Chapitre IV

Travail et Energie

But : Etude de la dynamique du point en faisant appel aux notions d'énergie et de travail

IV-1. Travail et puissance

IV-1-1. Travail élémentaire d'une force

Le travail élémentaire dw effectué par une force $\vec{F}$ sur une masse ponctuelle m pendant un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ est défini par :

$$dw = \vec{F}d\vec{r} = \|\vec{F}\|.\|d\vec{r}\|\cos\left(\widehat{\vec{F},d\vec{r}}\right)$$

Son unité est le joule = $[N.m]$.

Le travail total w nécessaire pour déplacer m le long d'un chemin C entre deux points A et B est : $w = \int_c \vec{F}d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}d\vec{r}$.

- Si $\vec{r}(x,y,z), d\vec{r}(dx,dy,dz)$ et $\vec{F}(F_x,F_y,F_z)$ alors :

$$w = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Pour calculer w il est nécessaire de connaitre l'expression de $\vec{F}$ et l'équation (c) de la trajectoire.

Remarque 1:

Quand plusieurs forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots\dots$ agissent sur la particule. Le travail total effectué sur la particule au cours du déplacement $d\vec{r}$ est :

$$dw = dw_1 + dw_2 + dw_3 + \dots\dots\dots$$

$$= \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + \vec{F}_3 d\vec{r} + \dots\dots\dots$$

$= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots)d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r}$ où $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$, est la résultante de toutes les forces.

Remarque 2 :

Lorsque la composante suivant le déplacement d'une force donnée est à chaque instant de même sens que le déplacement, son travail est positif (travail moteur). Lorsqu'elle est de sens opposé, son travail est négatif, on l'appelle travail résistant.

Lorsqu'elle est à chaque instant perpendiculaire au déplacement, son travail est nul.

IV-1-2. Puissance

- La puissance moyenne est par définition le rapport du travail sur la durée de sa réalisation. Par exemple, si entre $t_1$et t_2 un travail w a été réalisé alors :

$$P_{moy} = \frac{w}{t_2 - t_1}$$

- La puissance instantanée est définie par :

$$p = \frac{dw}{dt}$$
$$= \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v} \quad (\vec{v} \text{ vitesse instantanée du point matériel})$$

La puissance s'exprime en Watts (w) $=J.s^{-1}=Kg.m^2.s^{-3}$

IV-2. Energie cinétique, potentielle et mécanique

IV-2-1. Energie cinétique

Afin d'accélérer une masse ponctuelle et l'amener à une vitesse définie on doit fournir du travail. Ce travail est alors emmagasiné dans cette masse ponctuelle sous forme d'énergie cinétique.

$$dw = \vec{F}d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\,\vec{v}dt$$

$$= m\,d\vec{v}.\vec{v} = \frac{1}{2}md(\vec{v}.\vec{v})$$

$$\Rightarrow dw = d(\frac{1}{2}mv^2)$$

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$ est l'énergie cinétique du point matériel.

Quelque soit la forme de la trajectoire suivie on a : $dw = dE_c$

Lorsque le point matériel passe du point A au point B :

$$w_{AB} = \int_A^B dw = \int_A^B dE_c$$

$$= E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Où v_A et v_B sont respectivement les vitesses aux point A et B.

IV-2-2. Théorème de l'énergie cinétique

$$w_{AB} = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c$$

La variation de l'énergie cinétique d'une masse ponctuelle pendant un temps quelconque est égale au travail fourni à cette masse pendant ce temps.

IV-2-3. Energie potentielle

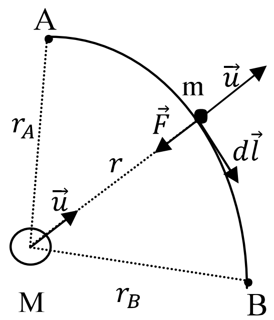
Particule dans un champ gravitationnel :

Soit une particule de masse m soumise à la force gravitationnelle

Terrestre : $\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}.$

Si cette particule passe du point A au point B, elle subit une variation

de l'énergie cinétique mesuré par :



$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$$

$$= \int_A^B \vec{F}d\vec{l} = \int_A^B -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}\,d\vec{l}$$

En coordonnées polaires

$$d\vec{l} = d\vec{r} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\vec{u}\,d\vec{l} = \vec{u}(dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta})$$

$$= dr\vec{u}\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\vec{u}\,\overrightarrow{e_\theta} = dr$$

Alors :

$$\Delta E_c = -GmM\int_A^B \frac{dr}{r^2} = \left(\frac{GmM}{r_B} - \frac{GmM}{r_A}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GmM}{r_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GmM}{r_B}$$

La grandeur $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$ est invariante au cours du mouvement si la seule force appliquée à la particule est la force de gravitation.

La variation de l'énergie cinétique ΔE_c est égale et opposé à la variation de l'énergie potentielle : $\Delta E_c = -\Delta E_p$.

L'énergie potentielle de la masse m dans le champ de gravitation de M est :

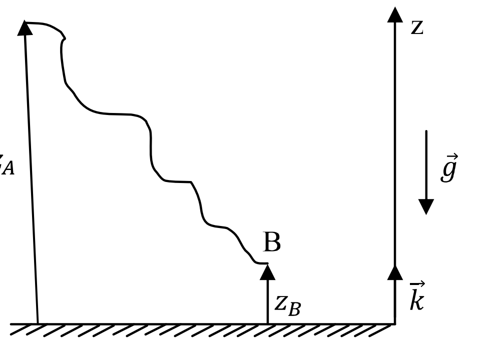
$$E_p = -\frac{GmM}{r}$$

IV-2-4. Energie mécanique

L'énergie mécanique E_M est égale à la somme de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p.

$$E_M = E_c + E_p$$

IV-2-5. Energie potentielle au voisinage de la Terre



Le travail du poids $\vec{p}$:

$$w_{AB} = \int_A^B m\vec{g}\,d\vec{r} = \int_A^B (-mg\vec{k}).\left(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}\right)$$

$$w_{AB} = \int_{z_A}^{z_B} -mg\,dz = mgz_A - mgz_B = E_p(A) - E_p(B)$$

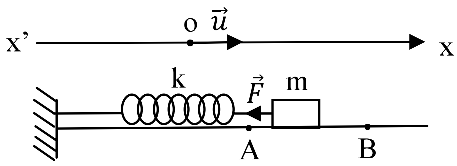
L'énergie potentielle de la masse m à une hauteur h est :

$E_p = mgh$

IV-2-6. Energie potentielle élastique

Considérons une particule soumise à une force de type :

$\vec{F} = -kx\vec{u}$



$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \int_A^B F dx = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx$

$= \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$

D'où $\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2 = cste$

On définit l'énergie potentielle du ressort : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

L'énergie mécanique totale :

$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

IV-3. Force dérivant d'un potentiel-Forces conservatives

On dit qu'une force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel s'il existe une fonction scalaire $E_p(x, y, z)$ telque : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$

- Si l'énergie potentielle E_p est connue, cette expression nous permet de déterminer l'expression de la force.
- Si c'est l'expression de la force qui est connue, une énergie potentielle ne peut lui être associée que si la relation : $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$
- Lorsqu' une particule n'est soumise qu'à une force dérivant d'un potentiel :

$$w_{A\to B} = \Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) = E_M$$

$E_c + E_p = E_M = cste$ ou $\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = 0$

L'énergie mécanique totale de la particule est conservée.

Remarque :

- Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi. Il ne dépend que de l'énergie potentielle au point A et B
- Sur un circuit fermé, le travail d'une telle force est nul

IV-4. Forces non conservatives

On dit qu'une force est non conservative si le travail effectué par cette force dépend du chemin suivi.

On considère un point matériel soumis aux forces $\overrightarrow{F_c}$ et $\overrightarrow{F_{nc}}$ ($\overrightarrow{F_c}$: la résultante des forces conservatives, $\overrightarrow{F_{nc}}$: la résultante des forces non conservatives).

Entre deux points de la trajectoire A et B de la trajectoire, le travail de l'ensemble des forces est :

$w_{A\rightarrow B} = \int_A^B \left(\overrightarrow{F_c} + \overrightarrow{F_{nc}}\right) d\vec{r} = \int_A^B \overrightarrow{F_c}\, d\vec{r} + \int_A^B \overrightarrow{F_{nc}}\, d\vec{r} = w_c + w_{nc}$ D'autre part la variation de l'énergie cinétique entre les deux points A et B est égale au travail de toutes les forces qui lui sont appliquées :

$$E_c(B) - E_c(A) = w_c + w_{nc} \qquad (1)$$

D'autre part le travail w_c des forces conservatives $\overrightarrow{F_c}$ est :

$$w_c = E_p(A) - E_p(B) \qquad (2)$$

De (1) et (2) on tire : $E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) + w_{nc}$

$\Rightarrow \left[E_c(B) + E_p(B)\right] - \left[E_c(A) + E_p(A)\right] = w_{nc}$

$\Rightarrow E_M(B) - E_M(A) = w_{nc}$

$\Rightarrow \Delta E_M = w_{nc}$

La variation de l'énergie mécanique est égale au travail w_{nc} des forces qui ne dérivent pas d'un potentiel.

IV-5. Théorème de l'énergie mécanique

- Si le système est soumis qu'à des forces conservatives l'énergie mécanique se conserve :

$$\Delta E_M = 0$$

- Si le système est soumis à des forces non conservatives l'énergie mécanique se dissipe :

$$\Delta E_M = w_{nc}$$