Chapitre II

Cinématique du point

Sommaire

II.1. Généralités

L'objet de la cinématique est l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui le produisent. L'étude du mouvement d'un corps est l'étude des positions successives de ce dernier par rapport à un référentiel (repère d'espace associé à un repère de temps).

II.1.1. Définitions

a) Point matériel

Un point matériel est défini comme étant un élément de matière, de dimensions négligeables, que l'on assimile à un point géométrique. En réalité, on étudie le mouvement du centre de masse d'un corps, point au quel est supposé concentré toute la masse du corps.

b) Trajectoire

C'est le lieu des positions successives occupées par un point mobile. Celle–ci peut être rectiligne ou bien curviligne. Elle peut être ouverte ou fermée.

c) Equation du mouvement (ou équation Horaire)

C'est la relation qui lie le chemin parcouru, au temps nécessaire à le parcourir.

d) Définition intrinsèque du mouvement

Le mouvement d'un point M est parfaitement défini si l'on connaît

- la trajectoire C

- la position, à chaque instant « t » du point M sur la trajectoire C. On fait le choix d'une origine et d'un sens positif (indiqué par une flèche).

OM est défini par la fonction OM = S = f(t)

II. 2. Repérage d'un point : systèmes de coordonnées

II.2.1. Choix d'un système de coordonnées

L'espace contient 3 dimensions ; cela signifie qu'il faut 3 coordonnées pour définir la position d'un point *M* dans l'espace. La première étape consiste à choisir un point qui servira de référence : c'est le **point origine** noté *O*.

Le point M est alors repéré par rapport à O : on note $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position de M. Il reste à repérer le vecteur $\overrightarrow{OM}$; il faut pour cela définir une base vectorielle notée $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut alors se décomposer dans cette base en :

$$\overrightarrow{OM} = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3}$$

(u_1, u_2, u_3) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ base

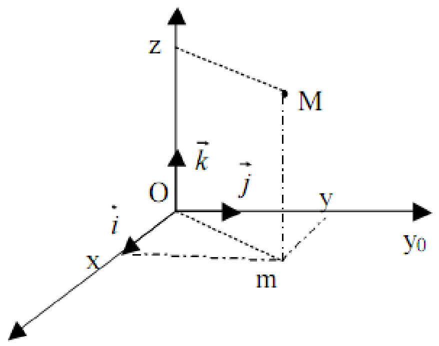
Toutefois, pour des raisons pratiques (en particulier lors de calculs de produits scalaires et produits vectoriels), il est important que la base utilisée soit *orthonormée directe*.

Il est très important de bien choisir le système de coordonnées dans lequel la description du problème va être faite pour simplifier les calculs. Dans le plan par exemple, on pourra utiliser 2 axes x et y et repérer ainsi le point M étudié. Toutefois, si le mouvement de M est circulaire, l'utilisation de x et y sera compliquée: il vaudra mieux repérer le point par sa distance depuis le centre O (rayon r), et l'angle parcouru. C'est ce que l'on appelle les coordonnées polaires. Pour un mouvement à trois dimensions sur la Terre, il est usuel (et plus simple!) de repérer un point par sa latitude, sa longitude et son altitude (c'est ce que l'on va appeler le système de coordonnées sphériques).

II.2.2. Coordonnées cartésiennes

Soient $R(x,y,z)$ un repère orthonormé direct de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et M la particule a repérer

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



la position de la particule M est donnée par ses trois coordonnées cartésiennes (x,y,z) telles que :

x = abscisse de M ; y = ordonnée de M ; z = côte de M.

Le vecteur déplacement élémentaire (M'est très voisin de M) s'écrit:

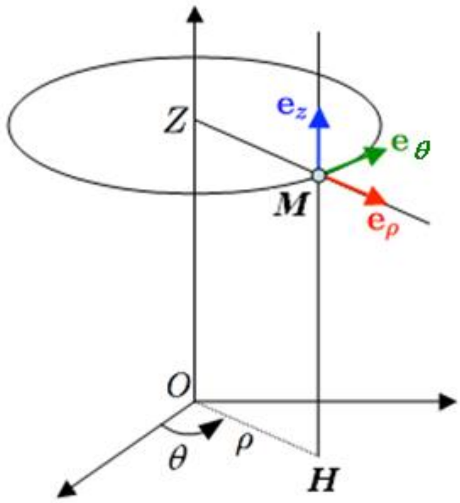
$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\vec{M} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

(Dans R : $d\vec{i} = d\vec{j} = d\vec{k} = \vec{0}$)

II.2.3. Coordonnées cylindriques

De nombreux problèmes possèdent un axe privilégié, et l'utilisation du système de coordonnées cartésiennes est alors peu judicieuse. Un point en rotation autour d'un axe (sur un manège tournant par exemple) est plus aisément repéré par sa distance au centre, et par un angle de rotation autour de l'axe. C'est pour faciliter l'étude de ce genre de problèmes que sont introduites les coordonnées cylindriques.

Soit un point fixe origine *O* et le système de coordonnées cartésiennes *(O,x,y,z)* précédemment défini. Soit M un point que l'on cherche à repérer. L'axe privilégié du problème est placé suivant *(Oz)* (par exemple l'axe de rotation du manège). Soit *H* la projection de *M* sur le plan *(O,x,y)*, et *Z* la projection de M sur l'axe *(Oz)*:



Le point *M* est repéré par :

- ρ la distance de *M* à l'axe *(Oz)*, soit la distance *ZM* ou encore *OH*;

- θ l'angle *(Ox;OM);*

- *z* la distance *HM*, soit encore la distance *OZ.*

ρ est appelé rayon polaire; θ est l'angle polaire et *z* la cote.

La position de chaque point doit toutefois être définie par un unique triplet (ρ,θ,z). ρ ne varie donc que de 0 à $+\infty$; θ varie de 0 à 2π; z varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Remarque

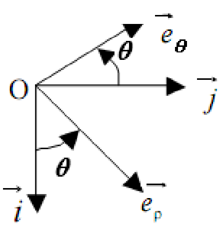
Ce système de coordonnées est une "version à 3 dimensions" du système de coordonnées polaires : *z* est la hauteur du point *M* par rapport au plan *(Oxy)*, puis (ρ,θ) sont les coordonnées polaires de *M* dans le plan *z* = cte.

Il faut bien remarquer que la nouvelle base $(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$ orthonormée associée à ce système de coordonnées est mobile! Les vecteurs ont une direction changeante quand le point *M* se déplace.

$$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\theta\,\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta} = \overrightarrow{e_\theta}\,, \qquad \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{e_\rho}$$



Dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\, \overrightarrow{e_\rho} + z\, \overrightarrow{e_z}$$

Le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ est:

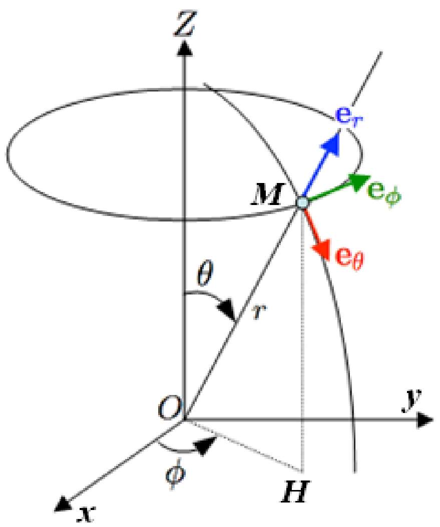
$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\, \overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\, \overrightarrow{e_\theta} + dz\, \overrightarrow{e_z}$$

- **Correspondance avec les coordonnées cartésiennes**

$$\begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

II.2.4. Coordonnées sphériques



Lorsque le problème présente une symétrie sphérique autour d'un point *O* que l'on prend pour origine du repère d'espace, il est pratique d'utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) de la particule à étudier

- r : rayon, la distance de *M* au point *O*.

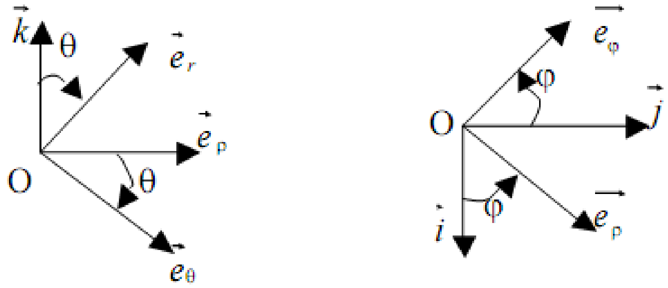
- θ : latitude, l'angle *(Oz;OM);*

- φ : longitude, l'angle *(Ox;OH);*

$0 < r < +\infty$; $0 < \theta < \pi$; $0 < \phi < 2\pi$

Une nouvelle base locale s'introduit alors $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\Theta \vec{e}_\rho + \cos\Theta \vec{k} = \sin\Theta\cos\varphi \vec{i} + \sin\Theta\sin\varphi \vec{j} + \cos\Theta \vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos\Theta \vec{e}_\rho - \sin\Theta \vec{k} = \cos\Theta\cos\varphi \vec{i} + \cos\Theta\sin\varphi \vec{j} - \sin\Theta \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}. \end{cases}$$



Dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$$

Le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ est:

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + rsin\theta d\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

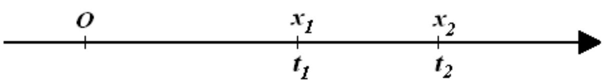
- **Correspondance avec les coordonnées cartésiennes**

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x = OH\,cos\varphi = r\,sin\theta\,cos\varphi \\ y = OH\,sin\varphi = \ r\,sin\theta\,sin\varphi \\ z = r\,cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ tg\theta = \left(\frac{\rho}{z}\right) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ tg\varphi = \left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

II.3. Mouvement rectiligne

Le mouvement d'un corps est rectiligne si sa trajectoire est une droite. La position de l'objet est définie par son déplacement « x » à partir d'un point origine arbitraire O. $x = f(t)$, x peut être positif ou négatif



II.3.1. Vitesse moyenne

La vitesse d'un mobile caractérise la variation de sa position au cours du temps. Soit deux positions du mobile x_1 et x_2 à deux instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$). La vitesse moyenne du mobile entre ces est donnée par :

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Remarques

- A la fois v_{moy} et Δx ont un signe. Ils seront tous deux positifs si le mobile se déplace dans le sens de l'axe x, négatifs dans le cas contraire.
- Sauf dans le cas d'un mouvement à vitesse constante, v_{moy} dépend du choix de t_1 et t_2

II.3.2. Vitesse instantanée

La vitesse moyenne ne peut servir à caractériser la vitesse d'un mobile à un instant t donné. Dès lors on définit la vitesse instantanée à l'instant t par :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Par conséquent, pour retrouver la position d'un mobile à chaque instant, à partir de sa vitesse instantanée, on calcule l'intégrale :

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt \Rightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

A l'instant initial t_0 le mobile est en x_0

II.3.3. Accélération

L'accélération d'un mobile caractérise la variation de sa vitesse au cours du temps. Procédant comme pour la vitesse, on définit l'accélération par

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

L'accélération instantanée d'un mobile est la dérivée de sa vitesse par rapport au temps, à l'instant considéré :

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Par conséquent, pour retrouver la vitesse d'un mobile à chaque instant, à partir de son accélération, on calcule l'intégrale :

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \Rightarrow v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

Ceci implique la connaissance de la vitesse du mobile à l'instant initial t_0, soit : v_0

II.3.4. Deux cas particuliers de mouvement rectiligne : le MRU et le MRUV

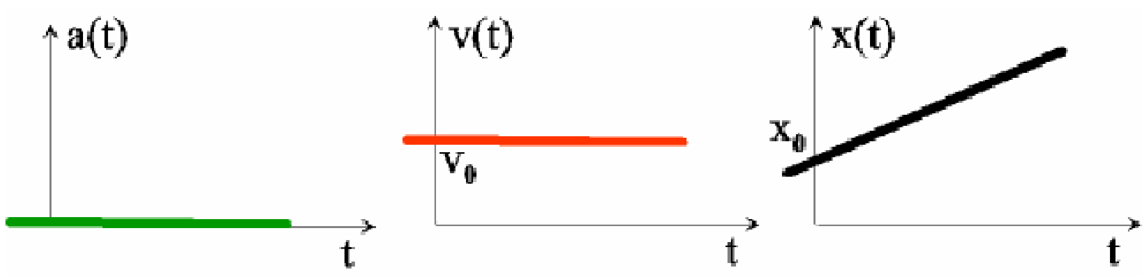
a) mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Il se caractérise par :

- ✓ trajectoire rectiligne (une droite).
- ✓ vitesse constante ($v = cste$).
- ✓ accélération nulle ($a = 0$).

$$v = \frac{dx}{dt} = cste \quad \Rightarrow dx = vdt \quad donc \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt = v\int_{t_0}^{t} dt$$

Donc d'une manière générale $x - x_0 = v \cdot (t - t_0)$



b) Le mouvement rectiligne uniformément varié

Il se caractérise par :

- ✓ trajectoire rectiligne ;
- ✓ accélération constante et non nulle.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = a_0 = cste$$

Si la vitesse croit, le mouvement est uniformément accéléré ;

Si la vitesse décroit, le mouvement est uniformément retardé (ou décéléré).

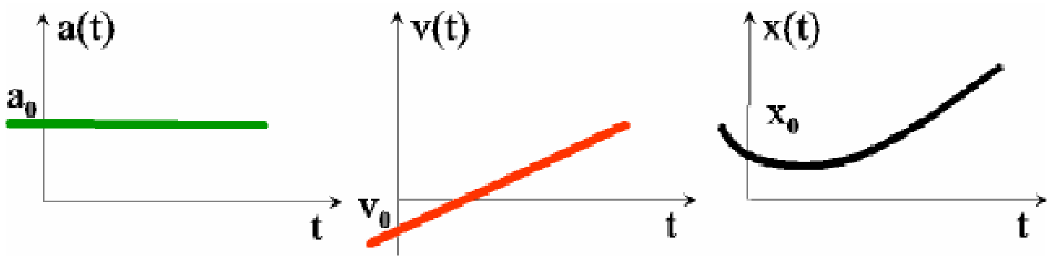
Nous admettons, pour simplifier, que l'origine du temps correspond à l'origine du mouvement,

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a_0\, dt \Rightarrow v - v_0 = a_0(t - t_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + a_0(t - t_0) \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0\, dt + a_0 \int_{t_0}^{t} (t - t_0)\; dt$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\, a_0(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$$

La fonction *x(t)* est du second degré et la courbe à laquelle elle correspond est une parabole



On trouve la relation entre la variation de la vitesse et le déplacement, valable uniquement pour le MRUA en remplaçant $(t - t_0)$ dans :

$$v - v_0 = a_0(t - t_0) \Rightarrow (t - t_0) = \frac{v - v_0}{a_0}$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2}\, a_0 \left(\frac{v - v_0}{a_0}\right)^2 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a_0}\right)$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2a_0}\, (v^2 - {v_0}^2)$$

$$\Rightarrow v^2 - {v_0}^2 = 2a_0(x - x_0)$$

Applications

Exercice 1

Un corps se déplace selon l'axe des x suivant la loi $x(t)= t^3+ 5t^2+5$, x est en mètre et t en seconde. Trouver :

1- sa vitesse et son accélération à chaque instant ;

2- sa position, sa vitesse et son accélération pour t=2 s;

3- sa vitesse et son accélération moyennes entre t=1 s et t=2 s.

Exercice 2

Un mobile en mouvement rectiligne a une accélération $a =1/ t^2$. Sa vitesse initiale à l'instant $t_0 = 1s$ et au point $x_0 = 2\ m$ est nulle.

1- quelle est sa vitesse instantanée $v(t)$?

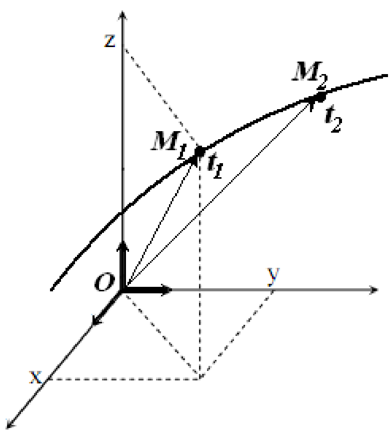
2- quelle est sa position instantanée $x(t)$?

II.4. Mouvement curviligne

II.4.1.Définition analytique du mouvement

Dans le cas d'une trajectoire quelconque dans l'espace à 3 dimensions, on choisit un repère Oxyz. La position d'un point M est entièrement déterminée par son vecteur position à chaque instant $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Le mouvement du mobile sera défini si l'on connaît, à chaque instant, ses coordonnées en fonction du temps, soit les trois équations :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$



Pour une particule M qui se trouve à l'instant t_1 en M_1 et à l'instant t_2 en M_2 on défini le vecteur déplacement

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

On défini donc le vecteur vitesse moyenne

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

La vitesse instantanée s'obtient on faisant tendre t_2 vers t_1 ou bien $\Delta t \to 0$, soit :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Les composantes cartésiennes de la vitesse sont donc :

$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$, $\quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$.

Soit $\vec{v}(t) = v_x\vec{\imath}+v_y\vec{\jmath}+v_z\vec{k}$

Et le module de la vitesse est donné par : $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2+v_z^2}$

Entre les deux instants t_1 et t_2 le vecteur accélération moyenne est défini par :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

L'accélération instantanée s'obtient en faisant tendre t_2 vers t_1 ou bien $\Delta t \to 0$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t_1 + \Delta t) - \vec{v}(t_1)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Longrightarrow \vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

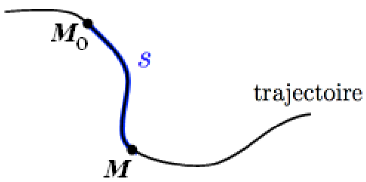
Les composantes de $\vec{a}(t)$ sont donc :

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, $\quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$, $\quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$

II.4.2. Définition intrinsèque du mouvement

Contrairement au mouvement rectiligne, le mobile n'effectue pas son mouvement le long d'un segment de droite M_1M_2, mais il l'effectue le long d'un arc $\widehat{M_1M_2}$, pour mesurer des longueurs parcourues, il faut introduire la notion d'abscisse curviligne

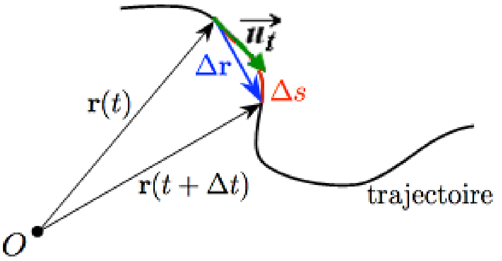
a) Abscisse curviligne



Choisissons un point fixe M_0 sur la trajectoire qui servira de référence pour mesurer les longueurs d'arcs. On appelle abscisse curviligne s la mesure de la distance parcourue le long de la trajectoire, soit $s(t) = \widehat{M_0M}$

b) Vecteur vitesse

Sur la figure ci contre, on remarque qu'il y a une différence entre le vecteur déplacement $\Delta\vec{r}$ et la variation de l'abscisse curviligne Δs. mais en faisant tendre $\Delta t \to 0$, ces deux derniers tendent à ce confondre. On peut ecrire alors :



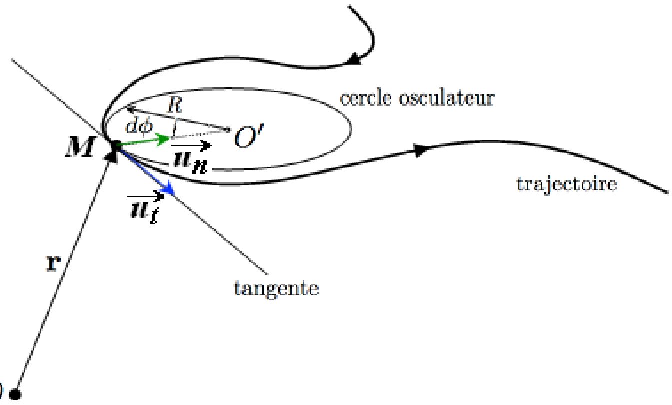
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|\Delta\vec{r}\|}{\Delta s} = 1 \Longrightarrow \frac{\|d\vec{r}\|}{ds} = 1$$

On défini un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_t}$ tangent à la courbe au point M orienté dans le sens du mouvement tel que : $\overrightarrow{u_t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$. On redéfini le vecteur vitesse par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\,\overrightarrow{u_t} \Longrightarrow \vec{v}(t) = v\,\overrightarrow{u_t}$$

On déduit donc que le vecteur vitesse reste toujours tangent à la trajectoire. Il est toujours orienté dans le sens du mouvement : Si le mobile se déplace dans le sens positif, le vecteur vitesse est dirigé dans le sens positif. Dans l'autre cas, le vecteur vitesse est dirigé dans le sens négatif.

c) Accélérations tangentielle et normale



En dérivant par rapport au temps le vecteur $\vec{v} = v\,\overrightarrow{u_t}$ on obtient l'accélération sous la forme :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\,\overrightarrow{u_t}) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$$

Le premier terme $\frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t}$ est un vecteur tangent à la trajectoire, on l'appelle *accélération tangentielle*

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} = a_t\,\overrightarrow{u_t}$$

Elle indique la manière dont varie la grandeur (module) de la vitesse au cours du temps. Lorsque le mobile se déplace avec une vitesse (grandeur) constante, quelle que soit la forme de la trajectoire, accélération tangentielle est nulle.

Le second terme détermine la variation de la direction du vecteur vitesse au cours du temps. On l'appelle accélération normale noté $\overrightarrow{a_n}$

$$\overrightarrow{a_n} = v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} \qquad \text{avec} \qquad \frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt}$$

La dérivée du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_t}$ par rapport à ϕ correspond à un vecteur unitaire qui lui est perpendiculaire qu'on note $\overrightarrow{u_n}$ dirigé vers le centre du cercle osculateur *O'*. Le vecteur $\overrightarrow{u_n}$ est donc normal à la trajectoire au point *M* et dirigé vers la concavité de la courbe.

$$\frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\phi} = \overrightarrow{u_n}$$

Aux voisinages du point *M*, la trajectoire se confond au cercle osculateur. Or sur un cercle de rayon *R*, la longueur d'un arc *ds* est proportionnelle à l'angle $d\phi$ qui le délimite. On écrit $ds = R\, d\phi$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\overrightarrow{a_n} = v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = v\frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\phi}\,\frac{d\phi}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v^2\,\frac{1}{R}\,\overrightarrow{u_n} \Longrightarrow \overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\,\overrightarrow{u_n}$$

R correspond au rayon de courbure de la trajectoire.

En résumé, l'accélération d'un mobile peut toujours être décomposée en deux accélérations, l'une est dite tangentielle et l'autre normale

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{v^2}{R}\,\overrightarrow{u_n}$$

$$\vec{a} = a_t\overrightarrow{u_t} + a_n\overrightarrow{u_n}$$

Comme les deux vecteurs $\overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{u_n}$ sont orthogonaux le module de l'accélération est :

$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2} \Longrightarrow a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

Remarque

- Le cercle osculateur est le cercle unique qui épouse la courbe le mieux possible en un point *M* donnée. Il s'agit d'une approximation de la courbe. Le cercle osculateur approche la courbe mieux que ne le fait la tangente: il donne non seulement une idée de la direction dans laquelle la courbe avance, mais aussi de sa tendance à tourner de part et d'autre de la tangente (courbure).
- Si le mouvement est curviligne uniforme (vitesse constante en module), l'accélération tangentielle est nulle. D'autre part, si le mouvement est rectiligne (rayon infini), il n y pas de changement de direction du vecteur vitesse, l'accélération normale est nulle.

Exercice :

On donne les équations paramétriques *x(t)* et *y(t)* d'un mobile par rapport à un référentiel $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$: $x(t) = 2t$ $y(t) = 4t^2$

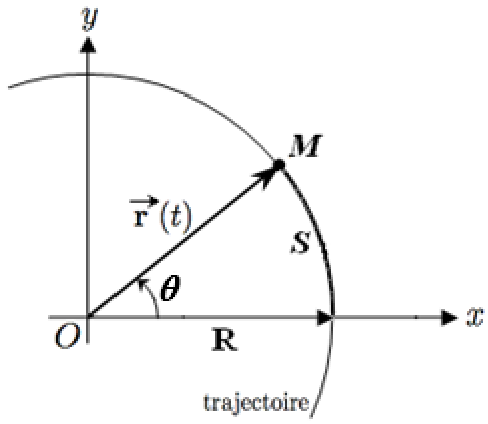
1. Déterminer l'équation de la trajectoire.
2. Calculer la vitesse et l'accélération du mobile.
3. Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération.
4. Déduire le rayon de courbure.

II.4.3. Cas particulier du mouvement circulaire

Supposons un mobile qui décrit une trajectoire circulaire dans le plan Oxy ; la circonférence a un rayon R et est centrée sur l'origine des axes O. Dans ce cas il est plus commode de travailler avec des coordonnées polaires ρ et θ, plutôt qu'avec des coordonnées cartésiennes.

Dans le SI, les angles sont mesurés en radian (rad). Cette unité est définie comme le rapport de l'arc de circonférence s, intercepté par l'angle au centre θ, divisé par le rayon de la circonférence R

$$\theta[rad] = \frac{s}{\mathrm{R}}$$



d'où l'on déduit :

$s = \mathrm{R}\,\theta$, à condition que θ soit mesuré en radian.

Les relations entre cordonnées polaires et coordonnées cartésiennes peuvent être établies aisément à partir des relations trigonométriques du triangle rectangle :

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sin\theta \end{cases}$$

Dans le cas d'une trajectoire circulaire de centre O, ρ = R est constant et la seule coordonnée qui varie dans le temps est l'angle θ; c'est elle qui détermine la position du point *M* à tout instant.

Pour trouver l'expression de la vitesse dans un mouvement circulaire, faisons appel à la

définition de celle-ci : $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$

ou en considérant seulement le module des vecteurs $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$

A la limite où $\Delta t \to 0$, la longueur de $\overrightarrow{\Delta r}$ tend vers la longueur de l'arc de circonférence Δs, intercepté par l'angle θ.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{R}\Delta\theta}{\Delta t} = \mathrm{R}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

Ceci nous amène à définir la vitesse angulaire ω comme la dérivée par rapport au temps de l'angle azimutal, elle s'exprime en (rad/s) :

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \Rightarrow v(t) = \mathrm{R}\,\omega$$

On exprime le vecteur vitesse par :

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{u_t} = \mathrm{R}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_t} \Rightarrow \mathrm{R}\,\omega\,\overrightarrow{u_t}$$

En dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps on obtient l'accélération

$$\vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_n} \Rightarrow \vec{a} = R\alpha\,\overrightarrow{u_t} + R\omega^2\,\overrightarrow{u_n}$$

$\alpha = d\omega/dt$ est l'accélération angulaire, elle s'exprime en rad/s^2

a) Mouvement circulaire uniforme

On dit que le mouvement circulaire est uniforme (MCU) lorsque la vitesse angulaire ω donc la vitesse v est constante.

- ✓ la trajectoire est circulaire (circonférence) :
- ✓ vitesse linéaire et angulaire sont des constantes.

<u>Espace parcouru</u> : $s = v\,t + s_o$

s_o: abscisse curviligne à l'instant origine

v : vitesse linéaire constante

s : abscisse du mobile à l'instant t.

<u>Angle balayé en radians</u> : $\theta = \omega\,t + \theta_o$

Le temps mis par le mobile pour effectuer un tour complet est constant et est défini comme la période T du MCU.

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi R}{v} \Longrightarrow \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Souvent, la vitesse de rotation est exprimée en tour par seconde (*n* tr/s), dans ce cas, on écrit :

$$\omega = 2\pi\, n$$

Accélération d'un point

L'accélération tangentielle : $\overrightarrow{a_t} = \mathrm{R}\alpha\,\overrightarrow{u_t} = \vec{0}$ car ($\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0$).

L'accélération normale : $\overrightarrow{a_n} = R\omega^2\,\overrightarrow{u_n} = \frac{v^2}{R}\,\overrightarrow{u_n}$. Elle se dirige toujours vers le centre du cercle.

b) Mouvement circulaire uniformément varié

- ✓ trajectoire circulaire
- ✓ accélération angulaire constante

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = Cste$$

Si la vitesse angulaire croit, le mouvement est uniformément accéléré ;

Si la vitesse angulaire décroit, le mouvement est uniformément retardé (ou décéléré).

Nous admettons pour simplifier que l'origine du temps correspond à l'origine du mouvement

$$\omega = \alpha\, t + \omega_o$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha\, t^2 + \omega_o t + \theta_o$$

Accélération d'un point

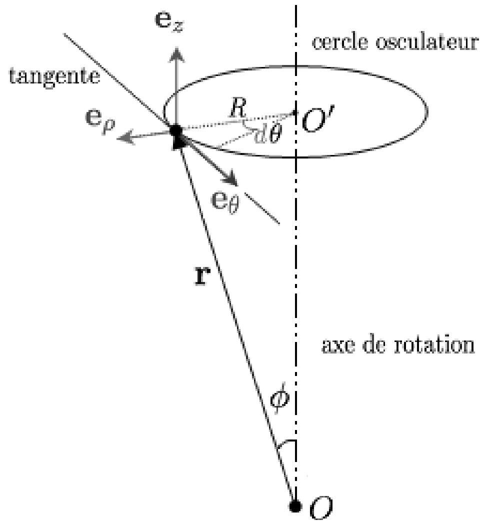
L'accélération tangentielle : $\overrightarrow{a_t} = \mathrm{R}\alpha\,\overrightarrow{u_t}$

L'accélération normale : $\overrightarrow{a_n} = R\omega^2\,\overrightarrow{u_n} = \frac{v^2}{R}\,\overrightarrow{u_n}$. Elle se dirige toujours vers le centre du cercle.

c) Propriétés du vecteur vitesse angulaire

On définit le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\omega}$ par

- sa grandeur $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
- sa direction qui est celle de l'axe de rotation
- son sens qui indique le sens de la rotation selon la règle du tire-bouchon



$$\vec{r} = \rho\, \overrightarrow{e_\rho} + z\, \overrightarrow{e_z}, \qquad \vec{\omega} = \omega\, \overrightarrow{e_z}$$

Le mouvement de *M* étant circulaire autour de l'axe *OZ*, les coordonnées ρ et z sont donc constantes. On a alors :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \rho\, \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt}\, \overrightarrow{e_\theta} \Longrightarrow \vec{v} = \rho \frac{d\theta}{dt}\, \overrightarrow{e_\theta}$$

Comme $\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_\rho}$ alors

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\, \overrightarrow{e_z} \wedge \rho\overrightarrow{e_\rho} = \frac{d\theta}{dt}\, \overrightarrow{e_z} \wedge (\rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z})$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Exercice

Dans un repère OXY, on considère un point matériel animé d'un mouvement circulaire de centre O et de rayon R. notons par θ(t) l'angle que fait le vecteur position avec l'axe OX.

1. Calculer les composantes cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs grandeurs en fonction de θ et de ses dérivées par rapport au temps

2. Déduire les composantes tangentielle et normale de l'accélération

II.4.4. Etude du mouvement dans les différents systèmes de coordonnées

a) Etude du mouvement en coordonnées cylindriques

Dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ le vecteur position $\vec{r}$ s'écrit :

$$\vec{r} = \rho\, \overrightarrow{e_\rho} + z\, \overrightarrow{e_z}$$

Le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{r}$ est:

$$d\vec{r} = d\rho\, \overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\, \overrightarrow{e_\theta} + dz\, \overrightarrow{e_z}$$

Le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\, \overrightarrow{e_\rho} + \rho \frac{d\theta}{dt}\, \overrightarrow{e_\theta} + \frac{dz}{dt}\, \overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\, \overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\, \overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\, \overrightarrow{e_z}$$

En se rappelant que

$$\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta} = \overrightarrow{e_\theta} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}, \qquad \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{e_\rho} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho}$$

Le vecteur accélération est

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\, \overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\, \overrightarrow{e_z}$$

b) Etude du mouvement en coordonnées sphériques

Le calcul de l'accélération en coordonnées sphériques est un calcul rarement effectué et très compliqué! Son expression donnée simplement à titre indicatif.

Dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ le vecteur position $\vec{r}$ s'écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\, \overrightarrow{e_r}$$

Les dérivées par rapport au temps des trois vecteurs unitaires s'écrivent sous la forme :

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\, \overrightarrow{e_\theta} + sin\theta\dot{\varphi}\, \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\, \dot{\theta}\, \overrightarrow{e_r} + cos\theta\dot{\varphi}\, \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = -\, \dot{\varphi}(sin\theta\, \overrightarrow{e_r} + cos\theta\, \overrightarrow{e_\theta})$$

Le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + rsin\theta\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

Le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - rsin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\overrightarrow{e_r}$$

$$+\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\,sin\theta\,cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

$$+(2r\,cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} + 2\,\dot{r}\,sin\theta\,\dot{\varphi} + rsin\theta\ddot{\varphi})\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

II.5. Mouvement relatifs

II.5.1. Changement de référentiels

Supposons que le mouvement d'un point matériel M (position, vitesse et accélération) est connu par rapport à un référentiel donné. On veut déterminer le mouvement de M par rapport à un autre référentiel.

Soit le 1er référentiel *R(O,xyz)* définit par les vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On le considère fixe et nous l'appelons repère absolu. Dans *R* on défini :

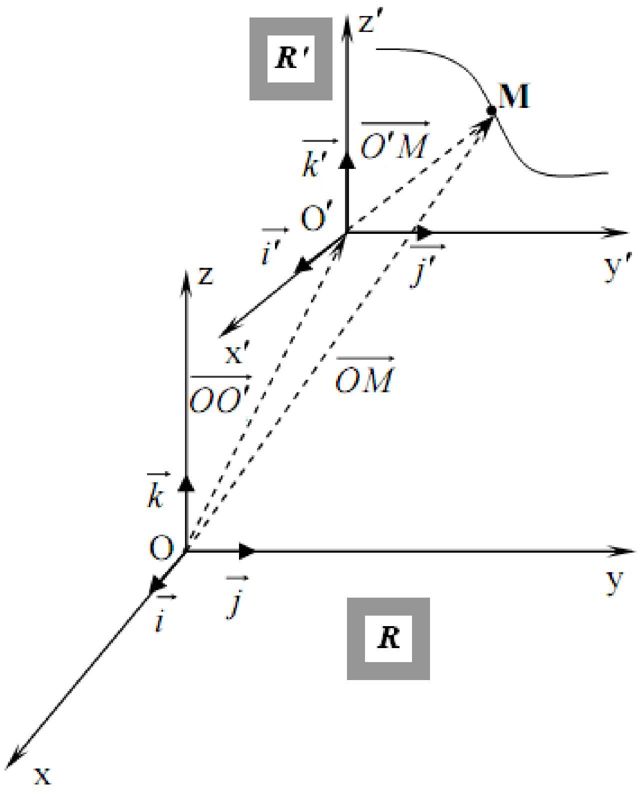
- ✓ Le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$
- ✓ Le vecteur vitesse absolue : $\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$
- ✓ Le vecteur accélération absolue : $\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\,\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k}$

Soit le 2ème référentiel *R'(O',x'y'z')* définit par les vecteurs $(\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$. Il est en mouvement par rapport à *R* donc nous l'appelons repère relatif. Dans *R'* on défini :

- ✓ Le vecteur position : $\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{\imath'} + y'\,\vec{\jmath'} + z'\,\vec{k'}$
- ✓ Le vecteur vitesse relative : $\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x}'\,\vec{\imath'} + \dot{y}'\,\vec{\jmath'} + \dot{z}'\,\vec{k'}$
- ✓ Le vecteur accélération relative : $\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \ddot{x}'\,\vec{\imath'} + \ddot{y}'\,\vec{\jmath'} + \ddot{z}'\,\vec{k'}$

Pour étudier un mouvement bien défini, on utilise les définitions suivantes :

- le trièdre *Oxyz* (repère *R*) est le repère *absolu* ou référentiel *absolu* ;
- le trièdre *O'x'y'z'* (repère *R'*) est le repère *relatif* ou référentiel *relatif* ;
- le mouvement du point *M* par rapport à « *R* » s'appelle *mouvement absolu* ;
- le mouvement du point *M* par rapport à « *R'* » s'appelle *mouvement relatif* ;
- le mouvement de « *R'* » par rapport à « *R* » s'appelle *mouvement d'entraînement* ;



II.5.2. Relation entre les positions

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \overrightarrow{OO'} + x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'}$$

II.5.3. Relation entre les vitesses

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}(x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'})$$

Puisque le repère *R'* et mobile alors les vecteurs $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ ne sont pas constants au cours du temps. Leurs dérivées par rapport au temps ne sont pas nulles.

$$\overrightarrow{v_a} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\right] + \left[\frac{dx'}{dt}\,\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\,\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\,\vec{k'}\right]$$

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) + (\dot{x}'\,\vec{i'} + \dot{y}'\,\vec{j'} + \dot{z}'\,\vec{k'})$$

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) + \overrightarrow{v_r}$$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$$

Le terme $\overrightarrow{v_e}$ est appelé vitesse d'entrainement de *R'* par rapport à *R*. elle peut être considérée comme la vitesse absolue qu'aurai *M* dans *R* si *M* était immobile dans *R'*.

Nous avons écrit précédemment : $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$.

Cette relation reste valable pour n'importe quel vecteur, en particulier pour les vecteurs unitaires $\vec{i'}, \vec{j'}$ et $\vec{k'}$. On écrit alors :

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i'}, \quad \frac{d\vec{j'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j'} \quad \text{et} \ \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k'}$$

$\vec{\omega}$: est appelé vecteur vitesse de rotation, il correspond à la rotation des axes de *R'* par rapport à un axe dont la direction est définie par celle de $\vec{\omega}$. Attention $\vec{\omega}$ ne correspond pas à la rotation de *O'* dans *R*.

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(\vec{\omega} \wedge \vec{i'}) + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{j'}) + z'(\vec{\omega} \wedge \vec{k'})$$

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge x'\vec{i'}) + (\vec{\omega} \wedge y'\vec{j'}) + (\vec{\omega} \wedge z'\vec{k'})$$

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge (x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'})$$

$$\overrightarrow{v_e} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}_{translation} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{rotation}$$

$\overrightarrow{v_e}$ s'écrit comme addition de deux termes

1) $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$: vitesse de translation de *O'* dans *R*

2) $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$: rotation des axes de *R'* par rapport à *R*

On voit bien que mouvement de *R'* par rapport à *R* peut toujours être décomposé en une translation de *O'* par rapport à *O* et une rotation des trois axes *x'y'z'* par rapport à *R*.

Cas particuliers :

- Si *M* est fixe dans *R'* : $\overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e}$
- Si *R'* est fixe par rapport à *R* : $\overrightarrow{v_e} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r}$
- Si *R'* est en mouvement rectiligne par rapport à *R* : $\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$

II.5.4. Relation entre les accélérations

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(x'\frac{d\vec{i}}{dt} + y'\frac{d\vec{j}}{dt} + z'\frac{d\vec{k}}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\dot{x}'\,\vec{i} + \dot{y}'\,\vec{j} + \dot{z}'\,\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{a_a} = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right)}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}}{dt}\right)}_{\overrightarrow{a_c}} + \underbrace{\left(\ddot{x}'\,\vec{i} + \ddot{y}'\,\vec{j} + \ddot{z}'\,\vec{k}\right)}_{\overrightarrow{a_r}}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_r}$$

$\overrightarrow{a_e}$: Accélération d’entrainement.

$\overrightarrow{a_c}$: Accélération complémentaire ou accélération de coriolis.

$\overrightarrow{a_a}$: Accélération absolue.

$\overrightarrow{a_r}$: Accélération relative.

On peut écrire l’accélération de coriolis sous la forme :

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[\dot{x}'(\vec{\omega}\wedge\vec{i}) + \dot{y}'(\vec{\omega}\wedge\vec{j}) + \dot{z}'(\vec{\omega}\wedge\vec{k})\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[(\vec{\omega}\wedge\dot{x}'\vec{i}) + (\vec{\omega}\wedge\dot{y}'\vec{j}) + (\vec{\omega}\wedge\dot{z}'\vec{k})\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[\vec{\omega}\wedge(\dot{x}'\vec{i} + \dot{y}'\vec{j} + \dot{z}'\vec{k})\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r}$$

Pour ce qui est de l’accélération d’entrainement on l’écrit sous la forme

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{i}) + y'\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{j}) + z'\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{k})$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{i'}\right) + y'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{j'}\right) + z'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{k'}\right)$$

$$+x'\left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{i'}}{dt}\right) + y'\left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{j'}}{dt}\right) + z'\left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge x'\vec{i'}\right) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge y'\vec{j'}\right) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge z'\vec{k'}\right)$$

$$+x'\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{i'}) + y'\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{j'}) + z'\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{k'})$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge (x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}) + \vec{\omega} \wedge x'(\vec{\omega} \wedge \vec{i'}) + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{j'}) + z'(\vec{\omega} \wedge \vec{k'})$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (x'\vec{i'}+y'\vec{j'}+z'\vec{k'})]$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

On écrit finalement l'accélération absolue sous la forme

$$\overrightarrow{a_a} = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})\right)}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{(2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r})}_{\overrightarrow{a_c}} + \underbrace{(\ddot{x'}\,\vec{i'} + \ddot{y'}\,\vec{j'} + \ddot{z'}\,\vec{k'})}_{\overrightarrow{a_r}}$$

Cas particuliers :

- Si *M* est fixe dans *R'* : $\overrightarrow{a_r} = \overrightarrow{v_r} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e}$
- Si les axes de *R'* ne tournent pas par rapport à *R* (translation) : $\vec{\omega} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{a_c} = 0, \overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$
- Si de plus *R'* est en translation *uniforme* par rapport à *R* : $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r}$
  donc les accélérations mesurées dans les deux repères sont les mêmes