Université A. Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département Informatique RN

Année Universitaire 2021/2022
Session normale
Durée : 01h30mn

Examen Final d'Analyse 1

Exercice 1 : (05.50 points)

Soit la fonction $f\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par :

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

Montrer que $f(x) = e^{2x} + 2e^x$. Démontrer que f est bijective. Déterminer l'expression de sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 2 : (03.50 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} mx + \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & si\ x > 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} & si\ x < 3 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$;
2. Pour quelle valeur de m, f est-elle prolongeable par continuité en 3 ?

Exercice 3 : (04.50 points)

Déterminer la dérivée d'ordre n de la fonction $f(x) = x^2 e^{-2x}$.

Exercice 4 : (03.50 points)

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

2. En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 5 : (03 points)

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x) \quad ; \quad \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$$

Déduire que :

$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$

Bon Courage

Corrigé de l'examen final d'analyse 1

Exercice 1 : (04 points)

On a :

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}} = \frac{(e^x + 2)e^x}{e^{-x}e^x} = e^{2x} + 2e^x \ \ (\mathbf{0.50})$$

Pour montrer que f est bijective, il suffit de trouver un x unique, tel que :

$$y = f(x) \Longrightarrow y = e^{2x} + 2e^x \Longrightarrow e^{2x} + 2e^x - y = 0 \ (\mathbf{0.50})$$

On pose :

$$e^x = u \ (\mathbf{0.50})$$

Ce qui donne :

$$u^2 + 2u - y = 0 \ (\mathbf{0.50})$$

Sachant que $\Delta' = 1 + y$ $(\mathbf{0.5})$, cette équation admet deux solutions :

$$u_1 = -1 + \sqrt{1+y} \ \ (\mathbf{0.5}); \ \ u_2 = -1 - \sqrt{1-y} \ (\mathbf{0.5})$$

Or $u = e^x > 0$ et $u_2 < 0$ $(\mathbf{0.5})$, donc il ne reste qu'une solution unique :

$$u_1 = e^x = -1 + \sqrt{1+y} \ (\mathbf{0.5})$$

Qui correspond à un x unique :

$$x = \ln\left(-1 + \sqrt{1+y}\right) \ \ (\mathbf{0.5})$$

Donc f est bijective et sa bijection réciproque est :

$$f^{-1}(x) = \ln\left(-1 + \sqrt{1+x}\right) \ \ (\mathbf{0.5})$$

Exercice 2 : (03.50 points)

1. Calculer les limites :

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(mx + \frac{x^2-9}{x-3}\right) = \lim_{x\to 3^+}\left(mx + \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\right) = \lim_{x\to 3^+}(mx + x + 3)$$
$$= 3m + 6 \ \ (\mathbf{01})$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right) = \lim_{x\to 3^-}\left[\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to 3^-}\left[\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right] = \lim_{x\to 3^-}\left[\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\right] = \frac{1}{4} \ \ (\mathbf{01})$$

2. La valeur de m pour que f soit prolongeable par continuité en 3 :

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) \ \ (\mathbf{03.50}) \Longrightarrow 3m + 6 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = -\frac{23}{18} \ (\mathbf{01})$$

Exercice 3 : (04.50 points)

La dérivée d'ordre n de la fonction $f(x) = x^2 e^{-2x}$:

Posons $f(x) = u(x)v(x)$, tels que $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^{-2x}$, on a d'après la formule de Leibnitz :

$$f^n(x) = \big(u(x)v(x)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} \quad \mathbf{(0.5)}$$

Comme :

$$u(x) = x^2 \,, u'(x) = 2x \,; u"(x) \ = 2 \,, u'''(x) = \cdots = u^{(n)}(x)\; pour\; n \geq 3 \; \mathbf{(01)}$$

$$v(x) = e^{-2x} \,, v'(x) = -2e^{-2x} \,, v''(x) = (-2)^2 e^{-2x}, \dots, v^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x} \quad \mathbf{(01)}$$

Nous avons :

$$f^n(x) = \big(u(x)v(x)\big)^{(n)} = C_n^0 u v^{(n)} + C_n^1 u' v^{(n-1)} + C_n^2 u'' v^{n-2} \; \mathbf{(0.5)}$$

Avec :

$$C_n^0 = 1 \,; \; C_n^1 = n \,; \; C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \quad \mathbf{(0.5)}$$

Soit :

$$f^n(x) = x^2(-2)^n e^{-2x} + 2nx(-2)^{n-1}e^{-2x} + n(n-1)(-2)^{n-2}e^{-2x}$$

$$= (-2)^{n-2}e^{-2x}[4x^2 - 4nx + n(n-1)] \quad \mathbf{(01)}$$

Exercice 4 : (03.50)

1. Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

Sachant que :

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + 0(x^2) \; \mathbf{(01)} \,; \; \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + 0(x^2) \; \mathbf{(01)}$$

Il s'en suit que :

$$f(x) = \frac{1 + x^2 - 1 + x^2/2}{x^2} = \frac{3}{2} \; \mathbf{(01)}$$

2. En déduire la limite $\lim_{x \to 0} f(x)$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{3}{2} \quad \mathbf{(0.5)}$$

Exercice 5 : (03 points)

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x) \quad ; \quad \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$$

En effet :

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2} = 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$
$$= 2\sinh x \cosh x \quad \textbf{(01)}$$

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 + e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$
$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh(2x) \quad \textbf{(01)}$$

Déduire que :

$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$

En effet et en utilisant les précédents résultats :

$$\tanh(2x) = \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x)} = \frac{2\sinh(x)\cosh(x)}{\cosh^2(x) + \sinh^2(x)} = \frac{2\sinh(x)\cosh(x)}{\cosh^2(x)\left[1 + \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}\right]} = \frac{2\left[\frac{\sinh(x)\cosh(x)}{\cosh^2(x)}\right]}{\left[1 + \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}\right]}$$
$$= \frac{2\left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]}{\left[1 + \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}\right]} = \frac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)} \quad \textbf{(01)}$$