Série de TD n°1

Exercice 1 :

1. La formule suivante est-elle valide dimensionnellement ? Faire une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

$$F = \frac{G.m_1}{R}$$

Où F est la force, G une constante dont l'unité dans le système international (SI) est le $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$, m_1 est une masse et R une longueur.

2. La masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ d'un cylindre de masse $\boldsymbol{m}$, de rayon $\boldsymbol{R}$ et de longueur $\boldsymbol{l}$ est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \frac{m^x}{\pi l^y R^2}$$

2.1. En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver les deux constantes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$;

2.2. En déduire l'expression exacte de la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$.

Exercice 2 :

On considère, dans un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R}(Oxyz)$, les trois vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 4\vec{k} \;;\; \vec{V}_2 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k} \;;\; \vec{V}_3 = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

1. Calculer leurs modules.

2. Représenter le vecteur $\vec{V}_1$.

3. Calculer les composantes du vecteur $\vec{U} = \vec{V}_1 - 2\vec{V}_2 + 3\vec{V}_3$.

4. Déterminer la composante du vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{V}_1$.

5. Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1.\vec{V}_2$ et en déduire l'angle formé par ces deux vecteurs.

6. Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et en déduire l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs.

7. Calculer le produit mixte $\vec{V}_1.\left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$ et le double produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$.

Exercice 03 :

1. Calculer le gradient du champ scalaire suivant:

$$U(x,y,z) = 2x^2yz^3 - 3x^3y^2z$$

Evaluer $\overrightarrow{grad}U$ au point $M(1,-1,2)$.

2. Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (x^3y - 2xz)\vec{\imath} + (y^3z - 2yx)\vec{\jmath} + (z^3x - 2zy)\vec{k}$$

3. Calculer le rotationnel du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (2xy + z^3)\vec{\imath} + (x^2 + 2y)\vec{\jmath} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$$

Exercice 04 : (supplémentaire)

Soit les fonctions vectorielles de la variable réelle $t$suivantes :

$$\vec{r}_1(t) = (3t^2)\vec{\imath} - (2t^2)\vec{\jmath} + (t+1)\vec{k}$$

$$\vec{r}_2(t) = \cos(\omega t)\,\vec{\imath} - \sin(\omega t)\,\vec{\jmath} + e^{-\alpha t}\vec{k}$$

Où αet ωsont des constantes réelles positives. Calculer :

1. Leurs dérivées première et seconde par rapport àt ainsi que leurs modules.

2. L'intégrale$\int \vec{r}_1(t)dt$ sachant que pour $t = 0$, on a $\vec{r}_{10} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

Exercice 05 : (supplémentaire)

On considère dans le plan Oxy d'un repère orthonormé $Oxyz$, deux vecteurs unitaire perpendiculaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, d'origine O. Leurs sens est tel que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{k}$ forment un trièdre direct. Les vecteurs$\vec{u}$ et$\vec{v}$ tournent autour de Oz. On pose $(Ox, \vec{u}) = \theta$.

1. Exprimer $\vec{u}$ et $\vec{v}$en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et inversement.

2. Calculer $(d\vec{u}/d\theta)$ et $(d\vec{v}/d\theta)$.

3. Si $\theta = \theta(t)$, Calculer $(d\vec{u}/dt)$ et $(d\vec{v}/dt)$.

4. Soit le vecteur $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{u}$, calculer $(d\vec{r}/dt)$ et $(d^2\vec{r}/dt^2)$.

Corrigé

Exercice 01 :

1- On a $F = ma \rightarrow [F] = [m].[a] = MLT^{-2}$ …………………..(1)

$F = \frac{Gm_1}{R}, \rightarrow [F] = [G].[m_1].[R]^{-1}$.

La dimension de G : on a l'unité de G en SI est $\frac{m^3}{kgs^2}$ (m est le mètre), donc, sa dimension sera $[G] = L^3M^{-1}T^{-2}$.

$[F] = [G].[m_1].[R]^{-1} = L^3M^{-1}T^{-2}.M.L^{-1} = L^2T^{-2}$……………………….(2)

$1 \neq 2 \rightarrow$ Cette loi n'est pas homogène.

Rectification :

Pour que la loi soit homogène il faut multiplier (2) par la quantité $M.L^{-1}$ c'est à dire

(1) = (2) $\rightarrow MLT^{-2} = L^2T^{-2}M.L^{-1}$.

Donc, il faut multiplier l'expression de la loi de la force par une masse qu'on va appelée par exemple $m_2$et la devisée par une distance qu'on va appelée R. A la fin, on peut écrire :

$$F = \frac{Gm_1}{R}.\frac{m_2}{R} = \frac{Gm_1m_2}{R^2}$$

2.1 $\rho = \frac{m^x}{\pi l^y R^2} \rightarrow [\rho] = [m]^x[\pi]^{-1}[l]^{-y}[R]^{-2} = M^x 1 L^{-y}L^{-2} = M^xL^{-2-y}$

ρ est la masse volumique, sa relation générale est $\rho = \frac{m}{V}$, avec m la masse et V le volume.

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = ML^{-3}$$

Donc, $ML^{-3} = M^xL^{2-y}$

Par identification :

$$\begin{cases} x = 1 \\ -2 - y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$$

2.2 $\rho = \frac{m^1}{\pi l^1 R^2} = \frac{m}{\pi l R^2}$

Exercice 02 :

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{41} \;;\; \|\vec{V}_2\| = \sqrt{29} \;;\; \|\vec{V}_3\| = \sqrt{35}$$

$$\vec{U} = \vec{V}_1 - 2\vec{V}_2 + 3\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -13 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\vec{U} = 14\vec{\imath} - 13\vec{\jmath} + 21\vec{k}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|} = \frac{3}{\sqrt{41}}\vec{\imath} - \frac{4}{\sqrt{41}}\vec{\jmath} + \frac{4}{\sqrt{41}}\vec{k}$$

$$\vec{V}_1.\vec{\imath} = V_{1x} = \|\vec{V}_1\|\|\vec{\imath}\| \cos\alpha = \|\vec{V}_1\| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{V_{1x}}{\|\vec{V}_1\|} = \frac{3}{\sqrt{41}} = v_{1x}$$

$$\vec{V}_1.\vec{\jmath} = V_{1y} = \|\vec{V}_1\| \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{V_{1y}}{\|\vec{V}_1\|} = -\frac{4}{\sqrt{41}} = v_{1y}$$

$$\vec{V}_1.\vec{k} = V_{1z} = \|\vec{V}_1\| \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{V_{1z}}{\|\vec{V}_1\|} = \frac{4}{\sqrt{41}} = v_{1z}$$

On vérifie bien que : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (cosinus directerurs)

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = -22 = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\| \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \Rightarrow \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|} = -\frac{22}{1395}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{\imath} + 20\vec{\jmath} + 17\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs : $S = \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \sqrt{693}\ u.s$

$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 71$$

N.B. On peut aussi calculer $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ ensuite on fait le produit scalaire $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = 168\vec{\imath} + 103\vec{\jmath} - 23\vec{k}$$

Exercice 03

$$\overrightarrow{grad}U = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$\frac{\partial U}{\partial x} = 4xyz^3 - 9x^2y^2z$; $\frac{\partial U}{\partial y} = 2x^2yz^3 - 6x^3yz$ et $\frac{\partial U}{\partial z} = 6x^2yz^2 - 3x^3y^2$

$$\overrightarrow{grad}U = (4xyz^3 - 9x^2y^2z)\vec{\imath} + (2x^2z^3 - 6x^3yz)\vec{\jmath} + (6x^2yz^2 - 3x^3y^2)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}U(M) = \overrightarrow{grad}U(1,-1,2) = -48\vec{\imath} + 38\vec{\jmath} - 27\vec{k}$$

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 3(x^2y + y^2z + z^2x) - 2(x + y + z)$$

$$\overrightarrow{rotV} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$