Série N°02

Exercice 1

Un point matériel M, se déplaçant dans le plan(Oxy), est repéré par ses coordonnées cartésiennes:

$$x(t) = t^2 - 1, \quad y(t) = 2t$$

1. Ecrire l'équation cartésienne de la trajectoire de M;
2. Donner les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules ;
3. Quelle est la nature du mouvement de M ? Justifier ;
4. Donner les accélérations tangentielle et normale et déduire le rayon de courbure de la trajectoire ;
5. Calculer le sinus de l'angle $\alpha = (\overrightarrow{ox}, \vec{v})$;
6. En partant de l'expression de l'accélération et de l'angle α, retrouver l'expression de la composante normale de l'accélération.

Exercice 2

Dans un plan OXY, une particule M est repérée à tout instant t par ses coordonnées polaires (ρ, θ) telles que : $\begin{cases} \rho(t) = \mathrm{b}\cos(\omega t) \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$ où b et ω sont des constantes positives.

1- Dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ associée aux coordonnées polaires, déterminer les vecteurs position, vitesse et accélération de la particule M.

2- Toujours dans la même base, déterminer puis représenter les vecteurs position, vitesse et accélération aux instants $t_1 = 0s$ et $t_2 = \frac{\pi}{4\omega} s$.

Exercice 3

Un nageur plonge d'un point situé sur la rive d'un fleuve et veut atteindre l'autre rive. Pour cela, il nage perpendiculairement au courant avec une vitesse ne vitesse $\overrightarrow{v_1}$. Sa vitesse par rapport à la terre est $\overrightarrow{v_3}$ et la vitesse du vent est $\overrightarrow{v_2}$. On demande:

1- Identifier chacune des vitesses $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ aux vitesses, absolue $\overrightarrow{v_a}$, relative $\overrightarrow{v_r}$ et d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$.

2- Calculer la vitesse du nageur par rapport à la terre (module et direction). Faites un schéma.

3- a- suivant quelle direction le nageur doit-il s'orienté pour qu'il se déplace en ligne droite et perpendiculaire à la rive à la vitesse constante $\overrightarrow{v_3}$. faites un schéma.

b- quelle est alors la vitesse du nageur par rapport à la terre.

A.N. v_1=4m/s, v_2=3m/s

Exercice supplémentaire:

Exercice1

Une particule P se déplace le long de l'axe x avec l'accélération a donné par :
$a = 6t - 4$ ms^{-2}

Initialement P est au point x_0= 20 m et se déplace à une vitesse de v_0= 15 ms^{-1} dans **le sens négatif** de x.

1- Trouver la vitesse et le déplacement de P à l'instant t.
2- Trouvez le temps et la position de la particule au moment ou elle devienne immobile.

Exercice 2

Dans un repère R(O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$), le vecteur accélération d'un mobile M est $\vec{a} = -5\vec{\jmath}$. A l'instant t=0, $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{v_0} = 5\vec{\imath} + 10\vec{\jmath}$

1- Trouver les expressions des vecteurs de vitesse et de position à l'instant t quelconque.
2- Quelle est l'équation de la trajectoire.
3- Déterminer les accélérations tangentielle a_T et normal $a_N$et déduire le rayon de courbure de la trajectoire. A quel instant la composante tangentielle de l'accélération est-elle nulle.

Exercice 3

Dans un plan OXY, une particule M est repérée à tout instant t par ses coordonnées polaires (ρ, θ) telles que : $\begin{cases} \rho(t) = 1 \\ \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$ où α et une constante positive.

1- Trouver l'expression de l'équation de la trajectoire de M en coordonnées cartésiennes. Déduire sa nature.
2- Dans la base locale($\vec{e}_\rho$,$\vec{e}_\theta$) associée aux coordonnées polaires, déterminer les vecteurs position, vitesse et accélération de la particule M. Déduire leurs modules
3- Calculer l'abscisse curviligne s(t) de M sachant qu'à l'instant t=0s, s(0)=0

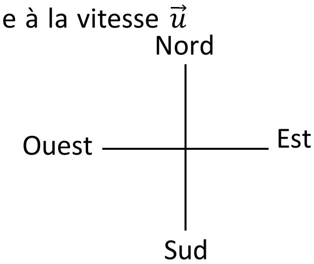
Exercice 4

L'abscisse curviligne d'un point matériel décrivant un cercle de rayon R est $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt$, a et b étant des constantes.

1. Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération.
2. Quel est l'angle θ balayé par le point matériel au cours du temps sachant qu'à $t = 0, \theta = 0$.

Exercice 5

Un avion se déplace vers le Nord à la vitesse $\vec{w}$ par rapport au vent. Si le vent souffle à la vitesse $\vec{u}$ dans la direction Ouest-Est et la vitesse de l'avion par rapport à la terre est $\vec{v}$.



1. Identifier chacune des vitesses $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aux vitesses absolue $\vec{v}_a$, relative $\vec{v}_r$ et d'entraînement $\vec{v}_e$.
2. Quelle est la direction de la vitesse de l'avion $\vec{v}$. Faites un schéma.
3. Calculer la vitesse du vent par rapport à la terre.

A.N. $w = 240km/h, v = 260km/h$.

Solution

Exercice 1

1. En remplaçant t dans x on obtient :

$$x = \frac{y^2}{4} - 1 \quad ou \quad y = 2\sqrt{x+1}$$

2. Vitesse :

$$v(t) = \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 2t \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 2 \end{cases} \Longrightarrow \vec{v} = 2t\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} \Longrightarrow v = 2\sqrt{(t^2+1)}$$

Accélération :

$$v(t) = \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 2 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = 2\,\vec{\imath} \Longrightarrow a = 2\,m/s^2$$

3. $a\ est\ constante$ et le produit $\vec{a}.\vec{v}\ positif$ donc le mouvement est uniformément accéléré

4. Accélération tangentielle :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)}}$$

Accélération normale :

$$a_n^2 = \sqrt{a^2 - a_t^2} \Rightarrow a_n = \frac{2}{\sqrt{(t^2+1)}}$$

Rayon de courbure :

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Longrightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = 2\,(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$

5. Angle entre $\overrightarrow{ox}\ et\ \vec{v}$:

$$\sin\alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)}}$$

6. Sachant que :

$$\sin\alpha = \frac{a_n}{a} \Rightarrow a_n = a\,sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{(t^2+1)}}$$

Exercice 2

1- Vecteurs, position, vitesse et accélération

$$\rho = b\cos(\omega t), \quad \dot{\rho} = -b\omega\sin(\omega t), \quad \ddot{\rho} = -b\omega^2\cos(\omega t), \quad \theta = \omega t, \dot{\theta} = \omega, \quad \ddot{\theta} = 0$$

Vecteur position $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} = \mathrm{b}\cos(\omega t)\overrightarrow{e_\rho}$

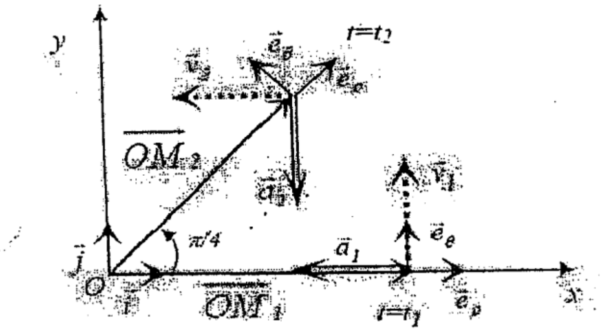
Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\ \overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\ \overrightarrow{e_\theta} = b\omega\big(-\sin(\omega t)\overrightarrow{e_\rho} + \cos(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}\big)$

Vecteur accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \big(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\big)\overrightarrow{e_\rho} + \big(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\big)\overrightarrow{e_\theta} = -2b\omega^2\big(\cos(\omega t)\overrightarrow{e_\rho} + \sin(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}\big)$

2- Détermination et représentation des vecteurs, position, vitesse et accélération aux instants t=0s et $t = \pi/4\omega s$

t(s)	Positions	Vitesses	Accélérations
t_1=0s	$\overrightarrow{OM_1} = \rho\overrightarrow{e_\rho} = \mathrm{b}\overrightarrow{e_\rho}$	$\vec{v}_1 = b\omega\overrightarrow{e_\theta}$	$\vec{a}_1 = -2b\omega^2 e_\rho$
t_2=π/4ω s	$\overrightarrow{OM_2} = \mathrm{b}\sqrt{2}/2\overrightarrow{e_\rho}$	$\vec{v}_2 = b\omega\left(-\sqrt{2}/2\overrightarrow{e_\rho} + \sqrt{2}/2\overrightarrow{e_\theta}\right)$	$\vec{a}_2 = -2b\omega^2\left(\sqrt{2}/2\overrightarrow{e_\rho} + \sqrt{2}/2\overrightarrow{e_\theta}\right)$

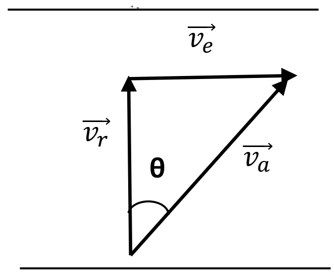
On a $\left\|\overrightarrow{OM_1}\right\| = b$ et $\left\|\overrightarrow{OM_2}\right\| = \mathrm{b}\sqrt{2}/2$,
$\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/4$
$\|\overrightarrow{v_1}\| = \|\overrightarrow{v_2}\| = b$
$\|\overrightarrow{a_1}\| = \|\overrightarrow{a_2}\| = 2b\omega\ ^2$



Exercice 3

1. Repère absolu : la rive

Repère relatif : le courant
Le mobile : le nageur
La vitesse du nageur par rapport au courant $\overrightarrow{v_1}$, est la vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$
La vitesse du nageur par rapport à la rive $\overrightarrow{v_3}$, est la vitesse absolu $\overrightarrow{v_a}$
La vitesse du courant par rapport à la rive $\overrightarrow{v_2}$, la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$



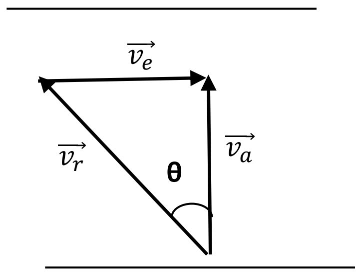
2. $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} \rightarrow \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}$

$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_1^2} = 5m/s$

$$tg\theta = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = 37°$$

3. $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$

D'après le schéma on a $v_3 = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 2.64\ m/s$



$$sin\theta = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = 39°$$