Méthode de la décomposition LU

Principe de la méthode

1. *Décomposition de la matrice A de façon à la mettre sous la forme $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure unitaire et U est une matrice triangulaire supérieure.*
2. *Résolution : Le système $AX = b$ devient*

$$AX = b \Longleftrightarrow L\underbrace{UX}_{Y} \Longleftrightarrow \begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$$

donc la résolution du système $AX = b$ revient à la résolution de deux systèmes triangulaires.

Théorème 6.1. *Soit A une matrice telle que les sous matrices principales $A_{[k]} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ de A soient inversibles pour tous $1 \leq k \leq n$, alors il existe une matrice $L = (l_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ triangulaire inférieure telle que $l_{ii} = 1$, $i = \overline{1,n}$ et une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = LU$.*
De plus cette décomposition est unique.

Démonstration. **Existence :** Montrons que tous les pivots d'élimination de Gauss sont non nuls, c'est à dire $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$. On le démontre par récurrence.
Le premier pivot $a_{11}^{(1)}$ est forcément non nul car $a_{11}^{(1)} = \det(A_{[1]}) \neq 0$.
Supposons que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour $1 \leq k \leq r-1$ et montrons que $a_{rr}^{(r)} \neq 0$.
On a $\det(A_{[r]}) = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \ldots a_{r-1,r-1}^{(r-1)} a_{rr}^{(r)}$. Or d'une part, par hypothèse $\det(A_{[r]})$ est différent de zéro et d'autre part, par hypothèse de récurrence $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour $1 \leq k \leq r-1$. Donc $a_{rr}^{(r)}$ est aussi différent de zéro.

Unicité : Soit $A = L_1U_1 = L_2U_2$, d'où $U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2 = D$.
Comme $U_1U_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure et $L_1^{-1}L_2$ est une matrice triangulaire inférieure et D a des 1 sur la diagonale, alors $D = I_n$ ce qui implique que $U_1 = U_2$ et $L_1 = L_2$.
□

Détermination des matrices L et U

a) En utilisant l'algorithme d'élimination de Gauss ordinaire : *Au premier pas d'élimination de Gauss, on trouve*

$$A^{(2)} = E^{(1)}.A^{(1)} \quad \text{où} \quad E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\alpha_{21} & \ddots & & \boldsymbol{0} & \\ -\alpha_{31} & & 1 & & \\ \vdots & \boldsymbol{0} & & \ddots & \\ -\alpha_{n1} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Au deuxième pas, on trouve

$$A^{(3)} = E^{(2)}.A^{(2)} \quad où \quad E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & \boldsymbol{0} & \\ \vdots & -\alpha_{32} & \ddots & & \\ \vdots & -\alpha_{42} & \boldsymbol{0} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & -\alpha_{n2} & & & 1 \end{pmatrix}$$

de la même manière au k-ième pas d'élimination, on obtient

$$A^{(k+1)} = E^{(k)}.A^{(k)} \quad où \quad E^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & \boldsymbol{0} & \\ & & 1 & & \\ & & -\alpha_{k+1,k} & & \\ & \boldsymbol{0} & -\alpha_{k+2,k} & \ddots & \\ & & \vdots & \boldsymbol{0} & \\ & & -\alpha_{nk} & & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} A^{(n)} &= E^{(n-1)}.A^{(n-1)} \\ &= E^{(n-1)}.E^{(n-2)}.A^{(n-2)} \\ &= E^{(n-1)}.E^{(n-2)} \dots E^{(1)}.A. \end{aligned}$$

Posons $U = A^{(n)}$ *et* $L^{-1} = E^{(n-1)}.E^{(n-2)} \cdots E^{(1)}$
alors $U = L^{-1}A$ *d'où* $A = LU$ *où*

$$\begin{aligned} L &= \left(E^{(n-1)}.E^{(n-2)} \dots E^{(2)}.E^{(1)}\right)^{-1} \\ &= \left(E^{(1)}\right)^{-1}.\left(E^{(2)}\right)^{-1} \dots \left(E^{(n-1)}\right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \alpha_{21} & 1 & & \boldsymbol{0} & \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$U = A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \boldsymbol{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

b) En appliquant l'algorithme de la méthode :

En connaissant $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, *on écrit l'égalité* $A = LU$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & \boldsymbol{0} & \\ l_{31} & & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & \boldsymbol{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

(U contient $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments et L contient $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments). Par identification on obtient un système linéaire de n^2 équations à n^2 inconnues. En résolvant le système obtenu dans des cas particuliers ($n = 2, 3, 4$), on constate que la détermination des éléments de L et U cherchés se fait suivant l'algorithme général :

$$\begin{cases} l_{ii} = 1, \quad 1 \leq i \leq n; \\ \begin{cases} u_{1j} = a_{1j}, \ 1 \leq j \leq n; \\ l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, \ 2 \leq i \leq n; \end{cases} \\ \begin{cases} u_{mj} = a_{mj} - \sum\limits_{k=1}^{m-1} l_{mk}.u_{kj}, \quad m \leq j \leq n; \\ l_{im} = \left(a_{im} - \sum\limits_{k=1}^{m-1} l_{ik}.u_{km} \right) / u_{mm}, \quad m+1 \leq i \leq n; \end{cases} \quad 2 \leq m \leq n. \end{cases}$$

Coût de la méthode

- *Calcul de U : coût($\times$)=coût($+$)=* $\sum\limits_{m=1}^{n} (m-1)(n-m+1) = O(\frac{1}{6}n^3)$
- *Calcul de L : coût($\times$)=coût($+$)=* $\sum\limits_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m) = O(\frac{1}{6}n^3)$
  et coût($/$)= $\sum\limits_{m=1}^{n} (n-m) = \frac{n(n-1)}{2}$.

D'où, coût total $= O(\frac{2}{3}n^3)$=coût de Gauss.

Utilité de la détermination *LU*

Calcul de déterminant *Grâce à la factorisation LU, on peut calculer le déterminant d'une matrice carrée avec $O(\frac{2}{3}n^3)$ opérations, vu que*

$$det(A) = det(L) \times det(U) = det(U) = \prod_{k=1}^{n} u_{kk}.$$

Résolution : *Supposons qu'on veut résoudre le système $AX = b$. Décomposons A sous forme LU, alors $AX = b$ devient $(LU)X = b$ ou encore $L(UX) = b$. Posons $Y = UX$, on cherche alors Y tel que $LY = b$ est un système triangulaire inférieur qu'on résout par la méthode descendante. Y étant trouvé, on cherche X tel que $UX = Y$ est un système triangulaire supérieur qu'on résout par la méthode ascendante.*
Coût total : *coût(décomposition LU)+coût(résolution de deux systèmes triangulaires), c'est à dire, Coût total$= O(\frac{2}{3}n^3) + 2n^2 = O(\frac{2}{3}n^3)$.*

Calcul de l'inverse d'une matrice : *Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n, notons par $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ les colonnes de sa matrice inverse A^{-1}, i.e. $A^{-1} = (v^{(1)}, \ldots, v^{(n)})$. La relation $A.A^{-1} = I_n$ se traduit par les n systèmes linéaires suivants :*

$$Av^{(k)} = e^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{6.3}$$

où $e^{(k)}$ est le vecteur colonne ayant toutes les composantes nulles sauf la $k-$ième composonte qui est 1, $e^{(k)} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^t$. Une fois connues les matrices L et U qui décomposent la matrice A, résoudre les n systèmes (6.3) gouvernés par la même matrice A.

Exemple 6.3. *Soit le système linéaire suivant*

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

A l'aide de la décomposition LU de A :

1. *Résoudre le système donné en déterminant les matrices L et U :*
   a) *En utilisant l'algorithme d'élimination de Gauss ordinaire.*
   b) *En appliquant l'algorithme de la méthode.*
2. *Calculer l'inverse de A.*