Département :E.B(LMD).SECSG | *Corrigé de la série de TD n°2 sur les fonctions d'une variable réelle*
Université de BEJAIA.
Toutes les sections de $\mathbf{1}^{re}$ ***année.***

Exercice n°1 : Domaine (ensemble) de définition $D_f = E$ des fonctions $f: E \longrightarrow F$ suivantes :

1. $x \longmapsto \frac{x+1}{x-2}$ est définie si $x - 2 \neq 0$ ce qui signifie que $x \neq 2$ d'où $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$;
2. $x \longmapsto \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}$ est définie si $x \geq 0$ et $\sqrt{x} - 2 \neq 0$ c'est-à-dire $\sqrt{x} \neq 2$ cela nous donne $x \neq 4$ d'où $D_f = \mathbb{R}_+ - \{4\}$;
3. $x \longmapsto \frac{1}{x} e^{-x^2}$ est définie si $x \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$;
4. $x \longmapsto \frac{x^2}{\ln(x)}$ est définie si $x > 0$ et $\ln(x) \neq 0$. La deuxième condition nous donne $x \neq 1$, par la suite le domaine $D_f = \mathbb{R}_+^* - \{1\} =]0\,,1[\, \cup \,]1\,,\ +\infty[$.

Exercice n°2 :

Soit les fonctions $f: x \longmapsto x^2 + 2$; $g: x \longmapsto \frac{2x}{x+1}$ et $h: x \longmapsto \sqrt{x}$, et soit $D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ et $D_h = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ les domaines respectifs des fonctions f, g et h.

Les fonctions $f + g$, $g.h$ sont définies respectivement sur les domines $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ et $D_{gh} = D_g \cap D_h = [0, +\infty[$ par :

$(f+g)(x) := f(x) + g(x) = x^2 + 2 + \frac{2x}{x+1}$ et $(gh)(x) := g(x).h(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{x+1}$.

La fonction $\frac{f}{h}$ est donnée par $\left(\frac{f}{h}\right)(x) \coloneqq \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^2+2}{\sqrt{x}}$ définie sur le domine $D_f \cap D_h$ à condition que $h(x) \neq 0$ par conséquent $D_{\frac{f}{h}} = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

La fonction $h \circ g$ est donnée par $(h \circ g)(x) \coloneqq h\big(g(x)\big) = h\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \sqrt{\frac{2x}{x+1}}$ définie donc pour $x \in D_g$ à condition que l'élément $g(x) \in D_h$; cette dernière s'écrit $\frac{2x}{x+1} \geq 0$ cela implique que $D_{h\circ g} =]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$.

De même $(g \circ h)(x) \coloneqq g\big(h(x)\big) = g\big(\sqrt{x}\big) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ définie sur $D_{g\circ h} = \{x \in D_h \ tel\ que\ h(x) \in D_g\} = D_h$.

Exercice n°3:

- Ces fonctions sont données comme somme, produit, quotient et composée de fonctions usuelles, donc elles sont dérivables sur leur domaine de définition :

$(3x^5)' = 15x^4$; $\left(\frac{x^4}{4} - x\right)' = x^3 - 1$; $\left(\frac{2x}{x+1}\right)' = \frac{(2x)'(x+1)-(x+1)'2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$;

$\left(\frac{1}{x}e^{-x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' e^{-x^2} + \left(e^{-x^2}\right)' \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} e^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2}\frac{1}{x} = -\left(\frac{1+2x^2}{x^2}\right)e^{-x^2}$;

$$\left(\frac{x^2}{\ln(x)}\right)' = \frac{(x^2)'.\ln(x)-(\ln(x))'.x^2}{(\ln(x))^2} = \frac{x(2\ln(x)-1)}{(\ln(x))^2}.$$

- l'équation de la tangente en $x=0$ a pour équation : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ où $f'(0)=-1$ et $f(0)=0$, donc $y=-x$.

<u>Exercice n°4</u> : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,,3]$ par $f(x)=\frac{2x}{x+1}$.

- **<u>La monotonie de f</u>** :

  la fonction rationnelle f est dérivable sur son domaine de définition D_f, en particulier sur $[1,3]\subset D_f$.

  Et $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}>0$ sur $[1,3]$ c'est-à-dire que f est strictement croissante dans $[1,3]$.

- **<u>L'ensemble des images de f sur l'intervalle $[1,3]$</u>** :

  <u>Critère</u> : *L'image d'un intervalle $I=[a,b]$ par une fonction <u>continue</u> est un intervalle $J=[\alpha,\beta]$ où α est le minimum des images sur I et β est le maximum.*

  La fonction rationnelle f est continue surD_f et donc sur l'intervalle $I=[1,3]$, d'après le critère précédent, l'image de I par f est l'intervalle $J=[\alpha,\beta]$ où $\alpha=f(1)=1$ et $\beta=f(3)=\frac{3}{2}$ car f est strictement croissante dans $[1,3]$, donc $f([1,3])=J=\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

- **<u>Vérifions que la fonction f^{-1} telle que $f^{-1}(x)=\frac{x}{2-x}$ est la réciproque de f</u>** :

  On a : $f: I \longrightarrow J$ et f^{-1} une autre fonction telle que $f^{-1}(x)=\frac{x}{2-x}$ définie sur $J\subset D_{f^{-1}}$.

  De la même façon (en utilisant le critère), on peut vérifier que l'image de J par f^{-1} est l'intervalle I c'est-à-dire que $f^{-1}: J\longrightarrow I$ est considérée comme une fonction de J à valeurs dans I.

  Cela signifie aussi que les composées $f^{-1}\circ f$ et $f\circ f^{-1}$ sont définies.

  Calculons maintenant $(f^{-1}\circ f)(x)$ sur I et $(f\circ f^{-1})(x)$ sur J :

  $$x\in I,\ (f^{-1}\circ f)(x) \coloneqq f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \frac{\frac{2x}{x+1}}{2-\frac{2x}{x+1}} = \frac{\frac{2x}{x+1}}{\frac{2}{x+1}} = \frac{2x}{x+1}\times\frac{x+1}{2} = x.$$

  $$x\in J,\ (f\circ f^{-1})(x) \coloneqq f\big(f^{-1}(x)\big) = f\left(\frac{x}{2-x}\right) = \frac{2\frac{x}{2-x}}{\frac{x}{2-x}+1} = \frac{\frac{2x}{2-x}}{\frac{2}{2-x}} = \frac{2x}{2-x}\times\frac{2-x}{2} = x.$$

  Finalement les deux composées envoient l'élément x en x lui-même, ce qui signifie que f^{-1} est la réciproque de f.

- **<u>Branches infinies de la fonction f:</u>** $x \longmapsto \frac{2x}{x+1}$ sur $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$, donc f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

$\lim_{x\to-1^{\pm}} f(x) = \frac{-1}{0^{\pm}} = \pm\infty$, dans ce cas f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

<u>Exercice n°5</u> : la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$.

1. **<u>Dérivée, signe et extremums de f</u>** :

<u>Calcul de la première dérivée f'</u> : La fonction rationnelle f est dérivable sur son domaine de définition $D_f = \mathbb{R}^*$. Et

$$f'(x) = \frac{2x.x^3 - 3x^2(x^2-1)}{(x^3)^2} = \frac{-x^4+3x^2}{x^6} = \frac{-x^2+3}{x^4}.$$

<u>Le signe de la première dérivée</u> : le numérateur de la dérivée s'écrit

$$-x^2 + 3 = -(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

La dérivée s'annule pour les valeurs $x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$, par la suite f' est positive sur l'ensemble $]-\sqrt{3}, 0[\cup]0, \sqrt{3}[$ et est négative sur $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

<u>Les extremums de f</u> :

Du signe de la première dérivée, on peut déduire les extremums de la fonction f de la façon suivante : f' est nulle pour $x = \sqrt{3}$ et elle change de signe aux côtés de cette valeur, donc $f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ est un maximum local de f puisque f' est positive à gauche et négative à droite de $\sqrt{3}$.

f' est nulle pour $x = -\sqrt{3}$ et elle change de signe aux côtés de cette valeur, donc $f(-\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ est un a minimum local de f puisque f' est négative à gauche et positive à droite de $-\sqrt{3}$.

2. **<u>Deuxième dérivée, signe, concavité, convexité et points d'inflexion</u>** :

<u>Calcul de la deuxième dérivée f''</u> : La fonction rationnelle f' est dérivable sur son domaine de définition $D_f = \mathbb{R}^*$. Et

$$f''(x) = \left(\frac{-x^2+3}{x^4}\right)' = \frac{2(x^2-6)}{x^5}.$$

<u>Le signe de la deuxième dérivée</u> :

Le numérateur de la dérivée seconde s'écrit $2(x^2-6) = 2(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$

La dérivée seconde s'annule pour les valeurs $x=\sqrt{6}$ et $x=-\sqrt{6}$ et le signe de f'' dépend du signe de $(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$ et de x puisque le dénominateur $x^5 = x.x^4$ d'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$		$+\infty$
x^5		$-$		$-$	||	$+$		$+$	
$(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$		$+$		$-$	||	$-$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$+$	||	$-$		$+$	

<u>Les intervalles où f est concave, convexe</u> :

La fonction f est convexe sur les intervalles $[-\sqrt{6},0[$ et $[\sqrt{6},+\infty[$ et concave sur $]-\infty,-\sqrt{6}]$, $]0,\sqrt{6}]$.

<u>Les points d'inflexion</u> : Selon le changement de signe de f'' aux cotés des valeurs $-\sqrt{6}$ et $\sqrt{6}$, la fonction f a deux points d'inflexion $A = \left(-\sqrt{6}, f(-\sqrt{6})\right)$ et $B = \left(\sqrt{6}, f(\sqrt{6})\right)$.

Nom du document : Copie de Série N°2 Math (I), 2021-2022
Répertoire : C:\Documents and Settings\sis\Bureau
Modèle : C:\Documents and Settings\sis\Application Data\Microsoft\Templates\Normal.dotm
Titre :
Sujet :
Auteur : pers
Mots clés :
Commentaires :
Date de création : 23/11/2015 10:01:00
N° de révision : 9
Dernier enregistr. le : 13/01/2022 08:24:00
Dernier enregistrement par : pers
Temps total d'édition : 1 725 Minutes
Dernière impression sur : 13/01/2022 08:30:00
Tel qu'à la dernière impression
Nombre de pages : 4
Nombre de mots : 1 028 (approx.)
Nombre de caractères : 5 655 (approx.)