Méthode de Gauss-Jordan

Variante de la méthode de Gauss (`gauss1`):
à la $k^{ème}$ etape, on combine toutes les lignes (sauf la ligne k) avec la ligne k (au lieu de ne le faire que pour les lignes d'indice supérieur à k)
On fait ainsi apparaître des 0 sur toute la colonne sauf au niveau du pivot $a_{kk}^{(k)}$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & 4 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$\boxed{\text{ligne 1 /2}}$
ligne 2 - 3 $*$ ligne 1
ligne 3 - 4 $*$ ligne 1

$\boxed{\text{ligne 2 / } \frac{3}{2}}$

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/3 & 10/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right]$$

$\boxed{\text{ligne 1 - } \frac{1}{2} * \text{ligne 2}}$
ligne 3 - 3 $*$ ligne 2

$\boxed{\text{ligne 3 / 4}}$

$$A^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$\boxed{\text{ligne 1 + } \frac{7}{3} * \text{ligne 3}}$
$\boxed{\text{ligne 2 - } \frac{2}{3} * \text{ ligne 3}}$

On a directement les racines dans la 4^e colonne.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & a_{14}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \end{array}\right]$$

$$A^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a_{13}^{(3)} & a_{14}^{(3)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & a_{24}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \end{array}\right]$$

$$A^{(4)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_{14}^{(4)} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24}^{(4)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(4)} \end{array}\right]$$

Les solutions sont dans $A^{(n+1)}(:, n+1) = B^{(n+1)}$.
Il n'y a donc pas de phase de remontée.
Mais on fait plus d'opérations.

Algorithme

Comme précédemment pour :
- recheche du pivot (non nul ou max)
- nouvelle ligne k

différent pour :
- nouvelles lignes i

<u>pour $k = 1$ à n</u>

    recherche du pivot (non nul ou max)
    échange éventuel de lignes
    $\{$le pivot $a_{kk} \neq 0\}$

    division de la ligne k par a_{kk}

    <u>pour $i = 1$ à n sauf k</u>,
        retrancher à la ligne i
          la nouvelle ligne k multipliée par a_{ik}
          (pour les colonnes de k (ou $k+1$) à n

les solutions sont dans la $(n+1)^{ème}$ colonne
$(x_i = a_{i,n+1})$

Complexité

Le nombre d'opérations est de l'ordre de n^3 au lieu de $\frac{2n^3}{3}$
A vérifier en exercice.

Donc moins intéressant que l'algorithme de Gauss.
Mais application intéressante pour le calcul de l'inverse d'une matrice.

Calcul de l'inverse d'une matrice

La formule théorique $(A^{-1})_{ij} = \frac{cofacteur(a_{ij})}{dét(A)}$ est inutilisable pratiquement.

On utilise la propriété suivante :

le j^e vecteur colonne de A^{-1} est $X_j = A^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$

et est donc solution du système $AX_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$

On va résoudre les n systèmes en même temps par la méthode de Gauss-Jordan
$\left[\begin{array}{c|ccc} A & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ conduira à $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$
et $A^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}$

Calcul

A Exemple

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & b_{11}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_{21}^{(2)} & 1 & 0 \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & b_{31}^{(2)} & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a_{13}^{(3)} & b_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & b_{21}^{(3)} & b_{22}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & b_{31}^{(3)} & b_{32}^{(3)} & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7/3 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11}^{(4)} & b_{12}^{(4)} & b_{13}^{(4)} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21}^{(4)} & b_{22}^{(4)} & b_{23}^{(4)} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31}^{(4)} & b_{32}^{(4)} & b_{33}^{(4)} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19/12 & -3/2 & 7/12 \\ 0 & 1 & 0 & -7/6 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} \qquad \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 19 & -18 & 7 \\ -14 & 12 & -2 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Vérifier que $A * A^{-1}$=I
La vérification est plus facile que le calcul !
Elle permet de trouver une erreur éventuelle ou d'être **sûr** que le calcul est correct.

La moitié de l'espace utilisé est inutile. On n'utilisera qu'une matrice et on rangera au fur et à mesure les nouvelles colonnes de B à la place des colonnes de A devenues inutiles.

A	Exemple
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$
$\left[\begin{array}{c\|cc} b_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ b_{31}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{c\|cc} 1/2 & 1/2 & -2 \\ -3/2 & 3/2 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{array}\right]$
$\left[\begin{array}{cc\|c} b_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} \\ b_{21}^{(3)} & b_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} \\ b_{31}^{(3)} & b_{32}^{(3)} & a_{33}^{(3)} \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & -1/3 & -7/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$
$\begin{bmatrix} b_{11}^{(4)} & b_{12}^{(4)} & b_{13}^{(4)} \\ b_{21}^{(4)} & b_{22}^{(4)} & b_{23}^{(4)} \\ b_{31}^{(4)} & b_{32}^{(4)} & b_{33}^{(4)} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 19/12 & -3/2 & 7/12 \\ -7/6 & 1 & -1/6 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$
A^{-1}	$\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 19 & -18 & 7 \\ -14 & 12 & -2 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

Premier algorithme

Calcul de l'inverse de la matrice A.
A devient la matrice identité.
Le résultat est dans $A(: \, , \, n+1 : 2n)$.

$A(n+1 : 2n, :) = diag(ones(1, n))$ {identité}
ou $A = [A, diag(ones(1, n))]$
$perm = 1 : n$ {pour tout i $perm(i) = i$}
{$perm$ servira à mémoriser les permutations}
{$perm(i) = l$ signifie qu'il y a eu permutation des lignes i et l}

pour $k = 1$ à n
  recherche du pivot maximal
  $a_{max} = 0; l = k;$
  pour $i = k$ à n, si $abs(A(i, k)) > a_{max}$
    alors $l = i$
      $a_{max} = abs(A(i, k))$
  si $a_{max} = 0$ alors (matrice singulière,
    pas d'inverse, retour)
  si $l \neq k$ alors
    permuter les lignes l et k entre k et $n + k - 1$
    permuter $perm(l)$ et $perm(k)$

  $p = A(k, k)$ {c'est le pivot}

  {nouvelle ligne k}
  $A(k, [k : n + k]) = A(k, [k : n + k])/p$
  {pour $k : n$, c'est $A^{(k)}$,}
  {pour $n + 1 : n + k$ c'est les
    "seconds membres"}
  {nouvelles lignes i}
  pour $i = 1$ à n sauf k
  $A(i, [k : n + k]) = A(i, [k : n + k]) -$
    $A(i, k) * A(k, [k : n + k])$

{permutations éventuelles des colonnes}
pour $j = 1$ à n
si $perm(j) \neq j$ alors
{Attention, permuter une seule fois}
  soit k tel que $perm(k) = j$
  permuter colonnes $n + k$ et $n + j$
  $perm(k) = perm(j)$

Meilleur algorithme

Calcul de l'inverse de la matrice A.
Le résultat est dans A.
(Pour conserver la valeur initiale de A on fera une sauvegarde avant les calculs ou on écrira une fonction inverse(A) qui renvoie l'inverse.)

$perm = 1 : n$ {$perm(i) = i$}
{$perm$ servira à mémoriser les permutations
{$perm(i) = l$ signifie qu'il y a eu permutation des lignes i et l}

pour $k = 1$ à n
  recherche du pivot maximal
  $a_{max} = 0; l = k;$
  pour $i = k$ à n, si $abs(A(i, k)) > a_{max}$
    alors $l = i$
      $a_{max} = abs(A(i, k))$
  si $a_{max} = 0$ alors (matrice singulière,
    pas d'inverse, retour)
  si $l \neq k$ alors permuter les lignes l et k
    permuter $perm(l)$ et $perm(k)$

$p = A(k,k)$ {c'est le pivot}

{nouvelle ligne k}
$A(k,[1:k-1,k+1:n]) =$
$A(k,[1:k-1,k+1:n])/p$
{pour $k+1:n$, c'est $A^{(k)}$,
pour $1:k-1$ c'est les "seconds membres"}

{nouvelles lignes i}
pour $i = 1$ à n sauf k
$A(i,[1:k-1,k+1:n]) = A(i,[1:k-1,k+1:n])$
- $A(i,k) * A(k,[1:k-1,k+1:n])$

{colonne k ("seconds membres")}
$A([1:k-1,k+1:n],k) =$
$-A([1:k-1,k+1:n],k)/p$ {$0 - a_{ik}/p$}
$A(k,k) = 1/p$

{permutations éventuelles des colonnes}
pour $j = 1$ à n
si $perm(j) \neq j$ alors
{Attention, permuter une seule fois}
soit k tel que $perm(k) = j$
permuter colonnes k et j
$perm(k) = perm(j)$