# Solution de la série 2

**Exercices 1**

1. $U = U_k + U_m \approx \frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2 - mg(L - L\cos\theta) \approx \frac{1}{2}kl^2\theta^2 - \frac{1}{2}mgL\theta^2$ ; $\boxed{T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2}$
2. Avec l'équation de Lagrange : le Lagrangien est $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kl^2 - mgL)\theta^2$.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0} \Rightarrow mL^2\ddot{\theta} + (kl^2 - mgL)\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{(kl^2 - mgL)}{mL^2}\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{(kl^2 - mgL)}{mL^2}}}$$

Avec l'équation de conservation de l'énergie totale : $E = T + U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(kl^2 - mgL)\theta^2$.

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = 0} \Rightarrow mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + (kl^2 - mgL)\theta\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{(kl^2 - mgL)}{mL^2}\theta = 0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{(kl^2 - mgL)}{mL^2}}}$$

3. A partir de l'énergie potentielle $U$, la condition d'oscillation est $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow \boxed{kl^2 - mgL > 0}$

   D'après l'équation du mouvement aussi, la condition d'oscillation est $\frac{kl^2 - mgL}{mL^2} > 0 \Rightarrow kl^2 - mgL > 0$

**Exercice 2** $T_M + T_m = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2$ ; $I = \frac{1}{2}MR^2$

1. $T = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = \boxed{\frac{1}{4}(M+2m)R^2\dot{\theta}^2.}$ $\quad \boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2.}$

   $U = mg(R - R\cos\theta) \approx \boxed{\frac{1}{2}mgR\theta^2.}$

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{4}(M + 2m)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgR\theta^2$.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}}} \Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{M+2m}\dot{\theta} + \frac{2mg}{(M+2m)R}\theta = 0.}$$

3. L'équation est de la forme: $\boxed{\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$ ; avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{M+2m} \ , \ \omega_0^2 = \frac{2mg}{(M+2m)R}.}$

   A.N: $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2} = \boxed{0.}$ Le mouvement est donc en régime $\boxed{\text{critique.}}$

4. $\boxed{Ae^{-\lambda'(t+2T')} = \frac{1}{7}Ae^{-\lambda' t}.}$ $\Longrightarrow \boxed{2\lambda' T' = \ln 7}$ $\Longrightarrow \boxed{\frac{4\pi\lambda'}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda'^2}} = \ln 7}$

   $\boxed{\lambda' = \frac{\omega_0 \ln 7}{\sqrt{(4\pi)^2 + (\ln 7)^2}}}$.

   A.N: $\boxed{\lambda' \approx 1\ s^{-1}.}$ $\Longrightarrow \alpha' = (M + 2m)\lambda' \approx \boxed{3\ \text{N.s/m.}}$