Réduction d'endomorphismes

1. Qu'est-ce que réduire un endomorphisme ?

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E. Si on se place dans une base de E, on peut représenter f par une matrice. Le but de ce chapitre est de trouver une base de E telle que la matrice représentant f dans cette base soit la plus "simple" possible (on prend la même base pour E ensemble de départ que pour E ensemble d'arrivée).

Définition 1 –

- on dit que f est diagonalisable, s'il existe une base $\{e_i\}$ de E telle que

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- on dit que f est triangularisable (ou trigonalisable), s'il existe une base $\{e_i\}$ de E telle que

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dans toute la suite, on suppose que E est un espace vectoriel de dimension **finie** sur un corps $\mathbb{K}$.

2. Vecteurs propres - Valeurs propres

2.1. Vecteurs propres

Définition 2 – Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Un vecteur $u \in E$ est un vecteur propre de f si

1) u est non nul
2) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(u) = \lambda u$

Le scalaire λ est appelé **valeur propre** associée à u.

Remarque - Si u est vecteur propre de f, alors, par linéarité de f, αu est vecteur propre de f pour tout $\alpha \neq 0$.

Théorème 3 – L'endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Démonstration : si f est diagonalisable, alors il existe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ telle que

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On en déduit que, pour tout vecteur e_i de cette base $f(e_i) = a_{ii}e_i$ avec $e_i \neq 0$ donc cette base est formée de vecteurs propres. Réciproquement, si E admet une base de vecteurs propres de f, il est clair que la matrice de f dans cette base sera diagonale. ⊔

Remarque - Si f est diagonalisable, les termes qui apparaissent sur la diagonale de la matrice représentant f dans une base de vecteurs propres sont les valeurs propres associées.

2.2. Polynôme caractéristique

Soit λ une valeur propre de f. L'endomorphisme $f - \lambda Id$ n'est alors pas injectif puisqu'il existe $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda\, u$. Comme on est en dimension finie, c'est équivalent à sa non-bijectivité, donc à ce que le déterminant de $f - \lambda Id$ soit nul.

Proposition 4 – Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme $P_f(\lambda) = \text{Dét}(f - \lambda Id)$. $P_f(\lambda)$ est un polynôme de degré n, appelé **polynôme caractéristique** de f.

Remarque - Si A et B sont deux matrices représentant un même endomorphisme f dans deux bases distinctes, alors elles sont semblables donc $\text{Dét}(A - \lambda I) = \text{Dét}(B - \lambda I)$. On appelle également polynôme caractéristique de la matrice A le polynôme $\text{Dét}(A - \lambda I_n)$.

Définition 5 – On dit qu'une valeur propre de f est de multiplicité α si elle est racine d'ordre α du polynôme caractéristique de f.

Une fois déterminées les valeurs propres, on détermine l'espace des vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs en résolvant le système linéaire $(A - \lambda Id)(u) = 0$ où A est la matrice de f dans une certaine base.

Définition 6 – L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le spectre de f.

Proposition 7 – Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est de degré n et, plus précisément, on a :

$$\text{Dét}(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, \lambda^i \text{ avec } a_0 = \text{Dét}\, A,\ a_{n-1} = (-1)^{n-1}\text{tr}A$$

3. Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Proposition 8 – Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda Id) = \{x \in E\,;\, f(x) = \lambda\, x\}$. E_λ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **espace propre** associé à λ. L'espace E_λ est stable par f.

Démonstration : E_λ est le noyau d'un endomorphisme donc c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ de cet endomorphisme.
Montrons qu'il est stable par f. Soit $x \in E_\lambda$, alors $f(x) = \lambda x$. Donc $f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$. On a montré que $f(x) \in E_\lambda$, ce qui prouve que E_λ est stable par f. ⊔

Remarque -