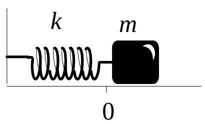
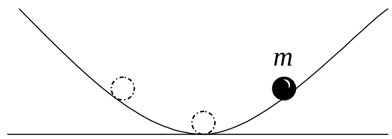
PARTIE I. VIBRATION
CHAPITRE 1. Généralités sur les vibrations.

1.1 Définition d'une oscillation (vibration)
On appelle oscillation, un mouvement qui s'effectue de **part et d'autre** d'une position d'équilibre. (Par **vibration,** on désigne les oscillations **rapides** des systèmes **mécaniques**.)

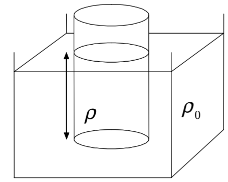
Exemples



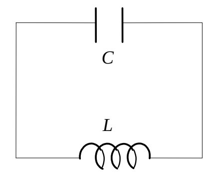
a) Masse-ressort sur un plan



b) Masse au fond d'une vallée



c) Cylindre flottant dans un liquide



d) Circuit électrique oscillant

1.2 Définition d'un mouvement périodique
Un mouvement est dit périodique s'il se répète identique à lui même pendant des intervalles de temps égaux. Le plus petit intervalle de répétition est appelé **période** (notée T , mesurée en secondes "s".) Le nombre de répétitions par seconde est appelé **fréquence** (notée f, mesurée en **Hertz** ou s^{-1}.) Elle est reliée à la période par

$$\boxed{\mathbf{f} = \frac{1}{\mathbf{T}}.} \tag{1.1}$$

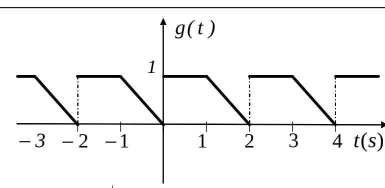
Le nombre de tours par seconde est appelé **pulsation** (notée ω, mesurée en **rad/s**.)

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = 2\pi\mathbf{f} = \frac{2\pi}{\mathbf{T}},} \tag{1.2}$$

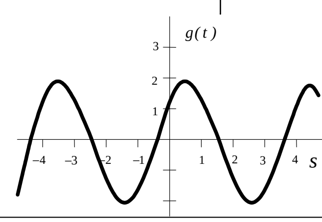
Mathématiquement, la périodicité s'exprime par $g(t+T) = g(t)$.
Une grandeur périodique est dite **sinusoïdale** lorsqu'elle est de la forme $g(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.
A est appelée **amplitude**, ω : la **pulsation**, φ : la **phase initiale**.
Parmi les grandeurs physiques étudiées des systèmes oscillants, on trouve:
• le déplacement x. • l'angle θ. • la charge q. • le courant i. • la tension u. • un champ E.

Exemples

a) Soit la grandeur périodique $g(t)$ représentée ci-contre.
$T = 2s$. $f = 1/T = 0,5Hz$.
$\omega = 2\pi f = \pi\mathbf{rad/s}$.



b) Soit la grandeur sinusoïdale $g(t) = 2\sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6})$ représentée ci-contre.
$\omega = \frac{\pi}{2}$. $T = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\mathbf{s}$.
$f = 1/T = 0,25Hz$. $\varphi = \pi/6$. $A = 2$.



1.3 La représentation complexe

Pour faciliter les calculs, nous transformons les grandeurs sinusoïdales en des exponentielles qui sont plus simples à manipuler. Ceci est possible grâce à la formule d'Euler (1748)

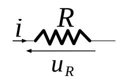
$$\boxed{\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}} \quad (j^2 = -1). \tag{1.3}$$

Exemples

a) Soit le mouvement $x(t) = x_0 \cos(3t+5)$.

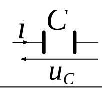
Trouver à l'aide de la représentation complexe la vitesse $\dot{x}(t)$ et l'accélération $\ddot{x}(t)$.

$$\begin{array}{lcl} x(t) = x_0\cos(3t+5) & \longrightarrow & \underline{x}(t) = x_0 e^{j(3t+5)}. \\ \dot{x}(t) = 3x_0\cos\left(3t+5+\frac{\pi}{2}\right) & \longleftarrow & \underline{\dot{x}}(t) = 3jx_0e^{j(3t+5)} = 3x_0e^{j\left(3t+5+\frac{\pi}{2}\right)} \\ \ddot{x}(t) = -9x_0\cos(3t+5) & \longleftarrow & \underline{\ddot{x}}(t) = -9x_0e^{j(3t+5)} \end{array}$$

b) Soit une résistance R et un courant $i(t) = I_0 \cos\omega t$. 

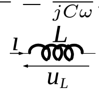
Trouver l'impédance complexe $\underline{Z}_R = \frac{\underline{u}_R}{\underline{i}}$. $\boxed{\text{Rappel: } u_R = Ri.}$

$$\begin{array}{lcl} i(t) = I_0\cos\omega t & \longrightarrow & \underline{i}(t) = I_0e^{j\omega t}. \\ u_R(t) = Ri(t) & \longrightarrow & \underline{u}_R(t) = R\underline{i}. \end{array} \Longrightarrow \underline{Z}_R = \frac{\underline{u}_R}{\underline{i}} = \frac{R\underline{i}}{\underline{i}} \Longrightarrow \boxed{\underline{Z}_R = R.}$$

c) Soit un condensateur et un courant $i(t) = I_0 \cos\omega t$. 

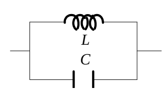
Trouver l'impédance complexe $\underline{Z}_C = \frac{\underline{u}_c}{\underline{i}}$. $\boxed{\text{Rappel: } u_c = \frac{q}{C} = \frac{\int idt}{C}. \text{ Car } i = \frac{dq}{dt}.}$

$$\begin{array}{lcl} i(t) = I_0\cos\omega t & \longrightarrow & \underline{i}(t) = I_0e^{j\omega t}. \\ u_c(t) = \frac{\int i(t)dt}{C} & \longrightarrow & \underline{u}_c(t) = \frac{\int \underline{i}(t)dt}{C} = \frac{\int I_0e^{j\omega t}dt}{C} = \frac{I_0e^{j\omega t}}{jC\omega} = \frac{\underline{i}}{jC\omega}. \end{array} \Longrightarrow \underline{Z}_C = \frac{\underline{u}_c}{\underline{i}} = \frac{\underline{i}}{jC\omega\underline{i}} = \boxed{\frac{1}{jC\omega}.}$$

d) Soit une bobine L et un courant $i(t) = I_0 \cos\omega t$. 

Trouver l'impédance complexe $\underline{Z}_L = \frac{\underline{u}_L}{\underline{i}}$. $\boxed{\text{Rappel: } u_L = L\frac{di}{dt}.}$

$$\begin{array}{lcl} i(t) = I_0\cos\omega t & \longrightarrow & \underline{i}(t) = I_0e^{j\omega t}. \\ u(t) = L\frac{di}{dt} & \longrightarrow & \underline{u}(t) = L\frac{d\underline{i}}{dt} = L\frac{d(I_0e^{j\omega t})}{dt} = jL\omega I_0e^{j\omega t} = jL\omega\underline{i}. \end{array} \Longrightarrow \underline{Z}_L = \frac{\underline{u}_L}{\underline{i}} = \frac{jL\omega\underline{i}}{\underline{i}} = \boxed{jL\omega.}$$

e) Trouver l'impédance $\underline{Z}$ du circuit ci-contre: 

Comme les deux éléments sont en parallèle, on a: $\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_L\underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{jL\omega.\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}.$

1.4 Superposition des grandeurs périodiques

L'addition de deux ou plusieurs grandeurs de même nature est appelée superposition.

1.4.1 Grandeurs sinusoïdales de même *pulsation*

La superposition de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation ω est une grandeur **sinusoïdale** de pulsation ω.

Exemples

a) Soit les deux grandeurs sinusoïdales : $g_1(t) = a\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $g_2(t) = b\cos(\omega t + \varphi_2)$.
Utilisons la représentation complexe pour trouver $(g_1 + g_2)(t)$.

$$g_1(t) + g_2(t) = a\cos(\omega t + \varphi_1) + b\cos(\omega t + \varphi_2) \longrightarrow ae^{j(\omega t+\varphi_1)} + be^{j(\omega t+\varphi_2)} = \left(ae^{j\varphi_1} + be^{j\varphi_2}\right)e^{j\omega t}$$
$$= Ae^{j\Phi}e^{j\omega t}$$
$$(g_1 + g_2)(t) = A\cos(\omega t + \Phi) \qquad \longleftarrow \qquad = Ae^{j(\omega t+\Phi)}.$$

Ceci est bien une grandeur sinusoïdale de pulsation ω.
L'amplitude est $A = \left|\left(ae^{j\varphi_1} + be^{j\varphi_2}\right)e^{j\omega t}\right| = \sqrt{\left(ae^{j\varphi_1} + be^{j\varphi_2}\right)\left(ae^{-j\varphi_1} + be^{-j\varphi_2}\right)}$
$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$.
La phase Φ est donnée par $\tan\Phi = \dfrac{\operatorname{Im}\left(ae^{j\varphi_1} + be^{j\varphi_2}\right)}{\operatorname{Re}\left(ae^{j\varphi_1} + be^{j\varphi_2}\right)} = \dfrac{a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2}{a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2}$.
$Ae^{j\Phi}$ est appelée amplitude complexe et notée $\underline{A}$

b) Soit les deux grandeurs sinusoïdales : $g_1(t) = \sqrt{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$ et $g_2(t) = \sin(3t + \pi)$.
La superposition est

$$\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \tfrac{\pi}{4}\right) + \sin(\omega t + \pi) \longrightarrow \sqrt{2}e^{j(\omega t - \frac{\pi}{4})} + e^{j(\omega t + \pi - \frac{\pi}{2})}$$
$$= (\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{\pi}{2}})e^{j\omega t}$$
$$\cos(\omega t) \qquad \longleftarrow \qquad = \qquad 1.e^{j\omega t}$$

Donc, $A = 1.$ $\Phi = 0.$

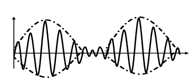
1.4.2 Grandeurs sinusoïdales de même *amplitude*

La superposition de deux grandeurs sinusoïdales de même **amplitude** est une grandeur sinusoïdale à amplitude **modulée** si les deux pulsations sont **différentes**.

Exemple

Soit les deux grandeurs sinusoïdales: $g_1(t) = a\cos\omega_1 t$, $g_2(t) = a\cos\omega_2 t$.
La superposition est: $g_1(t) + g_2(t) = a\cos\omega_1 t + a\cos\omega_2 t = \underbrace{\mathbf{2}a\mathbf{cos}\left(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{\mathbf{2}}\mathbf{t}\right)}_{\text{Amplitude modulée (variable)}} \;\mathbf{cos}\;\underset{\uparrow\ \text{Pulsation résultante}}{\left(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{\mathbf{2}}\mathbf{t}\right)}$.

Remarque: Lorsque $\omega_1 \approx \omega_2$: $\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ est très faible, alors $2a\cos(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)$ constitue une enveloppe à la composante plus rapide $\cos(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}t)$.
C'est le phénomène de **battement**.



1.4.3 Grandeurs sinusoïdales *quelconques*

La superposition de deux grandeurs sinusoïdales de pulsations **différentes** ω_1 et ω_2 ne sera une grandeur périodique **que si** le rapport entre leur périodes est un nombre **rationnel**: $T_1/T_2 = n/m$. La période résultante est le plus petit multiple commun: $T = mT_1 = nT_2$.

Exemples

a) Soit les deux grandeurs sinusoïdales : $g_1(t) = 5\cos(5t + 2)$, $g_2(t) = 2\cos(7t + 3)$.
Leur superposition est $5\cos(5t + 2) + 2\cos(7t + 3)$.
Comme $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{2\pi/5}{2\pi/7} = \dfrac{7}{5} = \dfrac{n}{m}$ est un nombre rationnel $(n = 7, m = 5)$, la superposition est une grandeur périodique de période $T = m \times \dfrac{2\pi}{5} = n \times \dfrac{2\pi}{7} = 2\pi$**s**.

b) Soit les deux grandeurs sinusoïdales : $g_1(t) = 5\cos(5\pi t + 2)$, $g_2(t) = 2\cos(7t + 3)$.
Leur superposition est $5\cos(5\pi t + 2) + 2\cos(7t + 3)$.
Comme $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{2\pi/5\pi}{2\pi/7} = \dfrac{7}{5\pi}$ n'est pas rationnel, la superposition n'est pas périodique.

1.5 Définition des séries de Fourier

Il est possible d'exprimer une grandeur périodique par une somme de sinus et de cosinus qui sont plus simples à manipuler physiquement et mathématiquement. Cette somme est appelée **série de Fourier** (1807).

La série de Fourier d'une fonction $f(t)$ périodique de période T, est définie par:

$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t).} \tag{1.4}$$

• Le a_0, les a_n, et les b_n sont appelés les **coefficients** de Fourier.
• La pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est appelée la pulsation **fondamentale**.
• Les pulsations supérieures $n\omega$ (multiples de ω) sont appelées les **harmoniques**.
• Les coefficients de Fourier sont définis par:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt.} \tag{1.5}$$

• Le graphe de a_n et b_n (et parfois $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$) en fonction de $n\omega$ est appelé le **spectre** de la fonction.

1.5.1 Cas des fonctions paires et impaires

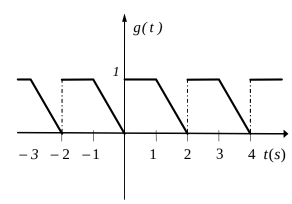
• **Fonctions paires**: Une fonction est dite paire si $f(-t) = f(t)$.
Dans la série de Fourier des fonctions paires, il n'y a que les termes en **cosinus** et parfois la **constante** a_0 qui est la valeur moyenne de la fonction: $b_n = \mathbf{0}$.

• **Fonctions impaires**: Une fonction est dite impaire si $f(-t) = -f(t)$.
Dans la série de Fourier des fonctions impaires, il n'y a que les termes en **sinus**: $a_0 = a_n = \mathbf{0}$.

Exemple

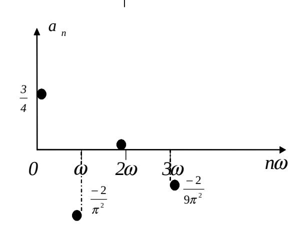
1. La période de la fonction est T=**2s**.

2. $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 1.\mathrm{d}t + \int_1^2 (-t+2).\mathrm{d}t\right] = \frac{3}{4}.$



$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 \cos\pi nt\ \mathrm{d}t + \int_1^2 (-t+2)\cos\pi nt\ \mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{\cos\pi n - 1}{\pi^2 n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair.} \\ \frac{-2}{\pi^2 n^2} \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$



$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 \sin\pi nt\ \mathrm{d}t + \int_1^2 (-t+2)\sin\pi nt\ \mathrm{d}t\right] = \frac{1}{\pi n}.$$

Donc la série de Fourier est, $f(t) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}\cos \boldsymbol{n}\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}\sin \boldsymbol{n}\omega t$

Le spectre de $f(t)$ sera pris comme étant le graphe des a_n et b_n en fonction de $n\omega$.