Corrigé de la série n°4 d'analyse 1

Exo1

Développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre n :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

- $e^x = f(x)$

$f^{(n)}(x) = e^x$; $f^{(n)}(0) = 1$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

- $f(x) = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + \frac{x^n}{n!} (ox^n)$$

$$\Rightarrow \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left[1 + 2\frac{x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots + \frac{2x^{2n}}{2n!}\right] + o(x^{2n})$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

- $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2!}$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

- $f(x) = \cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(1-)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$= \sum_{k\geq 0} (1-)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

• $f(x) = \sin x$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

• $f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots +$
$\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

• $f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

• $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o(x^n)$

• $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2!}$

$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\cdots\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots + \frac{(1)(-1)(-3)(-5)\cdots(-2n-3)}{2^n}\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

<u>Exo 2 :</u>

• $e^x - \frac{1}{1+x} = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)$
$-\left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$

• $x\cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$

• $(\cos x)(\sin 2x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3)\right)$

$= 2x - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3).$

- $\ln(1+\sin x) = \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right] - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2$
$+ \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

- $\frac{e^x}{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right)$
$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$

- $\frac{2 + x + 2x^3}{1+x^2} = (2 + x + 2x^3)(1 - x^2 + o(x^2))$
$= 2 + x - 2x^2 + x^3 + o(x^3).$

2) Développements limités au voisinage de 0 et à l'ordre 2.

- $\sqrt{1 + 2\cos x} = (1 + 2\cos x)^{\frac{1}{2}}$
$= 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^4) - \frac{1}{8}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)^2\right.$
$= \frac{23}{8} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^4)$

- $e^{\sqrt{1+2\cos x}} = 1 + \left(\frac{23}{8} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)\right)$
$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{23}{8} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)\right)^2 = 1 + \frac{23}{8} - \frac{3}{8}x^2$
$+ \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{23}{8}\right)^2 - 2\left(\frac{23}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)x^2 + o(x^4)\right.$

- Developpements limités au voisinage de 0 et à l'ordre n.

$\frac{\ln(1+x^3)}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left[x^3 - \frac{(x^3)^2}{2!} + \frac{(x^3)^3}{3!} \cdots + \frac{(x^3)^n}{n!} + o(x^4)\right.$
$= \frac{1}{x^3}\left(x^3 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{n!} + o(x^4)\right)$

$$= 1 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{3n-3}}{n!} + o(x^{3n-3})$$

Exo3

Calcul des limites.

- $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x - x}{x^3} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x}{x^3} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}{x^3} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2x} \right) = -\infty.$$

- $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\ln x} \right)$$

Au voisinage de 1, on a.

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

$$\ln x = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\ln x} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2}{x^2 - \frac{x}{2}} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x}{-\frac{1}{2} + x} \right)$$

$$= \frac{3}{4}.$$

- $$\lim_{x \to 1} \frac{(1 - x)^{\frac{1}{x}}}{1 + x} = 0$$

- $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x^2} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\operatorname{tg}^2 x^2 = \frac{\cos x^2}{\sin x^2} = \frac{1 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1 - \frac{x^4}{2}}{x^2}.$$

$$\frac{1}{tg x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{tg x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0$$

2) $f(x) = e^x + \sin x$.

$f'(x) = e^x + \cos x \to f'(0) = 2$

$f(0) = 1$

$y = f'(0)\,x + f(0) = 2x + 1 \to$ équation de la tangente à la courbe de f au point $(0,1)$.

Position du graphe par rapport à la tangente.

On utilise le développement limité de f au voisinage de 0:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2}$$

$f(0) = 1$,

$f'(0) = 2$

$f''(x) = e^x - \sin x \to f''(0) = 1$

donc: $f(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2}$

Puisque:

$$f(x) - (2x - 1) = \frac{x^2}{2} \geq 0$$

Donc, le graphe est au dessus de la tangente.

(3) Le développement limité en ∞ et à l'ordre 5 de la fonction :

1°

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$x = \frac{1}{u} \rightarrow u = \frac{1}{x}$$

Ce qui donne :

$$f(u) = \frac{u}{1 - u^2}$$

Il s'agit donc de trouver le développement limité de la fonction $f(u)$ au voisinage de 0,

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow u = \frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

Sachant que le développement limité de :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o(u^5)$$

Il s'en suit que :

$$\frac{1}{1-u^2} = 1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^8 + o(u^{10})$$

Par conséquent, à l'ordre 5, nous avons :

$$\frac{u}{1-u^2} = u + u^3 + u^5 + o(u^6)$$

D'où, en revenant à la variable initiale.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + o\left(\frac{1}{x^7}\right)$$

6

4) le développement limité en ∞ et à l'ordre 2 de la fonction. **11**

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Effectuons le changement de variable suivant,

$$u = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{u} \Rightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0$$

Nous obtenons.

$$f(u) = (1+u)^{\frac{1}{u}}$$

En appliquant le logarithme, il s'ensuit que.

$$\ln(f(u)) = \frac{\ln(1+u)}{u}.$$

Or le développement limité en 0 et à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$ est.

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$$

Par conséquent et à l'ordre 2, le développement limité de :

$$\ln f(u) = \frac{\ln(1+u)}{u} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} + O(u^3)$$

Or,

$$f(u) = e^{\ln(f(u))} = e^{\left[1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}\right]} = e \cdot e^{\left(-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}\right)}$$

Sachant que :

$$e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2}$$

Il s'ensuit que le développement limité à l'ordre 2 de $f(u)$ est.

7

$f(u) = e\left[1 - \frac{u}{2}\right] + o(u^2) = e - e\frac{u}{2} + o(u^2)$

Revenons maintenant à la variable initiale.

$f(x) = e - e\left(\frac{1}{2x}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(4) Soit la fonction :

$f(x) = \sqrt{\frac{x^3+1}{x^2+1}}$

Déterminons l'équation de l'asymptote de f en (∞) :

Pour ce faire, nous allons essayer de déterminer le développement limités de f en (∞).

Il est clair que :

$f(x) = \sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}} = \sqrt{x^2 - x + 1}$

Effectuons le changement de variable suivant :

$u = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{u} \Rightarrow x \to \infty \Rightarrow u \to 0$

Ce qui donne

$f(u) = \frac{\sqrt{1 + (u^2 - u)}}{u}$

Sachant que le développement limités à l'ordre 1 de $\sqrt{1+u}$ est :

$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u^2)$

Il s'en suit que le développement limités de $\sqrt{1+(u^2-u)}$ est

$$\sqrt{1+(u^2-u)} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2 + O(u^3)$$ 9

Par conséquent, le développement limité de $f(u)$ à l'ordre 1 est

$$f(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u + O(u^2)$$

Revenons maintenant à la variable initiale.

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Il est clair que :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2x}\right) = 0^{\pm}$$

Donc l'équation de l'asymptote de f à l'infini est

$$y = x - \frac{1}{2}.$$

Etudions maintenant la position de cette asymptote par rapport au graphe de f :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x}\right) = 0^+$$

en $(+\infty)$, le graphe de f est au dessus de l'asymptote.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x}\right) = 0^-$$

en $(-\infty)$, le graphe de f est au dessous de l'asymptote,