Grammaire LL(k)

7. Analyse descendante déterministe

7.4 Grammaire LL(K)

- *Dans les méthodes descendantes utilisées pour analyser les grammaires LL(1), **un seul caractère** est consulté pour décider de la règle à appliquer.*

- *On peut généraliser les deux méthodes en donnant la possibilité de consulter **k (k>1)** prochains symboles de la chaine d'entrée; on obtient alors des analyseurs pouvant traiter une classe plus large de grammaires.*

Exemple : *Soit la grammaire G* $S \rightarrow abS | acS | b$ *et une chaine qu'on veut dériver à partir de S.*

- *Si seul **le premier** symbole qui est consulté, **on ne peut pas décider** de la règle à appliquer parmi (1) et (2). **G n'est pas LL(1)** ;*
- *Si nous disposons **de 2 symboles** de ω, soit* $\omega = ac\,\omega'$, *on peut décider que c'est la **règle 2** qui doit être appliquée, donc **G est LL(2).***

7. Analyse descendante déterministe

7.4 Grammaire LL(K)

*Une **grammaire est LL(k)** si **k** caractères du début de la chaine à analyser suffisent pour faire une analyse déterministe.*
De façon formelle si on a une règle : $A \to \alpha / \beta$ il faut vérifier l'une des 02 conditions suivantes:

Si $\varepsilon \in Deb(\alpha)$ **et** $\varepsilon \in Deb(\beta)$ **alors** **G est non LL(k)**

Sinon $\boxed{Deb_k(deb_k(\alpha).\, suiv_k(A)) \cap Deb_k(deb_k(\beta).\, suiv_k(A)) = \emptyset}$

Finsi

7.4 Grammaire LL(K)

Remarque :

On peut aussi écrire la condition précédente sous une forme simplifiée:

$$Deb_k(\alpha.\ suiv_k\ (A) \cap Deb_k\ (\beta.\ suiv_k\ (A)) = \emptyset$$

*On **concatène** les **suiv(A)** à **α et β** pour assurer que **les éléments** des ensembles de **débuts de α et β** soient de **même cardinalité**, càd ont le **même nombre de caractères pour pouvoir les comparer.***

Exemple:

Card (deb(a)) = card{a} = 1 et card (deb(ε)) = card{ε} = 0

donc {a} ∩ {ε} n'est pas valide!!

7.4.1 Les ensembles $Debut_K$ et $Suivant_K$

(a) Règles de calcul de l'ensemble $Début_k$:

1. $Si\ \ A \rightarrow \alpha_1 / \alpha_2 / \ldots / \alpha_n \quad Alors \quad Deb_k(A) = Deb_k(\alpha_1) \cup \ldots \cup Deb_k(\alpha_n)$
2. $Deb_k(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
3. $\underset{w \in T^+}{Deb_k(w)} = \begin{cases} \{w\} & Si\ w \in T^l \ \ et \ \ l \leq k \\ \{w'\} & Si\ \ w = w'w'' \in T^l \ \ et \ \ l > k \ et \ w' \in T^k \end{cases}$
4. $Deb_k(\beta\gamma) = Deb_k(Deb_k(\beta).Deb_k(\gamma))$

7.4.1 Les ensembles $Debut_K$ et $Suivant_K$

b. Règles de calcul de l'ensemble $Suivant_k$:

$$suiv_k(A) = \{\omega | Z \rightarrow^* \alpha A \beta \#^k,\ \omega \in deb_k(\beta \#^k)\ et\ \omega \in T^k\}$$

Les étapes de construction de l'ensemble $Suiv_k$

1. $\#^k \in suiv_k(S)$ $tel\ que\ S\ est\ l\ 'axiome;$
2. $si\ B \rightarrow \alpha A \beta\ alors\ deb_k(\beta .\ suiv_k(B) \subset suiv_k(A))\ avec\ \alpha\ et\ \beta \in (T \cup N)^*$
3. $si\ B \rightarrow \alpha A\ alors\ suiv_k(B) \subset suiv_k(A)$

Exemple (Grammaire LL(k))

$$G: \begin{cases} S \rightarrow aAaa \,/\, bAba \\ A \rightarrow bA \,/\, \varepsilon \end{cases}$$

Calculer les ensembles Début$_1$ Début$_2$, Début$_3$ et les ensembles Suivant$_1$, Suivant$_2$, et Suivant$_3$?

7. Analyse descendante déterministe

Exemple (Grammaire LL(k))

$$G : \begin{cases} S \to aAaa \,/\, bAba \\ A \to bA \,/\, \varepsilon \end{cases}$$

$Deb_1(S) = Deb_1(aAaa) \cup Deb_1(bAba)$
$= \{a, b\}$

$Deb_1(A) = Deb_1(bA) \cup Deb_1(\varepsilon) = \{b, \varepsilon\}$

$Suiv_1(S) = \{\#\}$

$Suiv_1(A) = \{a, b\}$

Exemple (Grammaire LL(k))

$$G : \begin{cases} S \rightarrow aAaa / bAba \\ A \rightarrow bA / \varepsilon \end{cases}$$

$\mathbf{Deb_2\ (S)}$ = $Deb_2\ (aAaa) \cup Deb_2(bAba)$ $Deb_2\ (S)$ = $a.Deb_1\ (Aaa) \cup b.Deb_1\ (Aba)$
= $\{ab,\ aa\} \cup \{bb\}$

$\mathbf{Deb_2\ (A)}$ = $Deb_2\ (b\mathrm{A}) \cup Deb_2\ (\varepsilon)$ = $\mathrm{b.Deb_1\ (A)} \cup \{\varepsilon\}$
= $\{\mathrm{bb,b},\varepsilon\}$

$\mathbf{Suiv_2\ (S)}$ = $\{\#\#\}$

$\mathbf{Suiv_2\ (A)}$ = $Deb_2\ (aa.\ suiv_2(S)) \cup Deb_2(ba.\ Suiv_2\ (S))$ = $\{\mathrm{aa,\ ba}\}$

Exemple (Grammaire LL(k))

$$G : \begin{cases} S \rightarrow aAaa / bAba \\ A \rightarrow bA / \varepsilon \end{cases}$$

Calculons de l'ensemble des déb$_3$ et suiv$_3$

$\boldsymbol{Deb_3\ (S)}$ = $Deb_3\ (aAaa) \cup Deb_3 (bAba)\ Deb_3\ (S) = a.Deb_2\ (Aaa) \cup b.Deb_2\ (Aba)$
= $\{aba,\ aaa\} \cup \{bbb,\ bba\}$

$\boldsymbol{Deb_3\ (A)}$ = $Deb_3\ (bA) \cup Deb_3\ (\varepsilon)$ = b.Deb$_2$ (A) $\cup \{\varepsilon\}$
= $\{bbb, bb, b, \varepsilon\}$

$\boldsymbol{Suiv_3\ (S)}$ = $\{\#\#\#\}$

$\boldsymbol{Suiv_3\ (A)}$ = $Deb_3\ (aa.\ suiv_3(S)) \cup Deb_3(ba.\ Suiv_3\ (S)) = \{aa\#,\ ba\#\}$

7. Analyse descendante déterministe

Exemple (Grammaire LL(k))

$$G: \begin{cases} S \rightarrow aAaa \,/\, bAba \\ A \rightarrow bA \,/\, \varepsilon \end{cases}$$

$$Deb_k(\beta\gamma) = Deb_k(Deb_k(\beta).Deb_k(\gamma))$$

$$\underset{A\in N}{Suiv_k(A)} = \{ w \,/\, Z \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A \beta \#^k, w \in Deb(\beta \#^k) \ \ et \ \ |w| = k \}$$

	Deb₁	**Suiv₁**	**Deb₂**	**Suiv₂**	**Deb₃**	**Suiv₃**
S	a b	#	aa ab bb	##	aaa bba aba bbb abb	###
A	b ε	a b	ε bb b	aa ba	ε b bbb bb	aa# ba#

Exemple (Grammaire LL(k))

$$G: \begin{cases} S \to aAaa / bAba \\ A \to bA / \varepsilon \end{cases}$$

G, est-elle LL(k)?

- *G est non récursive à gauche et factorisée;*
- *Vérifions les conditions pour LL(1)?*

$S \to aAaa / bAba$ Vérifions la condition (cas2)

$$\mathrm{Deb}_1\,(aAaa) \cap \mathrm{Deb}_1\,(bAba) = \{a\} \cap \{b\} = \varnothing$$

Donc S est LL(1) et par conséquent S est LL(k)

7. Analyse descendante déterministe

Exemple (Grammaire LL(k))

$$G : \begin{cases} S \rightarrow aAaa \,/\, bAba \\ A \rightarrow bA \,/\, \varepsilon \end{cases}$$

G, est-elle LL(1)?

$A \rightarrow bA \,/\, \varepsilon$ *Vérifions la condition (cas3)*

1. $Deb_1\ (bA) \cap Suiv_1\ (A) = \{b\} \cap \{a,b\} = \{b\} \neq \varnothing$ donc condition non vérifiée !

Donc A est LL(1)

D'où G est non LL(1)!

Exemple (Grammaire LL(k))

$$G: \begin{cases} S \to aAaa \mid bAba \\ A \to bA \mid \varepsilon \end{cases}$$

G, est-elle LL(2)?

S a été déjà vérifiée LL(1) alors elle par conséquent LL(k) ; il suffit de vérifier la condition pour la règle A:

$A \to bA \mid \varepsilon$

	Deb₂	Suiv₂
S	aa ab bb	##
A	ε bb b	aa ba

$Deb_2(b.\ Suiv_2(A)) \cap Suiv_2(A) = \{ba,bb\} \cap \{aa,ba\} = \{ba\} \neq \varnothing$ donc condition non vérifiée !

G est non LL(2)!

7. Analyse descendante déterministe

Exemple (Grammaire LL(k))

$$G: \begin{cases} S \rightarrow aAaa \,/\, bAba \\ A \rightarrow bA \,/\, \varepsilon \end{cases}$$

G, est-elle LL(3)?

$A \rightarrow bA \,/\, \varepsilon$

	Deb_3	$Suiv_3$
S	aaa bba aba bbb abb	###
A	ε b bbb bb	aa# ba#

1. Deb_3 (b. $Suiv_3$ (A)) ∩ $Suiv_3$(A) = {bbb,baa,bba} ∩ {aa#,ba#} = ∅ donc condition vérifiée !

G est LL(3)!

7.4.2 La table d'analyse LL(k)

Algorithme de construction de la table d'analyse LL(k)

```
Début
    Pour chaque non-terminal A de N
        Faire
            Pour chaque règle  A → α
                Faire
                    Pour chaque  w ∈ Deb_k(α.Suiv_k(A))
                        Faire
                            T[A,w] := N° A → α
                        Fait;
                Fait;
        Fait;
Fin.
```

7. Analyse descendante déterministe

Exemple (Grammaire LL(k))

$$G: \begin{cases} S \to aAaa \,/\, bAba \\ A \to bA \,/\, \varepsilon \end{cases}$$

G est LL(3)

	Deb_3	$Suiv_3$
S	aaa bba aba bbb abb	###
A	ε b bbb bb	aa# ba#

Table d'analyse LL(3)

	aaa	bba	aba	bbb	abb	baa	aa#	ba#
S	S→aAaa	S→bAba	S→aAaa	S→bAba	S→aAaa			
A		A→bA		A→bA		A→bA	A→ε	A→ε

Table d'analyse

	aaa	bba	aba	bbb	abb	baa	aa#	ba#
S	S→aAaa	S→bAba	S→aAaa	S→bAba	S→aAaa			
A		A→bA		A→bA		A→bA	A→ε	A→ε

$$G: \begin{cases} S \rightarrow aAaa / bAba \\ A \rightarrow bA / \varepsilon \end{cases}$$

Trace d'analyse

Pile	Chaine	Tc	Action
#S	bbba#	b	Dépiler et empiler le mot miroir bAba
#abAb	bbba#	b	Avancer et Dépiler
#abA	bba#	b	Dépiler et empiler le mot miroir bA
#abAb	bba#	b	Avancer et Dépiler
#abA	ba#	b	Dépiler et empiler le mot miroir ε
#ab	ba#	b	Avancer et Dépiler
#a	a#	a	Avancer et Dépiler
#	#		Chaine acceptée !

Solution Exercice 2 TD N°3

Soit G3 :

$$\begin{cases} Z \rightarrow Y1Y2 \,/\, S21 \\ Y \rightarrow 1 \,/\, \varepsilon \\ S \rightarrow 2 \,/\, \varepsilon \end{cases}$$

Questions :

1. Calculer Deb1, Suiv1, Deb2, Suiv2, Deb3, Suiv3 de G3
2. G est-elle LL(k) ?

Solution :

	Deb1	Suiv1	Deb2	Suiv2	Deb3	Suiv3
Z	1 2	#	11 12 22 21	##	111 221 112 21 12	###
Y	1 ε	1 2	1 ε	11 12 2#	1 ε	112 12# 2##
S	2 ε	2	2 ε	21	2 ε	21#

➔ **G3 est-elle LL(1) ?**

➢ $Z \rightarrow Y1Y2/S21$ **(condition cas2)**

Deb1(Y1Y2) ∩ Deb1 (S21) = {1} ∩ {2} =ϕ ⇒ *Z est LL(1) et par conséquent LL(k)*

Solution Exercice 2 TD N°3

Soit G3 :

$$\begin{cases} Z \rightarrow Y1Y2 \,/\, S21 \\ Y \rightarrow 1 \,/\, \varepsilon \\ S \rightarrow 2 \,/\, \varepsilon \end{cases}$$

Solution :

	Deb1	Suiv1	Deb2	Suiv2	Deb3	Suiv3
Z	1 2	#	11 12 22 21	##	111 221 112 21 12	###
Y	1 ε	1 2	1 ε	11 12 2#	1 ε	112 12# 2##
S	2 ε	2	2 ε	21	2 ε	21#

➔ **G3 est-elle LL(1) ?**

➔ $Y \rightarrow 1/\varepsilon$ (condition cas3)

Deb1(1) $\cap$ suiv1 (Y)= {1} $\cap$ {1,2}= {1} $\neq \phi$ ➔ non vérifiée $\Rightarrow Y \rightarrow 1/\varepsilon$: non LL(1)

➔ $S \rightarrow 2 / \varepsilon$ (condition cas3)

Deb1(2) $\cap$ Suiv1 (S)= {2} $\cap$ {2}= {2} $\neq \phi$ ➔ non vérifiée $\Rightarrow S \rightarrow 2/\varepsilon$: non LL(1)

➔ **G3 est non LL(1)**

Solution Exercice 2 TD N°3

Soit G3 :

$$\begin{cases} Z \rightarrow Y1Y2 / S21 \\ Y \rightarrow 1 / \varepsilon \\ S \rightarrow 2 / \varepsilon \end{cases}$$

Solution :

	Deb1	Suiv1	Deb2	Suiv2	Deb3	Suiv3
Z	1 2	#	11 12 22 21	##	111 221 112 21 12	###
Y	1 ε	1 2	1 ε	11 12 2#	1 ε	112 12# 2##
S	2 ε	2	2 ε	21	2 ε	21#

➔ G3 est-elle LL(2) ?

➔ $Y \rightarrow 1/\varepsilon$

Deb2(1.Suiv2(Y)) $\cap$ suiv2 (Y)= {11,12} $\cap$ {11,12,2#}= {11,12} $\neq \phi$ → non vérifiée $\Rightarrow$

$Y \rightarrow 1/\varepsilon$ est non LL(2)

➔ $S \rightarrow 2 / \varepsilon$

Deb2(2.Suiv2(S)) $\cap$ Suiv2 (S)= {22} $\cap$ {21}= ϕ → vérifiée $\Rightarrow$ $S \rightarrow 2/\varepsilon$: LL(2)

➔ G3 est non LL(2)

Solution Exercice 2 TD N°3

Soit G3 :

$$\begin{cases} Z \rightarrow Y1Y2 / S21 \\ Y \rightarrow 1 / \varepsilon \\ S \rightarrow 2 / \varepsilon \end{cases}$$

Solution :

	Deb1	Suiv1	Deb2	Suiv2	Deb3	Suiv3
Z	1 2	#	11 12 22 21	##	111 221 112 21 12	###
Y	1 ε	1 2	1 ε	11 12 2#	1 ε	112 12# 2##
S	2 ε	2	2 ε	21	2 ε	21#

➔ **G3 est-elle LL(3) ?**

➔ $Y \rightarrow 1/\varepsilon$

C3 : Deb3(1.Suiv3(Y)) ∩ suiv3 (Y)= {111,112,12#} ∩ {112,12#,2##} = {112,12#} ≠ ϕ

→ non vérifiée ⇒ $Y \rightarrow 1/\varepsilon$ est non LL(3).

➔G3 est non LL(3)

Solution Exercice 2 TD N°3

Soit G3 :

$$\begin{cases} Z \rightarrow Y1Y2 \,/\, S21 \\ Y \rightarrow 1 \,/\, \varepsilon \\ S \rightarrow 2 \,/\, \varepsilon \end{cases}$$

Solution :

	Deb1	Suiv1	Deb2	Suiv2	Deb3	Suiv3
Z	1 2	#	11 12 22 21	##	111 221 112 21 12	###
Y	1 ε	1 2	1 ε	11 12 2#	1 ε	112 12# 2##
S	2 ε	2	2 ε	21	2 ε	21#

→ G3 est-elle LL(k) ?

→ $Y \rightarrow 1/\varepsilon$

$Deb_k(1.Suiv_k(Y)) \cap suiv_k(Y) = \phi$?

$\{112, 12\#\} \in Suiv_3(Y) \Rightarrow \{112\#, 12\#\#\} \in Suiv_4(Y) \Rightarrow \{112\#\#, 12\#\#\#\} \in Suiv_5(Y)$……

$\Rightarrow \{112\#^{k-3}, 12\#^{k-2}\} \in Suiv_k(Y)$

<u>OR</u> $Deb_k(1.Suiv_k(Y)) = Deb_k(1.12\#^{k-2}) = 112\#^{k-3} \in Suiv_k(Y)$

$Deb_k(1.Suiv_k(Y)) \cap suiv_k(Y) = 112\#^{k-3} \neq \phi \Rightarrow Deb_k(1.Suiv_k(Y)) \cap suiv_k(Y) \neq \phi$

→ G3 est non LL(k) !

THE END