k)}A^{(k)}x = P^{(k)}b^{(k)}$$

où P^k est la matrice de permutation des lignes $L_k^{(k)}$ et $L_p^{(k)}$. P^k est la matrice identité où on permute la k^{eme} et la P^{eme} ligne.

On considére alors : $\tilde{A}^{(k)} = P^{(k)}A^{(k)}$ et $\tilde{b}^{(k)} = P^{(k)}A^{(k)}$. Aprés transformation on obtient $A^{(k+1)}$ et $b^{(k+1)}$ avec :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}, \;\; i = \overline{1,k};\;\; j = \overline{1,n} \\ \quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)}, \;\; i = \overline{k+1,n}\,;\;\; j = \overline{1,n} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} \quad i = \overline{1,k} \\ \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot b_k^{(k)}, i = \overline{k+1,n} \end{cases}$$

et ceci en faisant les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_1^{(k+1)} \longrightarrow L_1^{(k)} \\ L_2^{(k+1)} \longrightarrow L_2^{(k)} \\ \vdots \\ L_k^{(k+1)} \longrightarrow L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} \longrightarrow L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot L_k^{(k)}, ,i = \overline{k+1,n} \end{cases}$$

Résolution de $A'x = b'$:

On pose

$$\left[A' \vdots b'\right] = \left[A^{(n)} \vdots b^{(n)}\right] = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{11}^{(n)} & \cdots & a_{11}^{(n)} & b_1^{(n)} \\ 0 & a_{11}^{(n)} & \cdots & a_{11}^{(n)} & b_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & a_{11}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Et delà

$$\begin{aligned} Ax = b &\iff A^{(1)}x = b^{(1)} \\ &\iff A^{(2)}x = b^{(2)} \\ &\vdots \\ &\iff A^{(n)}x = b^{(n)} \\ &\iff A'x = b' \end{aligned}$$

d'où (**Résolution par remontée)**

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a'_{11}} \cdot (b'_1 - a'_{1,2}x_2 - \cdots - a'_{1,n}x_n) \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{1}{a'_{n-1,n-1}} \cdot (b'_{n-1} - a'_{n-1,2}x_n) \\ x_n = \frac{1}{a'_{n,n}} \cdot b'_n \end{cases}$$

(On détermine x_n , puis x_{n-1} , etc. jusqu'à obtention de x_1.)

Remarque 1.2.1 *1. La méthode de Gauss nécessite $\frac{2}{3}n^3$ opérations pour un systéme d'ordre n.*

2. Elle permet de calculer det (A) puisque det $(A) = (-1)^j \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}$ où j est le nombre de permulations.

Exemples 1 Soit à résoudre le systéme :

$$(1) \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_2 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Le systéme (1) s'écrit encore : $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad ; b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

<u>1^{ere} étape :</u>
$\star\ a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{(1)} \vdots b^{(1)} \right] \longrightarrow \left[A^{(2)} \vdots b^{(2)} \right]$$

2^{eme} étape :

$\star\ a_{22}^{(2)} = -2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{(2)} \vdots b^{(2)} \right] \longrightarrow \left[A^{(3)} \vdots b^{(3)} \right]$$

Résolution de $A'x = b'$:

Posons $\left[A' \vdots b' \right]$. On a alors :

$$A'x = b' \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ -\,2x_2 + x_3 &= -7 \\ -\,5x_3 &= 12 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \right.$$