Tasdawit n'Bgayet
Université de Bejaia

Plan Factoriel Complet (PFC)
Exercices

Exercice 1

On considère une réaction chimique dont le rendement dépend de la température et de la pression.
On décide d'effectuer un plan d'expérience suivant :

Domaine expérimental :

	Niveau : -1	**Niveau :+1**
T (°C)	60	80
P (bar)	1	2

Matrice d'expérience PFC: $2^2 = 4$ essais

Essai	**T**	**P**	**Y (%)**
1	-1	-1	60
2	+1	-1	65
3	-1	+1	75
4	+1	+1	85

Calcul des coefficients:

Essai	**Moy**	**T**	**P**	**Y (%)**
1	+1	-1	-1	60
2	+1	+1	-1	65
3	+1	-1	+1	75
4	+1	+1	+ 1	85
Diviseur	4	4	4	
Effets	$\mathbf{a_0}$ = 71,25	$\mathbf{a_1}$ = 3,75	$\mathbf{a_2}$ = 8,75	

Expression du modèle calculé: $Y = 71{,}25 + 3{,}75T + 8{,}75P$

Signification des coefficients :

Essai	xo	T	P	Y (%)	Yest	e_i =Y-Yest	e_i^2
1	+1	-1	-1	60	58,75	1,25	1,5625
2	+1	+1	-1	65	66,25	-1,25	1,5625
3	+1	-1	+1	75	76,25	-1,25	1,5625
4	+1	+1	+1	85	83,75	1,25	1,5625

Variance des résidus:

$$s^2 = \frac{\sum e_i^2}{N - p} = \frac{4 * 1{,}5625}{4 - 3} = 6{,}25$$

N: nbre d'essais
P: nbre de coefficients du modèle

Variance commune des estimateurs des coefficients du modèle est :

$$s_i^2 = \frac{s^2}{N} = \frac{6{,}25}{4} = 1{,}5625$$

Test de Student: $t_i = \frac{|a_i|}{s_i}$

La table de Student donne: $t_{crit}(0,05 ; 1) = \mathbf{12,71}$

degré de confiance 95% (risque 5 %)

ddl = N - p = 4-3 = 1 :

Comparaison de $t_i > t_\alpha$ (ν) (test bilatéral)

$t_i > t_\alpha$ (f), a_i significatif

$t_i < t_\alpha$ (f), a_i non significatif

Essai	**Moy**	**T**	**P**	**Y (%)**
1	+1	-1	-1	60
2	+1	+1	-1	65
3	+1	-1	+1	75
4	+1	+1	+ 1	85
Diviseur	4	4	4	
Effets	$\mathbf{a_0}$ = 71,25	$\mathbf{a_1}$ = 3,75	$\mathbf{a_2}$ = 8,75	
ti		**3**	**7**	
$\mathbf{t_{tab}}$	**12,71**			
signification	**NS**	**NS**	**NS**	

Conclusion :

- les effets ne sont pas significatifs (erreurs aléatoires).
- le modèle linéaire n'explique pas le rendement de la réaction chimique en fonction de la température et de la pression.

Exercice 2

On considère une réaction chimique dont le rendement dépend de la température, de la pression et de la vitesse d'agitation. On décide d'effectuer un plan d'expérience suivant :

Domaine expérimental :

	Niveau : -1	**Niveau :+1**
T (°C)	60	80
P (bar)	1	2
W (rpm)	100	500

Matrice d'expérience PFC: $2^3 = 8$ essais

Essai	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_{moy}
1	-1	-1	-1	29	25	27
2	1	-1	-1	17	22	19,5
3	-1	1	-1	40	47	43,5
4	1	1	-1	20	23	21,5
5	-1	-1	1	19	22	20,5
6	1	-1	1	18	15	16,5
7	-1	1	1	29	31	30
8	1	1	1	13	12	12,5

Signification des coefficients:

Essai	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_{moy}	$(Y_i-Y_{moy})^2$
1	-1	-1	-1	29	25	27	8
2	1	-1	-1	17	22	19,5	12,5
3	-1	1	-1	40	47	43,5	24,5
4	1	1	-1	20	23	21,5	4,5
5	-1	-1	1	19	22	20,5	4,5
6	1	-1	1	18	15	16,5	4,5
7	-1	1	1	29	31	30	2
8	1	1	1	13	12	12,5	0,5
						somme	61
						$\mathbf{s^2_{rep}}$	7,625
						s_{ai}	0,976

Signification des coefficients:

coefficients		ti	$t_{tab}(0,05 ; 8)$	signification
ao=	23,875	46,3243047	2,31	s
a1=	-6,375	12,369317		s
a2=	3	5,82085504		s
a3=	-4	7,76114005		s
a12=	-3,5	6,79099754		s
a13=	1	1,94028501		NS
a23=	-1,625	3,15296315		s
a123=	0,125	0,24253563		NS

Équation du modèle:

$$Y = 23,875 - 6,375X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 3,5X_1X_2 - 1,625X_2X_3$$

Validation du modèle:

1- Recherche de biais: N=16 essais; p=6 coefficients significatifs

$$F = \frac{S^2_{res}}{S^2_{rep}}$$

$$s^2_{rep} = \frac{\sum_{u=1}^{m}\left(y_{iu} - \overline{y_i}\right)^2}{(m-1).N}$$

$$s^2_{res} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{N-p}$$

Y	**Y^**	**(Y-Y^)²**
27	26,125	0,765625
19,5	20,375	0,765625
43,5	42,375	1,265625
21,5	22,625	1,265625
20,5	21,375	0,765625
16,5	15,625	0,765625
30	31,125	1,265625
12,5	11,375	1,265625
	somme carrés=	8,125
	ddl=	N-p=10

s^2_{rep}	7,625

F=S²rés/S²repr = **0,8125**

0<Ftab(0,05; 8; 7) = 3,44

pas de biais

Validation du modèle:

2- signification de la régression: N=16 essais; p=6 coefficients significatifs

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 / (p-1)}{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2 / (N-p)}$$

Y	Y^	(Y-Y^)²	$(Y-Y_{moy})^2$	$(Y\text{^}-Y_{moy})^2$
27	26,125	0,765625	9,765625	5,0625
19,5	20,375	0,765625	19,140625	12,25
43,5	42,375	1,265625	385,140625	342,25
21,5	22,625	1,265625	5,640625	1,5625
20,5	21,375	0,765625	11,390625	6,25
16,5	15,625	0,765625	54,390625	68,0625
30	31,125	1,265625	37,515625	52,5625
12,5	11,375	1,265625	129,390625	156,25
	somme carrés=	8,125	652,375	644,25
	ddl=	N-p=10	N-1=15	p-1=5

F=S²reg/S²rés =**158,58**

F_{cal} > Ftab0,05(5,10)= 3,33

l'équation de régression est adéquate

Validation du modèle:

3- coefficient de corrélations: N=16 essais; p=6 coefficients significatifs

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}$$

$$\overline{R}^2 = R^2 - (1 - R^2)\frac{(l-1)}{(N-l)}$$

R^2 =	0,99
R^2ajusté =	0,98

Exercice 3

PFC: $2^3 = 8 + 6$ pts au centre= 14 essais

Matrice d'expérience

n	xo	x1	x2	x3	x1x2	x1x3	x2x3	x1x2x3	Y
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	**1.57**
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	**1.62**
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	**1.34**
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	**1.42**
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	**1.55**
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	**1.62**
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	**1.36**
8	1	1	1	1	1	1	1	1	**1.2**
9	1	0	0	0	0	0	0	0	**1.38**
10	1	0	0	0	0	0	0	0	**1.56**
11	1	0	0	0	0	0	0	0	**1.34**
12	1	0	0	0	0	0	0	0	**1.51**
13	1	0	0	0	0	0	0	0	**1.48**
14	1	0	0	0	0	0	0	0	**1.47**

Coefficients

Y_{0bar}= 1,4567

$$s_{rep}^2 = \frac{\sum\left(Y_{i0} - Y_{0moy}\right)^2}{n_0 - 1}$$

S^2rep=	0.0067
n= 5-1=4 ddl	

a_i		t_i	intervalle de confiance		Signification
a_0	1.46	50.35	1.385	1.535	
a_1	0.005	0.17	-0.070	0.080	NS
a_2	-0.13	4.48	-0.205	-0.055	S
a_3	-0.0275	0.95	-0.102	0.047	NS
a_{12}	-0.025	0.86	-0.100	0.050	NS
a_{13}	-0.0275	0.95	-0.102	0.047	NS
a_{23}	-0.0225	0.78	-0.097	0.052	NS
a_{123}	-0.0325	1.12	-0.107	0.042	NS

t_{tab}(0,05,7)= 2,36

Équation du modèle: $Y = 1,46 - 0,13.X_2$

aj	Y^	(Yi-Yi^)²		(Y^-Ymoy)²		(Y-Ymoy)²
1.46	1.59	0.0004		0.0169		0.0121
0	1.59	0.0009		0.0169		0.0256
-0.13	1.33	0.0001		0.0169		0.0144
0	1.33	0.0081		0.0169		0.0016
0	1.59	0.0016		0.0169		0.0081
0	1.59	0.0009		0.0169		0.0256
0	1.33	0.0009		0.0169		0.01
0	1.33	0.0169		0.0169		0.0676
	S^2res=	0.005		0.1352		0.165

ddl (S^2res)=8-2=6

ddl (S^2reg)=2-1=1

$$s_{res}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2}{N - p}$$

$$s_{reg}^2 = \frac{\sum (Y_i - \widehat{Y}_i)^2}{p - 1}$$

ddl (S²res)=8-2=6	
ddl (S²reg)=2-1=1	

S²res=	**0.005**
S²reg	**0.1352**

test de recherche de biais:		
F=S²res/S²repr		
F=	0.736166	
F(0,05,ddl1 6 et ddl2=5)		
F tab=4,95		
on trouve que F calc < Ftab		

test de validation de la régression		
F=S²reg/S²res		
F=	27.22148	
F(0,05;ddl1 1 ; ddl2=6)		
F tab=5,99		
on trouve que F calc > Ftab		

Validation du modèle:

3- coefficient de corrélations: N=16 essais; p=6 coefficients significatifs

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}$$

$$\overline{R}^2 = R^2 - (1 - R^2)\frac{(l-1)}{(N-l)}$$

R^2 =	0,819
R^2ajusté =	0,789