Université A. Mira Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I
Première année M.I.

10 – 03 – 2020
Durée : 1h30mn

Examen d'Algèbre 1

Exercice 1. (08 points)

1. Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x-y \end{array}$$

a) Déterminer $f^{-1}(\{1\})$ et le représenter graphiquement.

b) L'application f est-elle injective ?

c) Montrer que f est surjective.

2. Soit l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t,\ t^2) \end{array}$$

a) Déterminer $g(\mathbb{R})$ et le représenter graphiquement.

b) L'application g est-elle surjective ?

c) Soit $\mathbf{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. Déterminer $g^{-1}(\mathbf{D})$ et $g(g^{-1}(\mathbf{D}))$.

3. Déterminer $f \circ g$. Cette application est-elle injective ?

Exercice 2. (06.5 points)

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow |x^2-1| = |y^2-1|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les classes d'équivalence $\dot{0}$, $\dot{1}$.

3. On définit la même relation $\mathcal{R}$ sur $[1,+\infty[$. Déterminer dans ce cas le cardinal de la classe d'équivalence $\dot{x}$, pour tout $x \in [1,+\infty[$.

Exercice 3. (05.5 points)

On définit dans $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $(\star)$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \star y = xy + (x^2-1)(y^2-1)$$

1. La loi $(\star)$ est-elle commutative ?

2. La loi $(\star)$ admet-elle un élément neutre ?

3. Calculer $(2 \star 2) \star 3$ et $2 \star (2 \star 3)$. Que peut-on en déduire ?

4. Calculer le(s) symétrique(s) de l'élément 2 pour la loi $(\star)$.