Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie 1ère année

Année universitaire 2021-2022
MATHS 1 Décembre 2021

Série de T.D. N 2 : Ensembles, relations et applications

Exercice n° 1. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer les sous-ensembles

$$A \cap B,\ A \cup B,\ A - B,\ B - A,\ C_E^A,\ C_E^B,\ A \Delta B.$$

1. $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}\,,\ A = \{1, 2, 3\}\,,\ B = \{1, 5\}\,.$
2. $E = \mathbb{R},\ A = [2, 4],\ B =]3, 5].$

Exercice n° 2. Soient E un ensemble et $A,\ B$ et C trois parties de E.

1. Montrer que
   a) $C_E^{(A\cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$,
   b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. Simplifier $(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup \overline{A}})$, où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E.

Exercice n° 3.

1. Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ comme suit :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
   (b) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Déterminer la classe d'équivalence de a.
   (c) En déduire l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.
   (d) A quelle classe d'équivalence appartient le nombre 2022.

2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall\,(a, b)\,, (c, d) \in \mathbb{R}^2,\ (a, b)\,\mathcal{S}\,(c, d) \Longleftrightarrow a \leq c \text{ et } b \leq d.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Cet ordre est-il total ?

Exercice n° 4.
Considérons l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 3x - 4. \end{array}$$

1. Calculer $f(\{-4, 1\})$, $f([-4, 1])$ et $f^{-1}(\{-7\})$.
2. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
3. Donner un intervalle J tel que $f :]-\infty, \frac{-3}{2}[\longrightarrow J$ soit bijective. Déterminer, dans ce cas, l'application réciproque f^{-1}.