Exercice n°01 :

1- Energie cinétique , potentielle et fonction de dissipation :

- Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$
- Energie potentielle : $U = U_m + U_k = -mg\,\mathrm{h} + \frac{1}{2}ky^2$ → Grâce à la condition d'équilibre

  $\rightarrow U = \frac{1}{2}ky^2 + C^{ste}$
- Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$

2- Formalisme Lagrangien et Equation de mouvement :

- Fonction de Lagrange : $L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}ky^2$
- Formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} + F$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -ky \,;\, \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = \alpha\dot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky = -\alpha\dot{y} + F$$

Donc l'équation différentielle de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m}cos\Omega t}$$

3- La solution permanente de l'équation de mouvement :

L'équation est de la forme : $\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + {\omega_0}^2 y = \frac{F_0}{m}cos\Omega t$ avec : $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$.

La solution permanente est : $y = Acos(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ :

$$\frac{F_0}{m}cos\Omega t \rightarrow \frac{F_0}{m}e^{j\Omega t}$$

$$y = Acos(\Omega t + \phi) \rightarrow \underline{y} = \underline{A}e^{j\Omega t}$$

On obtient : $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + {\omega_0}^2\underline{A}e^{j\Omega t} = \frac{F_0}{m}e^{j\Omega t} \Rightarrow \underline{A} = \frac{\frac{F_0}{m}}{{\omega_0}^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$

L'amplitude est : $A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{({\omega_0}^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$ La phase est donnée par : $tan\phi = -\frac{2\lambda\Omega}{{\omega_0}^2-\Omega^2}$

4- La pulsation de résonance est Ω_R telle que $\left.\frac{\partial A}{\partial \Omega}\right|_{\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\lambda^2}$

5- Pour un amortissement faible $\lambda \ll \omega_0$: $\Omega_{c_1} \approx \omega_0 - \lambda$ et $\Omega_{c_2} \approx \omega_0 + \lambda$,

Et $B = \Omega_{c_2} - \Omega_{c_1} = 2\lambda$.

Exercice n 02 :

1. Equation du mouvement :
   a. Energie cinétique du système :

$$T = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m(4a^2)}{12} + ma^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{7ma^2}{6}\dot{\theta}^2$$

   b. Energie potentiel :

$$U = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 = \frac{1}{2}ka^2\theta^2$$

   c. Fonction de Dissipation :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\left(3a\dot{\theta}\right)^2 = \frac{9}{2}\alpha a^2\dot{\theta}$$

   d. Equation de mouvement :

$$\frac{7ma^2}{3}\ddot{\theta} + 9a^2\alpha\dot{\theta} + ka^2\theta = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{27\alpha}{7m}\dot{\theta} + \frac{3k}{7m}\theta = 0$$

Avec : $\lambda = \frac{27\alpha}{14m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{7m}}$

2. Calcul de α et k:
   a. Calcul du coefficient de frottement α :

$$\delta = \frac{1}{n} ln\left(\frac{q_0}{q_n}\right) = \frac{1}{4} ln\left(\frac{\theta_0}{\frac{\theta_0}{10}}\right) = \frac{1}{4} ln(10) = 0.57$$

On a $\lambda = \frac{\delta}{T_a} = 0.96\ s^{-1},\ or\ \lambda = \frac{27\alpha}{14m} \Longrightarrow \alpha = \frac{14m\delta}{27T_a} = \frac{14 .10 .\ 0.57}{27 .\ 0.6} = 4.92\ kg.s^{-1}$

   b. Détermination du k :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_a} = 10.47\ \ , or\ \omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{\frac{3k}{7m}} \Longrightarrow k = \frac{7m(\omega_a^2 - \lambda^2)}{3} = \frac{7 .\ 10 .\ (10.47^2 + 0.96^2)}{3}$$

$$k = 2568\ kg.s^{-2}$$

Exercice Supplémentaire :

1- l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et fonction de dissipation :

- Energie cinétique : $T = T_m = \frac{1}{2}m(3l\dot{\theta})^2 = \frac{9}{2}ml^2\dot{\theta}^2$
- Energie potentielle : $U = U_m + U_k \approx mg(3l - 3lcos\theta) + \frac{1}{2}k(sin\theta)^2 \approx \frac{3}{2}mgl\theta^2 + \frac{1}{2}kl^2\theta^2$
- Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha(2l\dot{\theta})^2 = 2\alpha l^2\dot{\theta}^2$

2- Formalisme Lagrangien et Equation différentielle de mouvement :

- Fonction de Lagrange : $L = \frac{9}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(3mgl + kl^2)\theta^2$
- Formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + F.3l$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 9ml^2\dot{\theta} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 9ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(3mgl + kl^2)\theta \; ; \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 4\alpha l^2\dot{\theta}$$

$$9ml^2\ddot{\theta} + (3mgl + kl^2)\theta = -4\alpha l^2\dot{\theta} + F.3l$$

Donc l'équation différentielle de mouvement s'écrit :

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{4\alpha}{9m}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{3l} + \frac{k}{9m}\right)\theta = \frac{F_0}{3ml}cos\Omega t}$$

3- La solution de l'équation permanente de mouvement :

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = \frac{F_0}{3ml}cos\Omega t$

<u>Avec :</u> $\lambda = \frac{2\alpha}{9m}$ et ${\omega_0}^2 = \left(\frac{g}{3l} + \frac{k}{9m}\right)$

La solution permanente est de la forme : $\theta = Acos(\Omega t + \phi)$, Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ.

$$\frac{F_0}{3ml}cos\Omega t \to \frac{F_0}{3ml}e^{j\Omega t}$$

$$\theta = Acos(\Omega t + \phi) \to \underline{\theta} = \underline{A}e^{j\Omega t}$$

On obtient : $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + {\omega_0}^2\underline{A}e^{j\Omega t} = \frac{F_0}{3ml}e^{j\Omega t} \Rightarrow \underline{A} = \frac{\frac{F_0}{3ml}}{{\omega_0}^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$

L'amplitude est : $A = \frac{\frac{F_0}{3ml}}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$ La phase est donnée par : $tan\phi = -\frac{2\lambda\Omega}{{\omega_0}^2 - \Omega^2}$

4- La pulsation de résonance est Ω_R telle que $\left.\frac{\partial A}{\partial \Omega}\right|_{\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\lambda^2}$

5- Pour un amortissement faible $\lambda \ll \omega_0$: $\Omega_{c_1} \approx \omega_0 - \lambda$ et $\Omega_{c_2} \approx \omega_0 + \lambda$,

Et $B = \Omega_{c_2} - \Omega_{c_1} = 2\lambda$.

6- A.N :$\Omega_R \approx 2.88\, rad/s$. $B \approx 0.22 Hz$. Le facteur de qualité est : $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\omega_0}{B} \approx 13.1$