

CHAPITRE IV. Systèmes linéaires forcés à un degré de liberté.

4.1 Force d'excitation

Pour vaincre les frottements responsables des pertes d'énergie et du ralentissement des systèmes en mouvement, il faut appliquer une force externe qu'on appelle **excitation**.

4.2 Équation de Lagrange des systèmes forcés

Si en plus du frottement $f = -\alpha\dot{q}$, il existe une force d'excitation externe $F(t)$, l'équation de Lagrange s'écrit:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} + F(t)} \quad (\text{En translation}) \quad (4.1.a)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} + \mathcal{M}(t)} \quad (\text{En rotation. } \mathcal{M} \text{ est le moment de la force } F.) \quad (4.1.b)$$

4.3 Équation du mouvement des systèmes forcés

L'équation du mouvement des systèmes linéaires amortis par $f = -\alpha\dot{q}$ et excités par $F(t)$ est de la forme (a est une constante)

$$\boxed{\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = F(t)/a.} \quad (4.2)$$

4.4 Résolution de l'équation du mouvement

La résolution de l'équation (4.2) est très simple pour une excitation sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos \Omega t$. Dans ce cas (4.2) s'écrit: $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = (F_0/a) \cos \Omega t$. La solution générale de cette équation est:

$$q(t) = q_T(t) + q_P(t).$$

- $q_T(t)$ est la solution (**transitoire**) de l'équation homogène (sans F). Elle dépend du signe de $\lambda^2 - \omega_0^2$. Elle est dite transitoire car elle s'éteint au cours du temps (*Voir Chap. III*)
- $q_P(t)$ est la solution (**permanente**) de l'équation nonhomogène (avec F). Elle est appelée permanente car elle dure tout au long du mouvement. Elle est de la forme $q(t) = A \cos(\Omega t + \phi)$. On trouve A et ϕ à l'aide de la représentation complexe comme suit:

$$\boxed{F_0 \cos \Omega t \longrightarrow F_0 e^{j\Omega t}, \quad q(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{q}(t) = \underline{A} e^{j(\Omega t + \phi)} = \underline{A} e^{j\Omega t}.}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = (F_0/a) \cos \Omega t &\longrightarrow \ddot{\underline{q}} + 2\lambda\dot{\underline{q}} + \omega_0^2 \underline{q} = (F_0/a) e^{j\Omega t} \\ \implies -\Omega^2 \underline{A} e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega \underline{A} e^{j\Omega t} + \omega_0^2 \underline{A} e^{j\Omega t} &= (F_0/a) e^{j\Omega t} \\ \implies (-\Omega^2 + 2\lambda j\Omega + \omega_0^2) \underline{A} &= F_0/a \end{aligned}$$

$$\implies \underline{A} = \frac{F_0/a}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\lambda\Omega}. \quad (4.3)$$

L'amplitude du mouvement est donc:

$$A = |\underline{A}| = \frac{F_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}}. \quad (4.4)$$

La phase ϕ du mouvement (déphasage entre $q(t)$ et $F(t)$) est donnée par:

$$\tan \phi = \frac{\text{Im}(\underline{A})}{\text{Re}(\underline{A})} = -\frac{2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}. \quad (4.5)$$

Finalement la solution du mouvement en **régime permanent** est

$$\boxed{q(t) = A \cos(\Omega t + \phi). \quad (\text{Avec } A \text{ donné par (4.4) et } \phi \text{ donnée par (4.5)})} \quad (4.6)$$

4.5 Résonance

La pulsation d'excitation Ω pour laquelle l'amplitude A atteint son maximum est appelée **pulsation de résonance** (d'amplitude) Ω_R . A est maximale lorsque $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$. D'après (4.4) :

$$\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0 \implies \frac{[-4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\lambda^2\Omega](F_0/a)}{2[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2]^{3/2}} = 0 \implies -4(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\lambda^2 = 0, \text{ soit}$$

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \equiv \Omega_R.} \iff \boxed{\Omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.} \quad (4.7)$$

À cette pulsation, l'amplitude est

$$\boxed{A_{\max} = \frac{F_0/a}{\sqrt{4\lambda^2\omega_0^2 - 4\lambda^4}}} \iff \boxed{A_{\max} = \frac{F_0}{a\omega_0^2} \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.} \quad (4.8)$$

Pour qu'il y ait résonance il faut que: $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \implies 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \implies Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$:

Le facteur de qualité doit donc être supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}} \implies$ l'amortissement doit être faible.

D'après (4.5), $\tan \phi = -\infty$ ($\phi = -\frac{\pi}{2}$) lorsque

$$\boxed{\Omega = \omega_0.} \quad (4.9)$$

Cette pulsation est appelée pulsation de **résonance de phase**.

4.6 Bande passante et facteur de qualité

La puissance instantanée fournie par la force d'excitation est: $\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dq}{dt} = F \cdot \dot{q}$.

En utilisant (4.6), on trouve: $\mathcal{P} = -F_0 \cos \Omega t \cdot \Omega A \sin(\Omega t + \phi) = -\frac{1}{2} \Omega A F_0 [\sin \phi + \sin(2\Omega t + \phi)]$.

La puissance moyenne est $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P} dt = -\frac{1}{2} \Omega A F_0 \sin \phi = -\frac{1}{2} \Omega A F_0 \frac{\tan \phi}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}}$. D'après (4.4) et (4.5):

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\Omega^2 \lambda (F_0^2/a)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}. \quad (4.10)$$

$\langle \mathcal{P} \rangle$ est maximale lorsque $\frac{\partial \langle \mathcal{P} \rangle}{\partial \Omega} = 0 \implies$

$$\boxed{\Omega = \omega_0.} \quad (4.11)$$

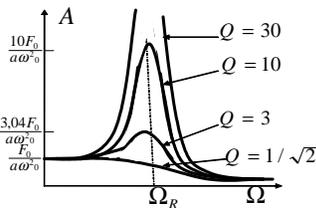
$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle_{\max} = \frac{F_0^2}{4\lambda a}.}$$

Les pulsations Ω_{c1} et Ω_{c2} pour lesquelles $\langle \mathcal{P} \rangle$ est à moitié de son maximum sont appelées **pulsations de coupure**. La largeur $\Omega_{c2} - \Omega_{c1} = B$ est appelée la **bande passante**. D'après (4.10), $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle_{\max}}{2}$ (à faible amortissement: $\lambda \ll \omega_0$) pour $\Omega_{c1} \approx \omega_0 - \lambda$ et $\Omega_{c2} \approx \omega_0 + \lambda$. Donc

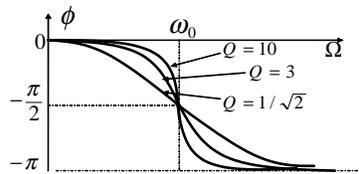
$$\boxed{B = 2\lambda.} \quad (4.12)$$

$\frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{2\lambda} = Q$ est le **facteur de qualité** (Voir Chap. III).

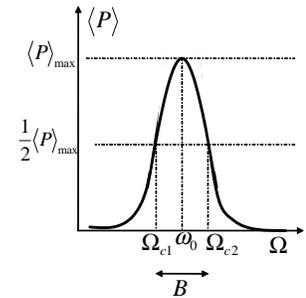
Les graphes de A , ϕ , et $\langle \mathcal{P} \rangle$ en fonction de la pulsation d'excitation Ω sont:



$$A = \frac{F_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}}.$$



$$\phi = \tan^{-1} \left[-\frac{2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \right].$$



$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\Omega^2 \lambda (F_0^2/a)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}$$

Analogie entre les systèmes mécaniques et électriques

Le formalisme développé en cours est valable pour toute coordonnée généralisée q . Dans le cas des systèmes mécaniques q peut être x, y, z, θ, \dots , alors que dans le cas des systèmes électriques q est la charge q qui circule dans le circuit. Nous avons alors les tableaux suivants des analogies mécanique-électrique.

Analogie entre grandeurs

Système Mécanique			Système Electrique		
Grandeur	réelle	complexe	Grandeur	réelle	complexe
Coordonnée	x	\underline{x}	Charge	q	\underline{q}
Vitesse	$v = \dot{x}$	$\underline{v} = \underline{\dot{x}}$	Courant	$i = \dot{q}$	$\underline{i} = \underline{\dot{q}}$
Force	F	\underline{F}	Tension	E	\underline{E}

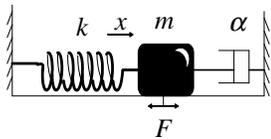
Analogie entre formules

Système Mécanique		Système Electrique	
Formule	complexe	Formule	complexe
Impédance mécanique	$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{v}}$	Impédance électrique	$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{i}}$
Force d'inertie	$m \frac{dv}{dt} = jm\omega \underline{v}$	f.c.e.m d'inductance	$L \frac{di}{dt} = jL\omega \underline{i}$
Force de frottement	$\alpha \underline{v}$	Tension d'une résistance	$R \underline{i}$
Force d'un ressort	$k \underline{x} = k \int \underline{v} dt = \frac{k}{j\omega} \underline{v}$	Tension d'une capacité	$\frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int \underline{i} dt = \frac{1}{jC\omega} \underline{i}$

Analogie entre éléments et caractéristiques

Système Mécanique		Système Electrique	
Ressort	k	Capacité inverse	$\frac{1}{C}$
Inertie	m	Inductance	L
Frottement	α	Résistance	R
Pulsation de résonance	$\sqrt{k/m}$	Pulsation de résonance	$1/\sqrt{LC}$
Bande passante	$2\lambda = \alpha/m$	Bande passante	$2\lambda = R/L$
Energie d'un ressort	$\frac{1}{2} kx^2$	Energie d'un condensateur	$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$
Energie cinétique d'un corps	$\frac{1}{2} mv^2$	Energie d'une bobine	$\frac{1}{2} Li^2$
Puissance dissipée par frottement	αv^2	Puissance dissipée par effet Joule	Ri^2

Exemple

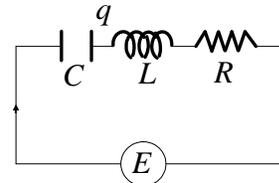


$$-k\underline{x} - \alpha \underline{v} + \underline{F} = m \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$\underline{F} = \frac{k}{j\omega} \underline{v} + jm\omega \underline{v} + \alpha \underline{v}$$

Impédance mécanique

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{v}} = \frac{k}{j\omega} + jm\omega + \alpha$$



$$\frac{1}{C} \int \underline{i} dt + L \frac{di}{dt} + R \underline{i} - \underline{E} = 0$$

$$\underline{E} = \frac{1}{jC\omega} \underline{i} + jL\omega \underline{i} + R \underline{i}$$

Impédance électrique

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{i}} = \frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R$$